

Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Geociências
Departamento de Oceanografia
Estágio Orientado I

REFRAÇÃO-DIFRAÇÃO DO ESPECTRO DE ONDAS OCEÂNICAS
SUPERFICIAIS: APLICAÇÕES À REGIÃO DE ARRAIAL DO CABO,
RJ.

Caroline Izabel Fisch

Orientadores: José Henrique Gomes de Mattos Alves
Rogério Neder Candella

julho de 1996

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em especial aos meus orientadores, Rogério Candella e José Henrique Alves, por toda dedicação e incentivo.

Ao professor Elói Melo Filho pela oportunidade de aprendizado junto à sua equipe na Universidade Federal de Santa Catarina.

Ao Instituto de Estudos do Mar Almirante Paulo Moreira pela possibilidade de desenvolver este trabalho.

Ao meu tio George Opréa pelo constante incentivo, à minha mãe por todo apoio e a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

A necessidade de informações precisas sobre o comportamento das ondas nas regiões costeiras tem despertado o interesse de diversos setores no estudo e desenvolvimento de modelos numéricos de propagação de ondas. No presente trabalho é feita a descrição de um modelo numérico de refração-difração espectral linear baseado na aproximação parabólica para a equação de declividade de suave. Uma série de simulações foi realizada com o modelo no intuito de se estudar as variações do campo de ondas em função de alterações do número de componentes do espectro direcional de energia. Os resultados destes testes permitem concluir que o modelo apresenta um bom desempenho em regiões cuja batimetria é complexa. A comparação com experimentos de laboratório mostra ainda que o campo de ondas calculado pelo modelo se aproxima bastante da realidade, tanto no caso de espectros com energia distribuída entre faixas estreitas de frequência e direção (de banda estreita), quanto no caso de espectros com energia distribuída entre faixas amplas de frequência e direção (de banda larga).

ÍNDICE

1. Introdução	1
2. Área de Estudos e Aspectos do Clima de Ondas ...	3
3. Princípios Físicos Básicos	5
4. Modelo Matemático	7
4.1. Interpretação Física da EDS	11
4.2. Aproximação Parabólica	15
5. Modelo Numérico	25
6. Testes de Sensibilidade	27
7. Resultados	29
8. Discussões	31
Anexos	33
Apêndice A. Revisão da Teoria Linear	50
Apêndice B. Dedução da EDS	54
Referências Bibliográficas	60

1. Introdução

O estudo da dinâmica dos ambientes costeiros é de fundamental importância para o desenvolvimento de áreas como a oceanografia e a engenharia costeira. Esses ambientes estão sujeitos a grandes impactos por serem largamente explorados.

Entre todos os agentes físicos que intervêm na dinâmica costeira, as ondas superficiais são os elementos mais importantes, pois representam a principal e mais constante fonte de energia mecânica nestes ambientes.

Ondas superficiais oceânicas são perturbações em torno de um estado de equilíbrio que se propagam na interface ar-mar. O presente estudo aborda aspectos da propagação dessas ondas, que são geradas pelo vento e têm a gravidade como agente restaurador.

As ondas oceânicas tem atraído a atenção de estudiosos ao longo da história. Aristóteles (384-322 BC) observou a existência de uma relação entre as ondas e os ventos, e esta tem sido objeto de estudo desde então (Open University, 1989).

A implementação de obras costeiras depende da habilidade de se prever as ondas e do grau de

confiança dessas previsões. O conhecimento do comportamento das ondas torna-se indispensável também para o gerenciamento ambiental, uma vez que será um parâmetro essencial no planejamento das formas de utilização sócio-econômicas do litoral.

O objetivo deste trabalho é estudar as transformações sofridas pelas ondas superficiais na região de Arraial do Cabo, RJ. Para tal fim será utilizado um modelo de refração-difração espectral linear desenvolvido por Kirby & Ozkan (1994). Este modelo numérico calcula o campo de ondas para uma região admitindo uma representação espectral do estado de mar e inclui efeitos de empinamento e refração-difração combinados.

Esta primeira parte do trabalho (estágio orientado I) apresenta uma breve revisão dos princípios físicos que governam as transformações de ondas em águas rasas, uma descrição sucinta do modelo numérico a ser aplicado e resultados de testes de validação do modelo. Na segunda etapa (estágio orientado II), o modelo será efetivamente aplicado à região de estudo.

2. Área de Estudos e Aspectos do Clima de Ondas

Devido à sua localização geográfica (fig. 1), a região em estudo está exposta a ondas originárias dos quadrantes sul e norte.

As primeiras estão associadas a tempestades originadas pelo deslocamento de frentes frias, podendo apresentar direções de origem entre sudoeste e sudeste em função do desenvolvimento de centros de baixa pressão associados aquelas frentes. Podem ser geradas por tempestades locais ou ocorrer na forma de ondulação (*swell*). No segundo caso, apresentam períodos que podem variar de 9 a 18 seg.. Ondas originárias do quadrante sul podem ter alturas que chegam a atingir 7 m. Embora estes extremos não tenham sido observados na região em estudo, foram registrados pela bóia da PETROBRAS localizada na bacia de Campos (Seixas, comunicação pessoal; Candella, 1996). Essas ondas são, também, as que apresentam maior importância para a dinâmica costeira em todo litoral sul-sudeste do Brasil, estando associadas a ressacas capazes de causar estragos consideráveis, como a descrita por Innocentini & Pellegatti Franco (1992).

As ondas de NE estão associadas a ventos oriundos do centro de alta pressão semi-estacionário do Atlântico Sul. Uma vez que a região em estudo localiza-se dentro da área de influência deste centro, tais ondas são, em geral, classificadas como vagas (*wind sea*). O período típico varia entre 4 e 8 seg. e a altura entre 0,5 e 1,5 m (Melo Filho *et al*, 1991). Em agosto de 1985, porém, foram observadas ondas com essa direção principal e altura estimada em mais de 2 m, que acarretaram a destruição parcial do quebramar do porto do Forno em Arraial do Cabo, R.J. (Candella, 1996).



Figura 2.1 - Imagem do satélite LANDSAT, composição dos canais 1, 2 e 4, mostrando a localização da região de Arraial do Cabo, R.J.

3. Princípios Físicos Básicos

A propagação de um trem de ondas sobre a plataforma continental é acompanhada de uma série de transformações. Processos como empinamento, refração, difração e arrebentação, entre outros, são responsáveis por mudanças significativas das características iniciais das ondas em águas profundas. Para descrever suas características em águas rasas,

torna-se necessário um estudo dos processos físicos responsáveis por estas transformações.

Uma forma de avaliar esses efeitos admite, como hipótese básica, que as variações no meio de propagação são muito suaves em relação a distâncias da ordem de um comprimento de onda. O resultado é um ajustamento suave do escoamento às características do meio, originando um trem de ondas cujas características variam lentamente no espaço ("slowly varying wave train")(Mei, 1983).

No presente estudo, o campo de correntes não é incluído. Nesse contexto, as modificações do meio de propagação ocorrem principalmente devido a variações de profundidade. À medida que um trem de ondas se propaga sobre regiões com profundidades cada vez menores, a velocidade de propagação da energia por ele transportada (C_g) e o comprimento de onda se reduzem. Para que o fluxo de energia seja conservado, a densidade de energia deve aumentar, resultando em um aumento da altura da onda. Este fenômeno é conhecido como empinamento (*shoaling*).

Variações espaciais de profundidade (na região costeira) provocam variações da velocidade de fase ao longo das cristas de ondas. Como resultado, a direção

de propagação das ondas também sofrerá alterações. Esta mudança de direção é denominada refração, processo que pode causar convergência (focalização) ou divergência de energia, provocando assim um aumento ou diminuição da altura da onda.

O método clássico para o estudo da refração baseia-se numa extensão da Lei de Snell, relação capaz de quantificar o desvio sofrido por um raio de luz que atravessa meios com diferentes propriedades físicas. O método mostra-se bastante efetivo na previsão de alturas de onda em regiões que apresentam topografia de fundo suave, como é o caso de praias abertas com isóbatas aproximadamente paralelas.

No caso de ambientes que apresentem batimetria muito complexa, como, por exemplo, a presença de ilhas ou montes submarinos, a Lei de Snell se torna incapaz de calcular corretamente o campo de ondas, resultando na previsão de alturas de onda irreais. Nestes casos, o fenômeno dominante é o da difração.

A difração é o processo que descreve um "espalhamento" lateral de energia, resultante do aparecimento de fortes gradientes locais de altura da onda. Os fenômenos de difração e de refração podem ocorrer simultaneamente.

Existe ainda a possibilidade de ocorrência de dissipação da energia da onda durante a sua propagação devido ao atrito com o fundo. Entretanto, Rego (1992) mostra que, em plataformas continentais como a do litoral sudeste, esse efeito pode ser considerado desprezível.

4. Modelo Matemático

O presente capítulo apresenta uma descrição do modelo matemático utilizado por Kirby & Ozkan (1994), baseado na aproximação parabólica para a equação de declividade suave de Berkoff (1972, *apud* Radder, 1979).

O modelo admite a hipótese de que o escoamento é incompressível, invíscido e irrotacional.

A teoria de ondas de pequena amplitude, ou teoria linear, admite que as ondas tem pequena amplitude em relação a seu comprimento de onda e à profundidade local. Uma breve apresentação desta teoria é feita a seguir. Um maior detalhamento pode ser encontrado, por exemplo, em Dean & Dalrymple (1991).

A equação da conservação da massa é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u}) = 0 \quad (3.1)$$

sendo, o operador Nabla definido como:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

ρ a densidade do fluido e

\bar{u} o vetor que representa a velocidade do escoamento

Assumindo-se a condição de incompressibilidade do fluido, o que significa admitir ρ constante, a equação fica

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (3.2)$$

Esta é também a equação da continuidade para um escoamento incompressível.

Considerando-se ainda a condição de irrotacionalidade do escoamento, o campo de velocidades pode ser representado por uma função potencial de velocidades ($\emptyset(x, y, z, t)$), definida por:

$$\bar{u} = \nabla \emptyset \quad (3.3)$$

Substituindo-se a equação (3.3) na equação (3.2), obtém-se:

$$\nabla^2 \emptyset(x, y, z, t) = 0 \quad (3.4)$$

onde, x e y são as coordenadas horizontais

z é a coordenada vertical contada a partir da superfície em repouso, e

t é o tempo

A equação (3.4) é também chamada equação de Laplace. Sua solução permite a análise de escoamentos incompressíveis, invíscidos e irrotacionais. Para isso, é preciso obter uma representação para o potencial de velocidade (ϕ) que satisfaça à equação de Laplace.

A obtenção da solução requer o estabelecimento de condições que a função potencial de velocidade (ϕ) deve satisfazer nos contornos. São três as condições de contorno a serem satisfeitas, uma para o fundo e duas para a superfície livre. A solução para a equação de Laplace é apresentada resumidamente no apêndice A.

A forma final para o potencial de velocidades para ondas de pequena amplitude é:

$$\phi = \frac{H g \cosh k(h+z)}{2 \omega \cosh kh} \cos kx \sin \omega t \quad (3.5)$$

onde, H é a altura da onda

ω é a frequência da onda, dada por $\omega = 2\pi/T$

g é a gravidade, e

k é o número de onda, dado por $k = 2\pi/L$

Os efeitos da propagação de ondas na vertical são, na prática, da ordem de meio comprimento de onda e, no máximo, um comprimento de onda. Na dimensão horizontal, esses efeitos são da ordem de centenas de comprimentos de ondas. Isso equivale dizer que as consequências da propagação de ondas na superfície do oceano são mais representativas, em estudos regionais, na horizontal que na vertical (Alves, comunicação pessoal).

Com base na hipótese que a estrutura vertical do escoamento, $f(z)$, gerado pela onda é localmente insensível à inclinação do fundo, por ser este suave, chega-se à seguinte forma para $f(z)$ (Liu, 1986, 1990):

$$f(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (3.6)$$

onde k representa o número de onda, dado pela relação de dispersão:

$$\omega^2 = g \cdot k \cdot \tanh(kh) \quad (3.7)$$

Considera-se que a onda se propaga sobre um fundo *localmente* plano e horizontal. Esta aproximação é obtida analogamente àquela usada para ondas de luz (teoria WKB) e assume, como princípio básico, que as variações de profundidade são muito pequenas se comparadas ao comprimento de onda. Detalhes do

desenvolvimento desta aproximação são encontrados em Mei (1983) e no apêndice B.

O resultado final é a obtenção de uma equação que descreve apenas a estrutura horizontal do escoamento associado a ondas que se propagam em meios com variações suaves de fundo. Por este motivo, a equação deduzida pela primeira vez por Berkoff (1972, apud Radder, 1979) é também chamada equação de declividade suave (EDS).

$$\nabla_h \cdot (CC_g \nabla_h \phi) + k^2 CC_g \phi = 0 \quad (3.8)$$

4.1. Interpretação Física da EDS

Liu (1986) apresenta uma interpretação física para a EDS que admite, em princípio, que a onda em questão é plana monocromática, sendo a função potencial descrita por:

$$\phi(x, y) = A(x, y) e^{iS(x, y)} \quad (3.9)$$

onde $A(x, y) = \frac{g H(x, y)}{\omega^2}$ corresponde à amplitude da onda

$H(x, y)$ é altura da onda

$S(x, y)$ é a função fase da onda.

Substituindo-se a eq.(3.9) em (3.8), obtêm-se:

$$\nabla_h \text{CC}_g \nabla_h A e^{iS} + k^2 \text{CC}_g A e^{iS} = 0 \quad (3.10)$$

Desenvolvendo-se a equação acima, têm-se:

$$\begin{aligned} & \left[\nabla_h S \cdot (\text{CC}_g \nabla_h A) + \nabla_h \cdot (\text{CC}_g A \nabla_h S) \right] i + \nabla_h \cdot (\text{CC}_g \nabla_h A) \\ & - \nabla_h S \cdot (\text{CC}_g A \nabla_h S) + k^2 \text{CC}_g A = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Multiplicando-se esta equação por A e separando-a em uma parte real e outra imaginária, obtêm-se:

$$\begin{aligned} & A \left[\text{CC}_g \nabla_h^2 A + \nabla_h (\text{CC}_g) \cdot \nabla A - \text{CC}_g \left(|\nabla_h S|^2 - k^2 \right) A \right] + \nabla_h \cdot (\text{CC}_g A^2 \nabla_h S) i = 0 \\ & (3.12) \end{aligned}$$

A parte real pode ser rearranjada como:

$$|\nabla_h S|^2 - k^2 = \frac{\nabla_h^2 A}{A} + \frac{\nabla_h (\text{CC}_g) \cdot \nabla_h A}{\text{CC}_g A} \quad (3.13)$$

Alves (comunicação pessoal) comenta que a existência de diferenciais de primeira e segunda ordens no lado direito da eq.(3.13) demonstra que as alterações da fase da onda e do número de onda resultam da existência de gradientes locais de amplitude, formados por outros processos que não somente a refração. A equação (3.13), portanto, governa a fase da onda.

O lado esquerdo da eq.(3.13), se igualado a zero, torna-se:

$$|\nabla_h \mathbf{S}|^2 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = |\nabla_h \mathbf{S}| \quad (3.14)$$

Esta equação estabelece que as variações no número de onda estão diretamente associadas às variações de fase da mesma. Este é um conceito básico da teoria dos raios (Munk & Arthur, 1951), segundo a qual as variações da altura da onda ao longo da sua propagação são o resultado de refração pura.

A parte imaginária da equação (3.12) é:

$$\nabla_h (\mathbb{C} \mathbb{C}_g A^2 \nabla_h \mathbf{S}) = 0 \quad (3.15)$$

Introduzindo-se a definição do vetor velocidade de grupo:

$$\bar{\mathbb{C}}_g = \mathbb{C}_g \frac{\nabla_h \mathbf{S}}{|\nabla_h \mathbf{S}|} \quad (3.16)$$

e a da velocidade de fase da onda $\mathbb{C} = \frac{\omega}{k}$, a eq.(3.15),

torna-se:

$$\nabla_h \cdot \left(\frac{\omega}{k} \cdot \bar{\mathbb{C}}_g |\nabla_h \mathbf{S}| A^2 \right) = 0 \quad (3.17)$$

O desenvolvimento desta equação, considerando-se que a frequência da onda (ω) é invariável ao longo da sua propagação, resulta em:

$$\nabla_h \cdot (\bar{\mathbb{C}}_g A^2) = - \left[\frac{k}{|\nabla_h \mathbf{S}|} \cdot \mathbb{C}_g \cdot \nabla_h \left(\frac{|\nabla_h \mathbf{S}|}{k} \right) \right] A^2 \quad (3.18)$$

Por definição, $\bar{\mathbb{C}}_g A^2$ é o fluxo de energia da onda.

O termo do lado esquerdo da eq.(3.18) representa, portanto, a taxa de variação do fluxo de energia. Pela teoria dos raios, que considera somente a refração, a taxa de variação do fluxo de energia é dada por:

$$\nabla \cdot (\bar{C}_g A^2) = 0 \quad (3.19)$$

A existência do termo do lado direito da eq.(3.18) demonstra que a variação do fluxo de energia pode ocorrer devido a outros processos físicos que não a refração. Tais alterações são resultado de mudanças na fase da onda (S) que, por sua vez, são provocadas pelos gradientes de amplitudes, conforme estabelecido pela eq.(3.13).

Com base nas considerações feitas acima, pode-se dizer que a variação do fluxo de energia e da fase da onda, descritos pelos termos do lado direito das eqs.(3.13) e (3.18), representam o fenômeno da difração (Liu, 1986).

A EDS, portanto, é a equação que governa a propagação de ondas superficiais de gravidade sobre fundo com inclinação suave, incluindo efeitos de refração, difração e empinamento. Os efeitos resultantes dos demais processos de transformação em águas rasas - reflexão e dissipação de energia - podem

ser incluídos a partir de formulações apropriadas (Liu, 1986, 1990).

4.2. Aproximação Parabólica

O fato de a EDS (3.8) ser uma equação elíptica de segunda ordem em x e y implica em dificuldades no que tange a sua solução através de técnicas numéricas.

Inicialmente, é necessário que as condições de contorno em todas as fronteiras sejam estabelecidas. A determinação dessas condições é um problema complicado, uma vez que, no caso da propagação de ondas oceânicas até a costa, uma das fronteiras é representada pela zona de arrebentação. Essa região não apresenta posição definida *a priori* em função da natureza aleatória e variável no tempo e no espaço do processo de arrebentação de ondas, tornando a condição de contorno nesta fronteira incerta.

Além disso, a solução numérica para a EDS requer um espaçamento de malha muito pequeno o que, conseqüentemente, demanda um esforço computacional muito grande. A aplicação de técnicas numéricas para a solução da EDS completa demonstra que, em regiões com dimensões maiores que $10L^2$, onde L é o comprimento da

onda em estudo, o uso dessa equação torna-se proibitivo devido ao esforço computacional requerido (Panchang *et al*, 1986; Rego, 1992).

Em vista das dificuldades colocadas acima, faz-se necessária a obtenção de uma forma aproximada para a equação que governa as transformações de ondas em águas rasas (EDS). Uma alternativa é transformar a equação elíptica em uma do tipo parabólica, cuja resolução numérica é mais facilmente obtida. Tal método é conhecido como aproximação parabólica.

Esse método surgiu em 1944 e foi, inicialmente, aplicado ao caso de propagação de ondas superficiais de gravidade por Radder (1979). No presente trabalho, a aproximação parabólica é desenvolvida para a EDS (daqui em diante abreviada pela sigla APEDS) como tentativa de reduzir o esforço computacional, sem que ocorram perdas substanciais das informações sobre o campo de ondas.

Segundo Liu (1990), o conceito básico deste método é converter a EDS num conjunto de equações que descrevem a propagação de um trem de ondas que possui uma direção preferencial, considerando ainda o fluxo de energia na direção transversal à de propagação.

Existem diversas formas de se obter as equações parabólicas partindo-se da EDS (Radder, 1979; Liu et al., 1986). A primeira metodologia usada para obter a aproximação parabólica baseia-se no método da matriz de separação (*splitting method*), que divide o campo de ondas em uma parte refletida e outra transmitida (Radder, 1979), o que resulta numa equação de primeira ordem. Uma metodologia mais geral, que permite obter a APEDS de ordem superior numa forma semelhante à utilizada no modelo estudado, é descrita em Liu (1990) e reproduzida a seguir.

O primeiro passo consiste em transformar a EDS na equação de Helmholtz ($\nabla^2 \xi + k^2 \xi = 0$). Isso é obtido através de uma mudança de variável:

$$\phi = \xi (CC_g)^{-1/2}$$

(3.20)

sendo ξ o potencial de velocidades modificado.

A forma da EDS dada pela eq.(3.8) ou no apêndice B (B.2) pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\nabla CC_g}{CC_g} \cdot \nabla \phi + k^2 \phi = 0$$

(3.21)

onde, $\nabla = \nabla_h$

Substituindo-se (3.20) em (3.21) obtém-se:

$$\nabla^2 \xi + \left[(CC_g)^{1/2} \cdot \nabla^2 (CC_g^{-1/2}) - \frac{(\nabla CC_g)^2}{2CC_g^2} + k^2 \right] \cdot \xi = 0 \quad (3.22)$$

O primeiro termo dentro dos colchetes na eq. acima pode ser desenvolvido, resultando em:

$$CC_g^{1/2} \cdot \nabla^2 (CC_g^{-1/2}) = \frac{3}{4} \frac{(\nabla CC_g)^2}{CC_g^2} - \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 CC_g}{CC_g} \quad (3.23)$$

Rearranjando a eq.(3.22) a partir de (3.23), têm-se:

$$\nabla^2 \xi + \left[k^2 - \frac{\nabla^2 (CC_g)^{1/2}}{CC_g^{1/2}} \right] \cdot \xi = 0 \quad (3.24)$$

Com base no termo entre colchetes na eq.(3.24), pode-se definir o número de onda (k_c) como

$$k_c^2 = \left[k^2 - \frac{\nabla^2 (CC_g)^{1/2}}{CC_g^{1/2}} \right] \quad (3.25)$$

e substituindo-se a eq.(3.25) em (3.24), a EDS toma a forma da equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 \xi + k_c^2 \xi = 0 \quad (3.26)$$

Para o caso de ondas propagando-se sobre fundo com inclinação suave, sem dissipação de energia, o último termo da eq.(3.25) é desprezado por ser de

segunda ordem (Rego, 1992). Portanto, k_c pode ser aproximado por

$$k_c^2 \approx k^2 \quad (3.27)$$

e é determinado a partir da relação de dispersão (3.7).

Considerando-se que essa aproximação baseia-se na hipótese que a propagação das ondas ocorre em uma direção preferencial (direção x), o potencial modificado pode ser representado por:

$$\xi(x,y) = A(x,y)e^{ik_0x} \quad (3.28)$$

onde, A é a amplitude complexa da onda, e

k_0 é valor do número de onda calculado na fronteira externa do domínio.

A substituição da eq.(3.28) em (3.26) resulta em

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial x} + (k_c^2 - k_0^2)A = 0 \quad (3.29)$$

Admitindo-se, ainda, a relação dada por (3.27), a eq.(3.29) pode ser simplificada;

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (3.30)$$

Segundo Liu (1986), a escala de variação da amplitude da onda na direção de sua propagação (eixo x), L_x , é muito maior que na direção transversal (eixo

y), L_y . A aproximação parabólica requer, portanto, que:

$$O\left(\frac{L_y}{L_x}\right) = \varepsilon \ll 1$$

$$O(kL_x) = O\left(\frac{L_x}{L_y}\right)^2 = O(\varepsilon^{-2}) \quad \text{e} \quad O(kL_y) = O\left(\frac{L_x}{L_y}\right) = O(\varepsilon^{-1})$$

Fazendo-se uma análise dimensional dos termos da eq.(3.29), e com base na colocação acima, a variação de segunda ordem da amplitude na direção x torna-se desprezível, de forma que a eq.(3.30) pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (3.31)$$

A aproximação parabólica para a equação de Helmholtz (3.26) é obtida através da substituição da eq.(3.28) em (3.31):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2k^2 \xi = 0 \quad (3.32)$$

A solução para essa equação deve ser capaz de representar a propagação de ondas na dimensão horizontal (x, y) e é dada pela seguinte equação (Liu, 1986):

$$k_y^2 + 2kk_x - 2k^2 = 0 \quad (3.33)$$

onde, k_x e k_y representam variações de fase da onda nas direções x e y , respectivamente.

Segundo Liu (1986), a solução que descreve a variação do número de onda (k), a partir de suas variações nas direções x e y , partindo-se da equação completa (3.26), é:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.34)$$

Essa solução é válida para ondas que se propagam em todas as direções.

Uma análise gráfica das soluções dadas pelas equações (3.33) e (3.34) mostra que, enquanto a eq.(3.33) representa uma parábola, a eq.(3.34) descreve um círculo. A eq.(3.33), portanto, corresponde a uma forma aproximada da eq.(3.34) quando os desvios na direção principal de propagação do trem de ondas são pequenos (Liu, 1986) e a parábola tem sua curvatura coincidente com a do círculo.

Na busca de uma equação cuja solução seja dada pela eq.(3.34), Liu (1986) reescreve a equação de Helmholtz na forma:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + k_c^2 Q^2 \xi = 0 \quad (3.35)$$

onde, k_c deve obedecer as relações descritas em (3.25) e (3.27), onde Q é um operador pseudo-diferencial dado por

$$Q = \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{1/2} \quad (3.36)$$

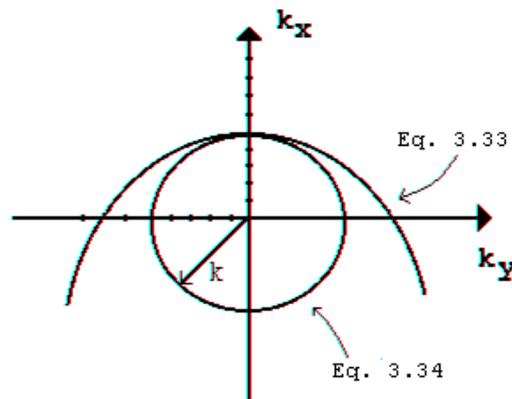


Figura 4.1 - Diagramas mostrando as variações do número de onda para as soluções da equação completa dada por Helmholtz (3.34) e da equação parabólica (3.33).

A resolução deste operador é uma tarefa complicada, sendo normalmente utilizadas aproximações racionais ou expansões em séries. Dessa forma, a ordem de precisão obtida será função do grau da aproximação utilizada na solução do operador pseudo-diferencial.

O campo total do escoamento de ondas, representado pelo potencial de velocidades modificado

(ξ) , pode ser separado em um campo transmitido (ξ_+) e num refletido (ξ_-)

$$\xi = \xi_+ + \xi_- \quad (3.37)$$

onde admite-se que:

$$\xi_+ \propto e^{ik_c Qx} \quad e \quad \xi_- \propto e^{-ik_c Qx} \quad (3.38)$$

A derivação da eq.(3.37) em relação a x , usando a eq.(3.38), resulta em:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = ik_c Q(\xi_+ - \xi_-) \quad (3.39)$$

Analisando-se as equações (3.37) e (3.39), os campos transmitido e refletido tornam-se:

$$\xi_+ = \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{i}{k_c Q} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad (3.40)$$

$$\xi_- = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{i}{k_c Q} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad (3.41)$$

Diferenciando as eqs. acima em relação a x e usando a equação (3.35) para $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ e (3.39) para $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ têm-se:

$$\frac{\partial \xi_+}{\partial x} - ik_c Q \xi_+ + \frac{1}{2k_c Q} \frac{\partial k_c Q}{\partial x} \xi_+ = \frac{1}{2k_c Q} \frac{\partial k_c Q}{\partial x} \xi_- \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \xi_-}{\partial x} + ik_c Q \xi_- + \frac{1}{2k_c Q} \frac{\partial k_c Q}{\partial x} \xi_- = \frac{1}{2k_c Q} \frac{\partial k_c Q}{\partial x} \xi_+ \quad (3.43)$$

Deve-se, agora, tentar obter a solução para o operador pseudo-diferencial Q . Admitindo-se que os

desvios sofridos pelo trem de ondas em relação à sua direção preferencial de propagação (δ) são pequenos, obtêm-se a forma aproximada para a eq.(3.36):

$$Q = (1 + \delta^2)^{1/2} \quad (3.44)$$

sendo, $\delta^2 = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Para desvios realmente muito pequenos (da ordem de δ^2), um forma ainda mais precisa para a equação acima é obtida através da aproximação racional (Rego, 1992):

$$Q = (1 + \delta^2)^{1/2} = \frac{1 + \frac{3}{4}\delta^2}{1 + \frac{1}{4}\delta^2} = \frac{1 + \frac{3}{4k_c^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}}{1 + \frac{1}{4k_c^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \quad (3.45)$$

Utilizando-se a eq.(3.45) em (3.42) e (3.43), chega-se a

$$\frac{\partial \xi_+}{\partial x} - ik_c \xi_+ + \frac{1}{4k_c^2} \frac{\partial^3 \xi_+}{\partial x \partial y^2} - \frac{3i}{4k_c^2} \frac{\partial^2 \xi_+}{\partial y^2} + \frac{1}{2k_c} \frac{\partial k_c}{\partial x} \xi_+ = \frac{1}{2k_c} \frac{\partial k_c}{\partial x} \xi_- \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \xi_-}{\partial x} + ik_c \xi_- + \frac{1}{4k_c^2} \frac{\partial^3 \xi_-}{\partial x \partial y^2} + \frac{3i}{4k_c^2} \frac{\partial^2 \xi_-}{\partial y^2} + \frac{1}{2k_c} \frac{\partial k_c}{\partial x} \xi_- = \frac{1}{2k_c} \frac{\partial k_c}{\partial x} \xi_+ \quad (3.47)$$

Supondo que a declividade da praia é suave o suficiente para que a energia se dissipe quase totalmente na zona de arrebentação, o campo de ondas refletido (ξ_-) é considerado desprezível. A equação

parabólica para o campo transmitido (ξ_+) governante é, então, reescrita na forma

$$\frac{\partial \xi_+}{\partial x} - ik_c \xi_+ + \frac{1}{4k_c^2} \frac{\partial^3 \xi_+}{\partial x \partial y^2} - \frac{3i}{4k_c^2} \frac{\partial^2 \xi_+}{\partial y^2} + \frac{1}{2k_c} \frac{\partial k_c}{\partial x} \xi_+ = 0 \quad (3.48)$$

Introduzindo a relação (3.28) para a amplitude complexa da onda, a equação (3.48) torna-se

$$2ik_c \frac{\partial A}{\partial x} + \left[2k_c(k_c - k) + i \frac{\partial k_c}{\partial x} \right] A + \frac{i}{2k_c} \frac{\partial^3 A}{\partial x \partial y^2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{k}{2k_c} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (3.49)$$

onde o campo de ondas transmitido pode ser obtido através da transformação de ξ em ϕ por meio da eq. (3.20).

Esta é a forma final da equação parabólica de ordem superior que descreve as variações da altura de onda resultante das transformações sofridas ao longo de sua propagação sobre ambientes cujas propriedades variam suavemente. O modelo matemático utilizado por Kirby & Ozkan (1994) é semelhante à equação (3.49).

5. Modelo Numérico

Em busca da solução para as equações diferenciais governantes do processo em estudo são utilizados métodos teóricos, que podem ser analíticos ou numéricos.

Os métodos analíticos são aplicados em problemas cujas hipóteses simplificativas admitem condições de contorno simples. Os métodos numéricos, por outro lado, permitem resolver problemas complexos com complicadas condições de contorno (Maliska, 1995). Estes métodos baseiam-se no processo de discretização de equações diferenciais, reduzindo um problema físico contínuo a um problema discreto, simplificando sua resolução através de técnicas computacionais.

A utilização da aproximação parabólica é de grande auxílio no estudo das transformações decorrentes da propagação de ondas oceânicas em águas rasas, conforme visto no item 4.2. Esta aproximação, entretanto, não apresenta solução analítica para casos em que o fundo apresenta variações não uniformes de profundidades, devendo ser resolvida através de técnicas numéricas.

Nos últimos anos o uso de técnicas numéricas em engenharia, oceanografia, física e demais áreas afins têm crescido graças ao desenvolvimento de computadores de alta velocidade e grande capacidade de armazenamento de dados e ao aparecimento das estações de trabalho, possibilitando, desta forma, a obtenção da solução para complexos problemas numéricos.

O método das diferenças finitas, utilizado por Kirby & Ozkan (1994) para a solução numérica da APEDS, consiste na aproximação das derivadas parciais contínuas por diferenças discretas. As aproximações podem ser obtidas através da definição da derivada de uma função ou da expansão em séries de Taylor, através do truncamento da mesma de acordo com a ordem desejada. Uma vez obtida, a equação resultante é aplicada em um número finito de pontos, dando origem a equações algébricas cuja solução fornece os valores da função desejada nos pontos em questão.

Existem duas possibilidades básicas para desenvolvimento do esquema numérico e um grande número de alternativas que combinam as duas. A primeira, chamada explícita, calcula uma variável em cada ponto utilizando unicamente os valores da variável no espaço ou tempo anterior. Embora seja eficiente em termos de tempo de computação, esse esquema sofre restrições do ponto de vista de estabilidade numérica (Maliska, 1995). No esquema implícito, o valor da variável num ponto é calculado em função de valores em pontos vizinhos que ocorrem em passos espaciais e temporais anteriores e atuais. Como estes últimos são também desconhecidos, a solução é obtida iterativamente. As

vantagens desse esquema são maior precisão e estabilidade.

O esquema numérico adotado no modelo em estudo consiste na aplicação do método das diferenças finitas na equação governante a partir de um esquema semi-implícito conhecido como método de Crank-Nicolson. O modelo calcula o campo de ondas para a região estudada através da evolução da solução no espaço. A forma final das equações discretizadas por diferenças finitas é apresentada em Kirby & Ozkan (1994).

6. Testes de Sensibilidade

O modelo de refração e difração espectral de Kirby & Ozkan (1994) simula o campo de ondas em uma região que apresenta batimetria complexa a partir da representação espectral do estado de mar. Esta é obtida através da análise espectral clássica, por meio da Transformada Discreta de Fourier.

A aplicação de um modelo deste tipo demanda um grande esforço computacional, principalmente em se tratando de computadores PC, uma vez que o número de componentes espectrais é usualmente grande. Visando ao

mesmo tempo uma boa representação do campo de ondas e uma redução do esforço computacional, foi realizada uma série de simulações, com a finalidade de testar a sensibilidade do modelo a variações do número de componentes direcionais e de frequência.

A composição dos espectros foi estabelecida arbitrariamente, de forma a representar desde um grande número de componentes de onda, tanto direcionais quanto de frequência, até um caso simples de uma onda monocromática. As simulações consistem na propagação dos espectros sobre uma calota elíptica submersa, reproduzindo os experimentos de Vincent & Briggs (1989).

Os referidos experimentos foram realizados em um tanque de ondas de 35 m de largura e 29 m de comprimento, apresentando a calota elíptica um raio maior de 3.96 m e um raio menor de 3.05 m, com uma altura máxima de 30.48 m no seu centro.

Os testes aqui descritos foram realizados em microcomputador do tipo 486 DX2-66 para duas situações caracterizadas por um espectro de banda estreita e outro de banda larga. No caso do espectro de banda estreita foram oito simulações, enquanto que para o de banda larga estas totalizam seis. A descrição de cada

uma delas, no que diz respeito ao número de componentes direcionais, de frequência, tempo de processamento e número total de ondas, se encontram nas tabelas 1 e 2.

Os resultados de cada teste são mostrados, em termos de altura significativa normalizada em cada ponto do domínio, nas figuras que descrevem o campo de ondas em cada caso simulado (Anexos). Tais resultados foram, ainda, comparados com a altura significativa normalizada para um dos perfis transversais medidos em laboratório por Vincent & Briggs (1989), para o caso de propagação de 200 ondas sobre a mesma calota elíptica, e, a partir disso, calculado o erro médio e o desvio padrão para cada caso (tabela 3).

7. Resultados

Os resultados das simulações, considerando a variação espacial da altura significativa de onda (H_s), com o espectro de banda estreita podem ser observados nas figuras 1 a 7. A análise comparativa dessas figuras revela que a variação de H_s é mais significativa em situações de alterações do número de componentes direcionais (figuras 5 e 8) e que a

alteração do número de componentes de frequência resulta em uma menor variabilidade de H_s (figuras 2 e 8).

Os erros médios obtidos para esse espectro são da ordem de 10% a quase 30%. Esse último pode ser justificado por se tratar da propagação de uma onda monocromática, enquanto os demais se mostraram dentro do esperado. Observa-se que quanto menor o número total de ondas, maior o erro médio, pois o espalhamento direcional é menor, o que resulta em uma maior concentração da energia da onda em uma mesma direção.

Para o espectro de banda larga (figuras de 9 a 14), a alteração do número de componentes direcionais e de frequência não resultou em diferenças tão significativas, não sendo possível afirmar a qual delas o modelo seria mais sensível. Os erros médios foram da ordem de 20%, com exceção do caso que representa a propagação de uma onda plana monocromática, cujo erro é da ordem de 70%.

Em ambos os casos citados, o tempo de processamento mostrou ser um parâmetro bastante variável. Nesse aspecto, as melhores simulações para um espectro de banda estreita, segundo os parâmetros

escolhidos para estes testes, correspondem aos casos de 110 e 66 ondas (figuras 3 e 8, respectivamente), sendo o primeiro mais preciso na determinação do campo de ondas e o segundo mais vantajoso em termos de tempo. Para um espectro de banda larga, os melhores resultados são obtidos para os casos de 260 e 171 ondas (figuras 10 e 11), sendo que o último apresenta uma redução significativa do tempo de processamento e um erro médio da ordem de 2% em relação ao caso com 260 ondas. Apenas para efeito de ilustração, o caso 1 (225 ondas, espectro de banda estreita) que levou cerca de 16 horas para ser processado no PC 486 66 MHz, levou cerca de 20 minutos na estação de trabalho SiliconGraphics Power Challenge do Instituto de Estudos do Mar Alte Paulo Moreira.

8. Discussões

A utilização da APEDS, embora apresente vantagens no que tange à resolução da equação original (EDS), implica na ocorrência de limitações, conforme visto ao longo de sua dedução no ítem 4.2.

A condição mais restritiva é dada pela existência de uma direção preferencial de propagação do trem de ondas (direção x), e é expressa pela eq.(3.28). A aproximação de primeira ordem de Radder (1979) é válida para desvios de até 30 graus. Já a dedução de Kirby (1986), estende esse limite até 45 graus e é este o limite adotado pelo modelo de refração e difração espectral de Kirby & Ozkan (1994).

Os resultados da propagação de ondas sobre uma calota elíptica, descritos no capítulo 7, permitem concluir que o bom desempenho deste modelo em regiões cuja batimetria é complexa o torna uma boa opção para o cálculo do campo de ondas em locais como a região de Arraial do Cabo, RJ, caracterizada pela presença de obstáculos como ilhas e quebramares. No entanto, a utilização de ondas monocromáticas para simular a propagação do campo de ondas oceânicas superficiais deve ser evitada, como atestado pelo erro obtido na simulações, uma vez que a melhor representação para esses casos é o espectro direcional de energia.

Anexos

Simulações com espectros de banda estreita

	Total de ondas	Componentes de frequência	Componentes direcionais	Tempo de processamento do modelo
Caso 1	225	15	15	16 horas
Caso 2	175	15	11	10 h 50 min
Caso 3	110	10	11	7 h 20 min
Caso 4	50	10	5	3 h 15 min
Caso 5	30	6	5	1 h 21 min
Caso 6	1	1	1	2 min 5 s
Caso 7	6	6	1	18 min
Caso 8	66	6	11	3 horas

Tabela 1 - Descrição do número de componentes espectrais utilizadas em cada teste para o caso de um espectro de banda estreita e o respectivo tempo de processamento do modelo numérico.

Simulações com espectros de banda larga

	Total de ondas	Componentes de frequência	Componentes direcionais	Tempo de processamento do modelo
Caso 9	340	20	17	37 horas
Caso 10	260	20	13	28 h 07 min
Caso 11	171	9	19	22 h 26 min
Caso 12	81	9	9	9 h 25 min
Caso 13	40	5	9	5 h 41 min
Caso 14	1	1	1	2 min

Tabela 2 - Descrição do número de componentes espectrais utilizadas em cada teste para o caso de um espectro de banda larga e o respectivo tempo de processamento do modelo numérico.

Estimativas de erro médio e desvio padrão para cada caso

	Erro médio(%)	Desvio Padrão
Caso 1	9.1	6.8
Caso 2	9.5	7.8
Caso 3	9.1	7.2
Caso 4	17.0	11.9
Caso 5	17.6	11.4
Caso 6	29.8	20.9
Caso 7	26.9	20.0
Caso 8	7.1	6.1
Caso 9	20.8	14.2
Caso 10	20.8	14.1
Caso 11	22.7	13.0
Caso 12	22.2	13.3
Caso 13	16.7	9.8
Caso 14	70.0	53.5

Tabela 3 - Cálculo do erro médio e desvio padrão para cada teste de sensibilidade feito com base na comparação entre os resultados de altura significativa de onda gerados pelo modelo e a altura normalizada medida em laboratório por Vincent & Briggs (1989).

Caso 1

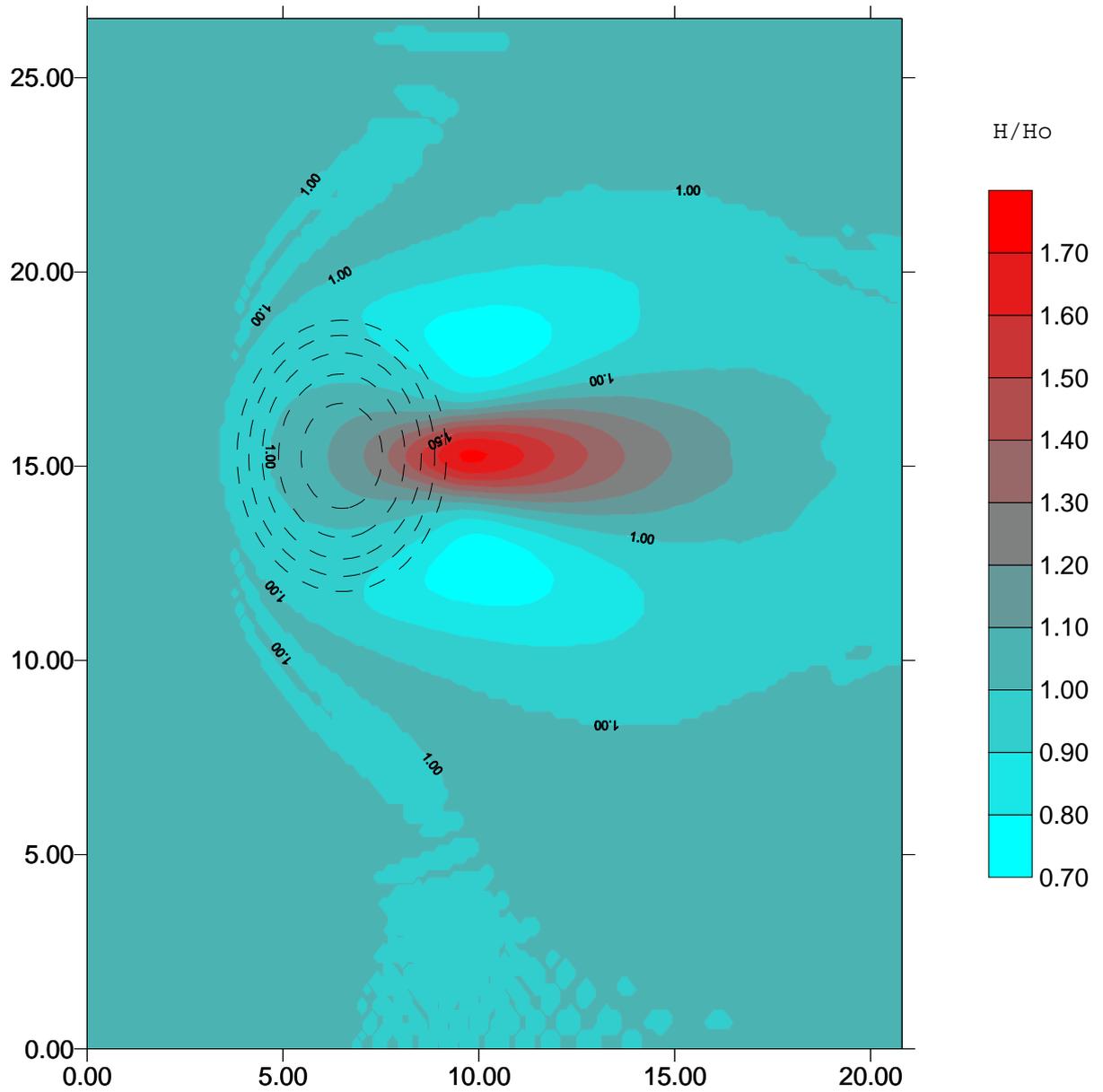


Figura 1 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 225 ondas (espectro de banda estreita) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 2

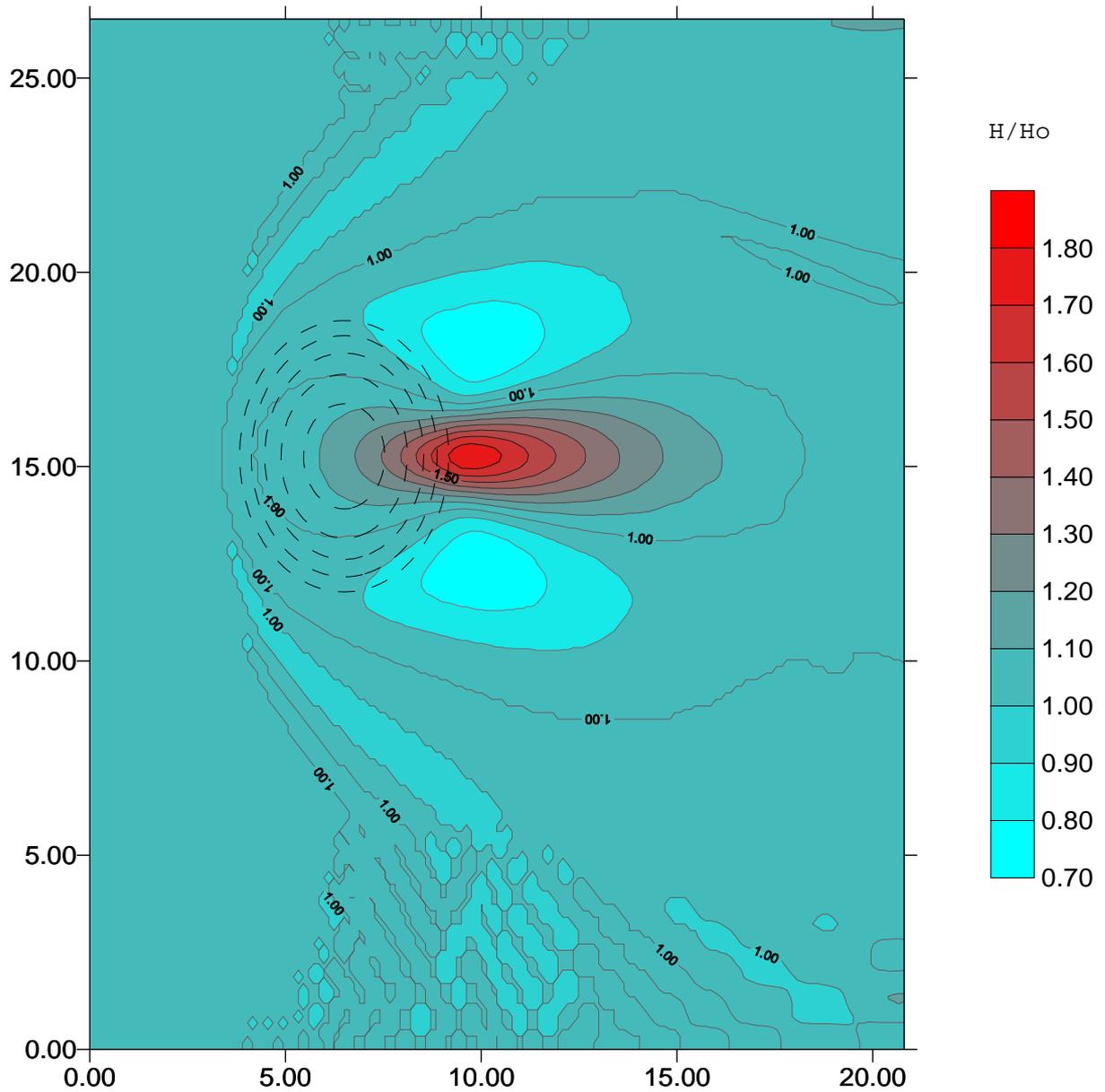


Figura 2 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 175 ondas (espectro de banda estreita) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 3

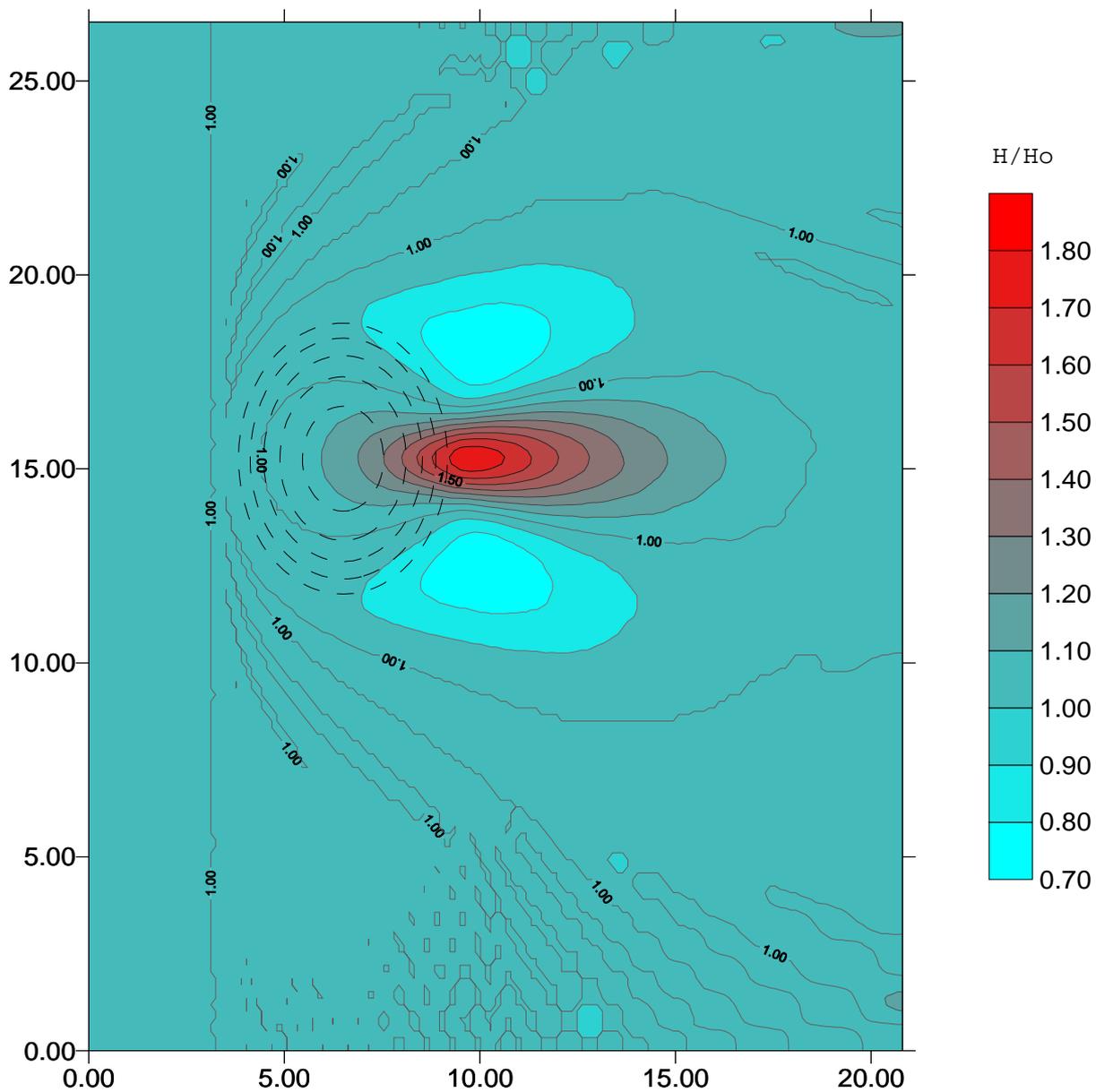


Figura 3 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_o) para o caso da propagação de 110 ondas (espectro de banda estreita) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 4

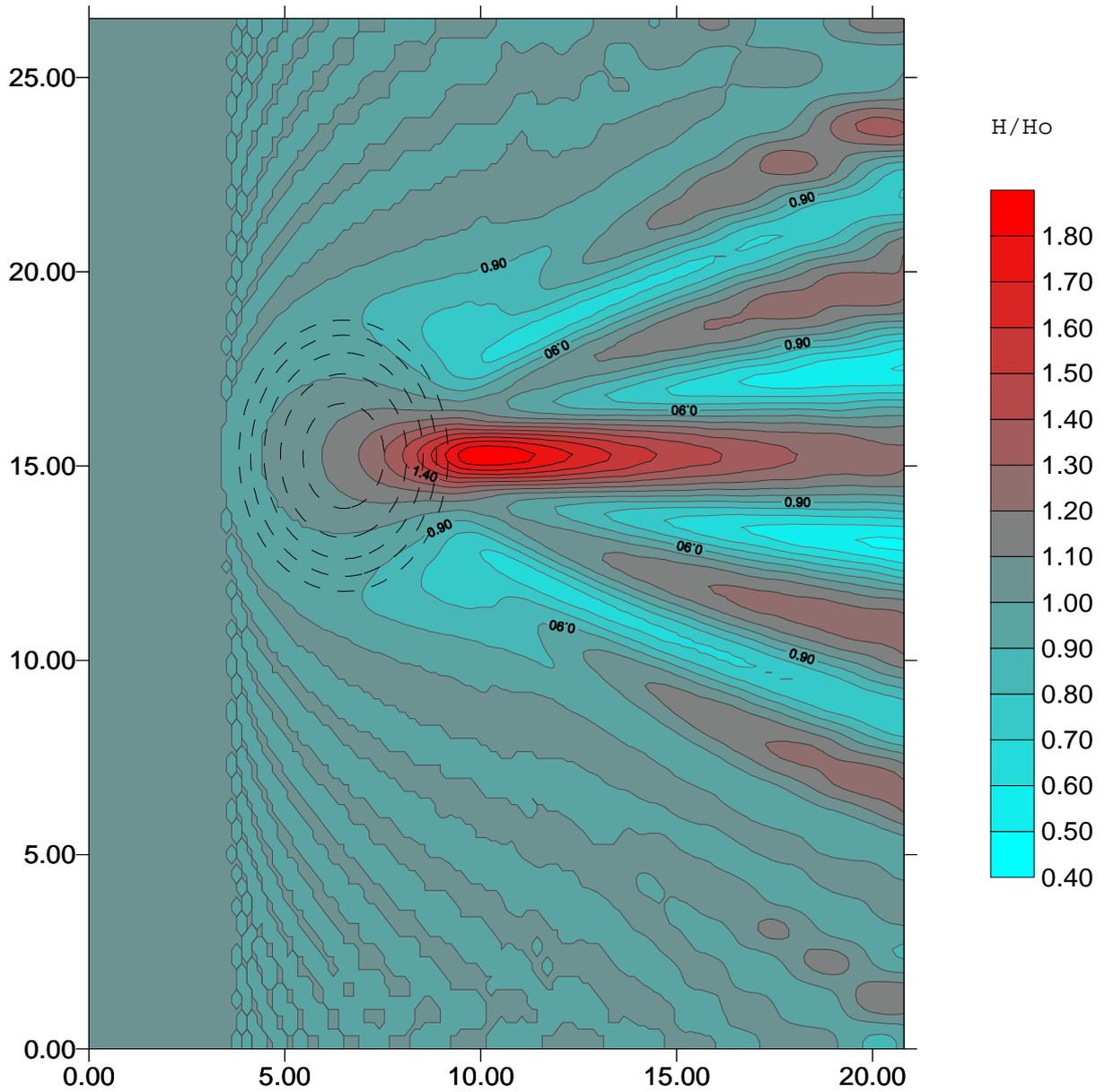


Figura 4 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 50 ondas (espectro de banda estreita) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 5

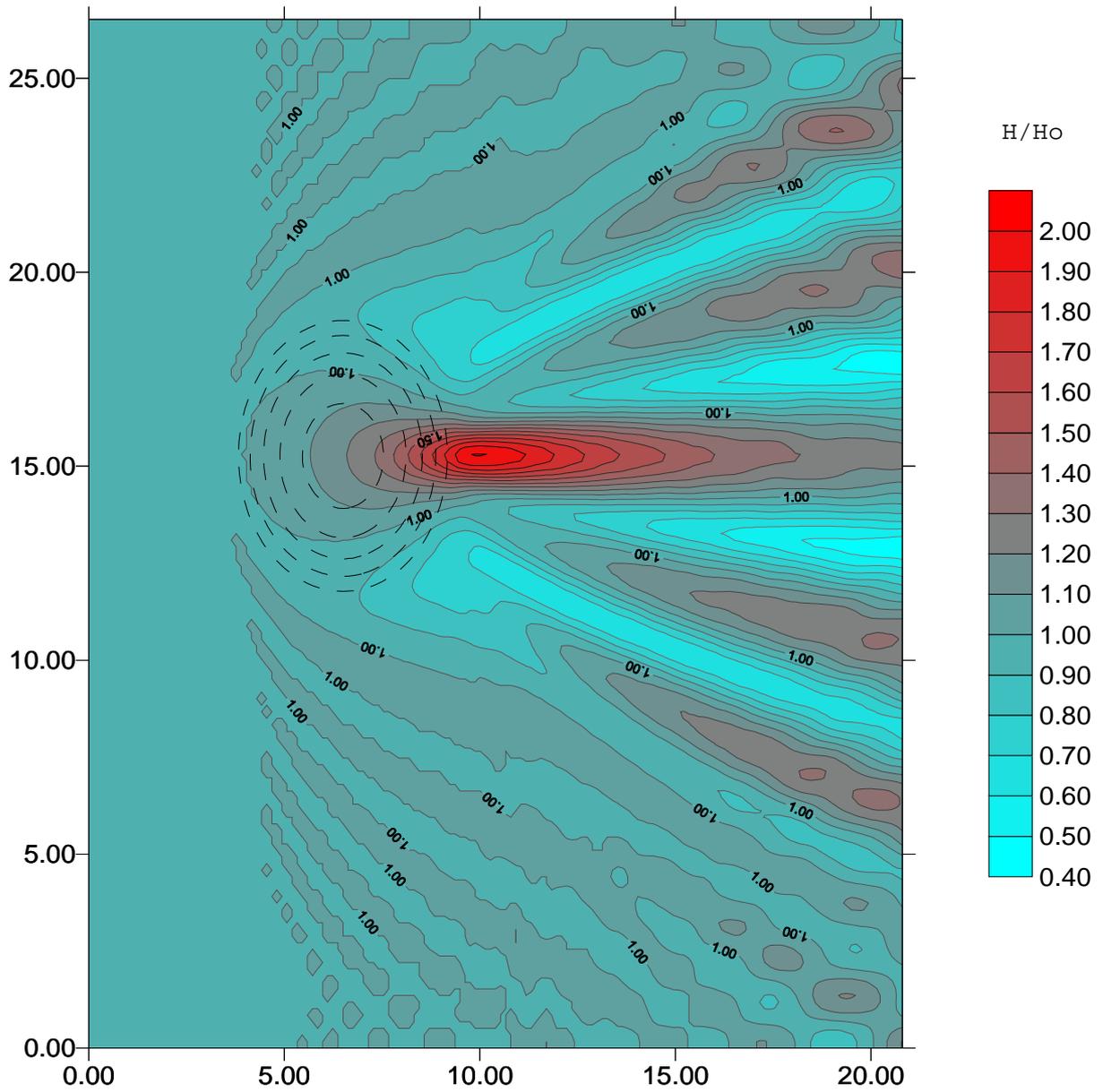


Figura 5 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 30 ondas (espectro de banda estreita) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 6

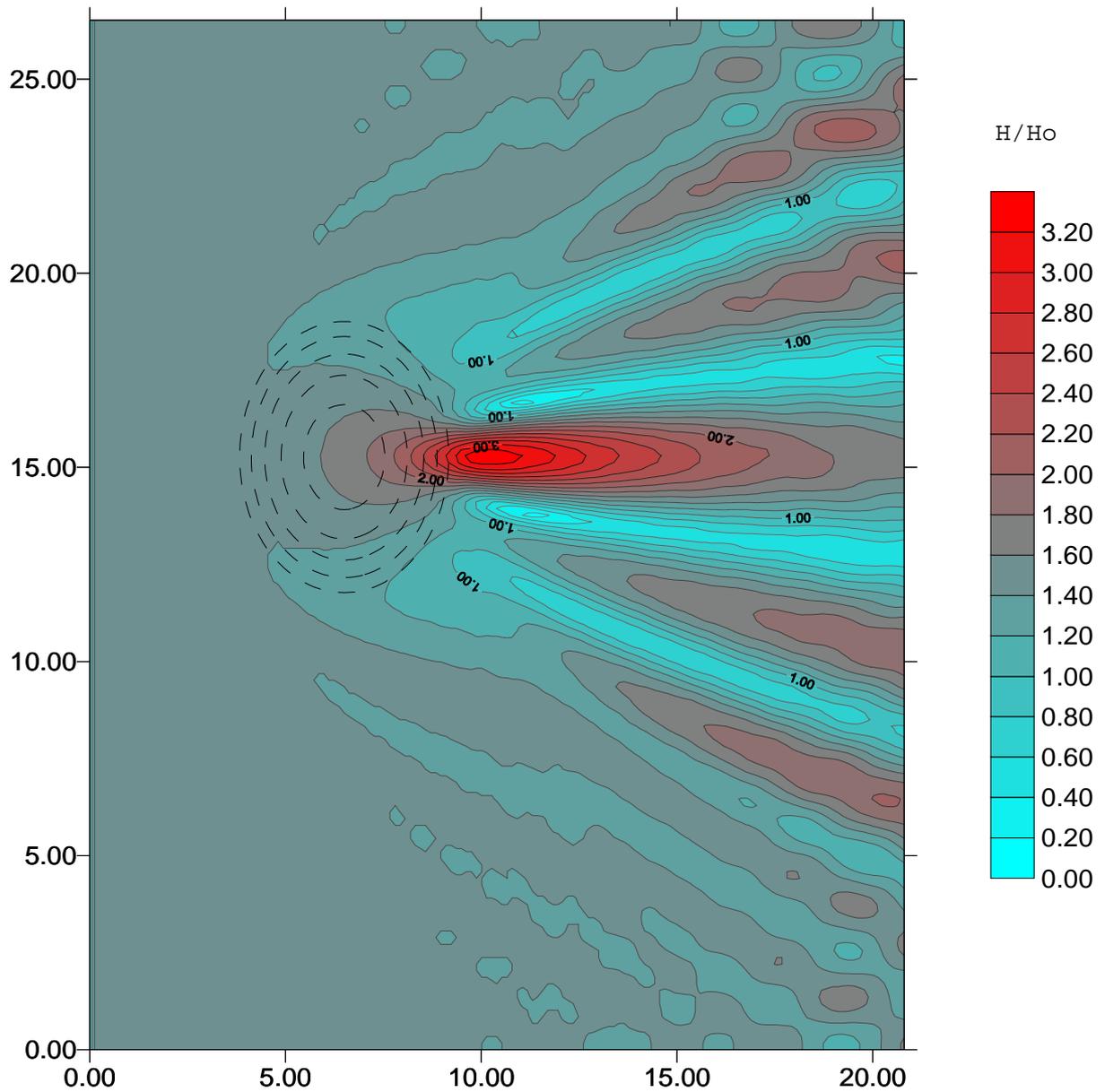


Figura 6 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 1 onda (espectro de banda estreita) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 7

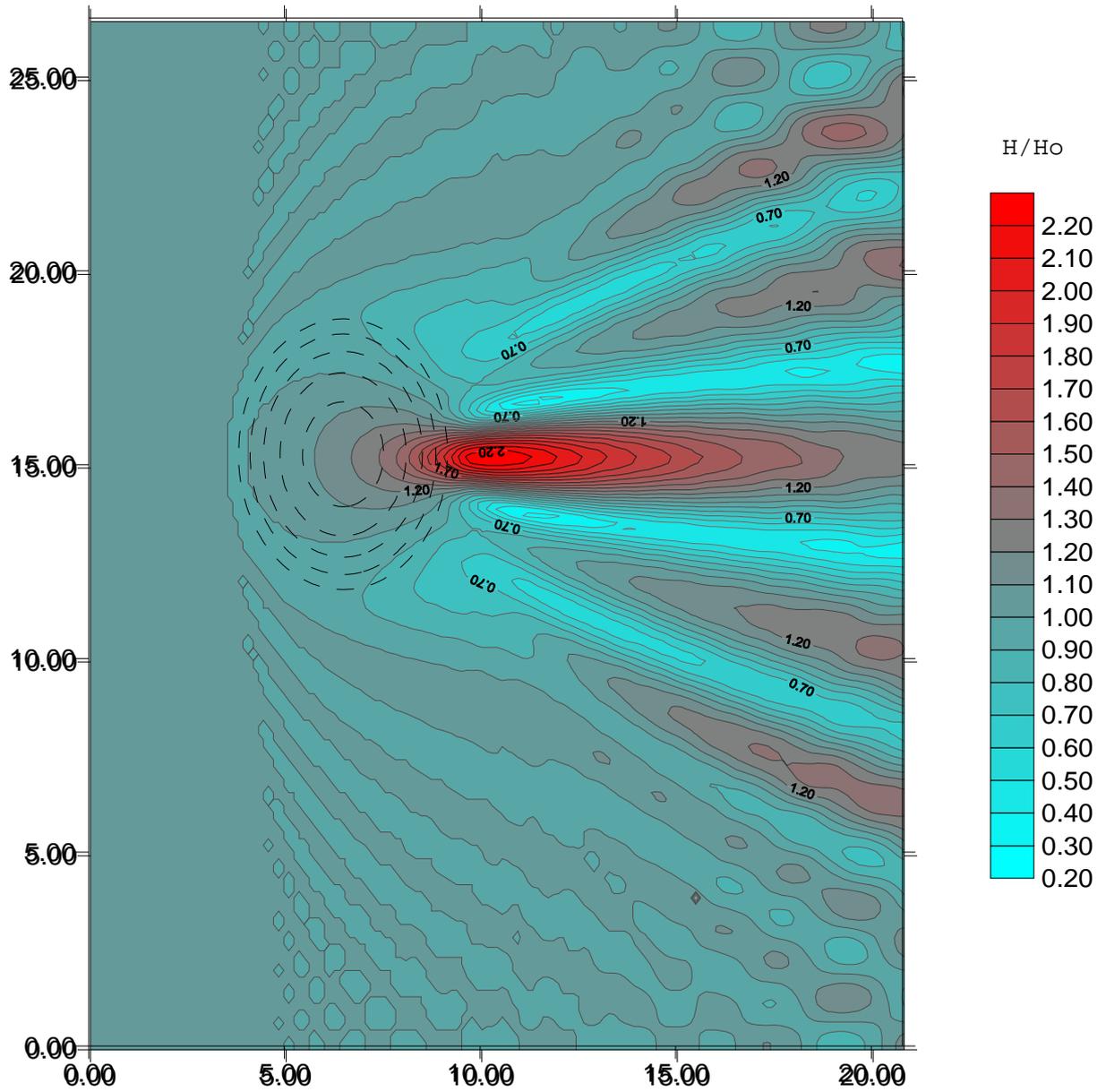


Figura 7 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 6 ondas (espectro de banda estreita) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 8

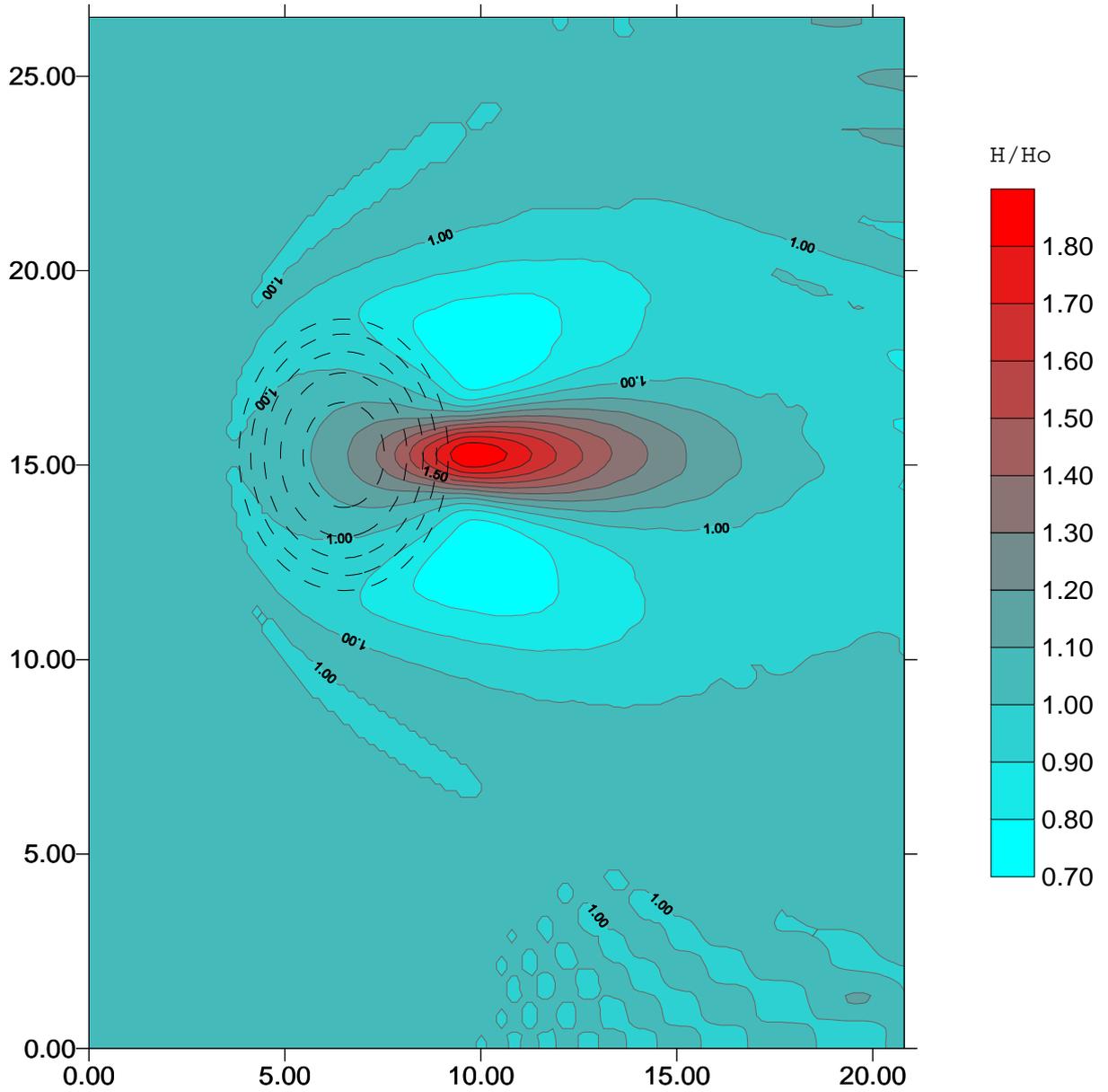


Figura 8 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 66 ondas (espectro de banda estreita) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 9

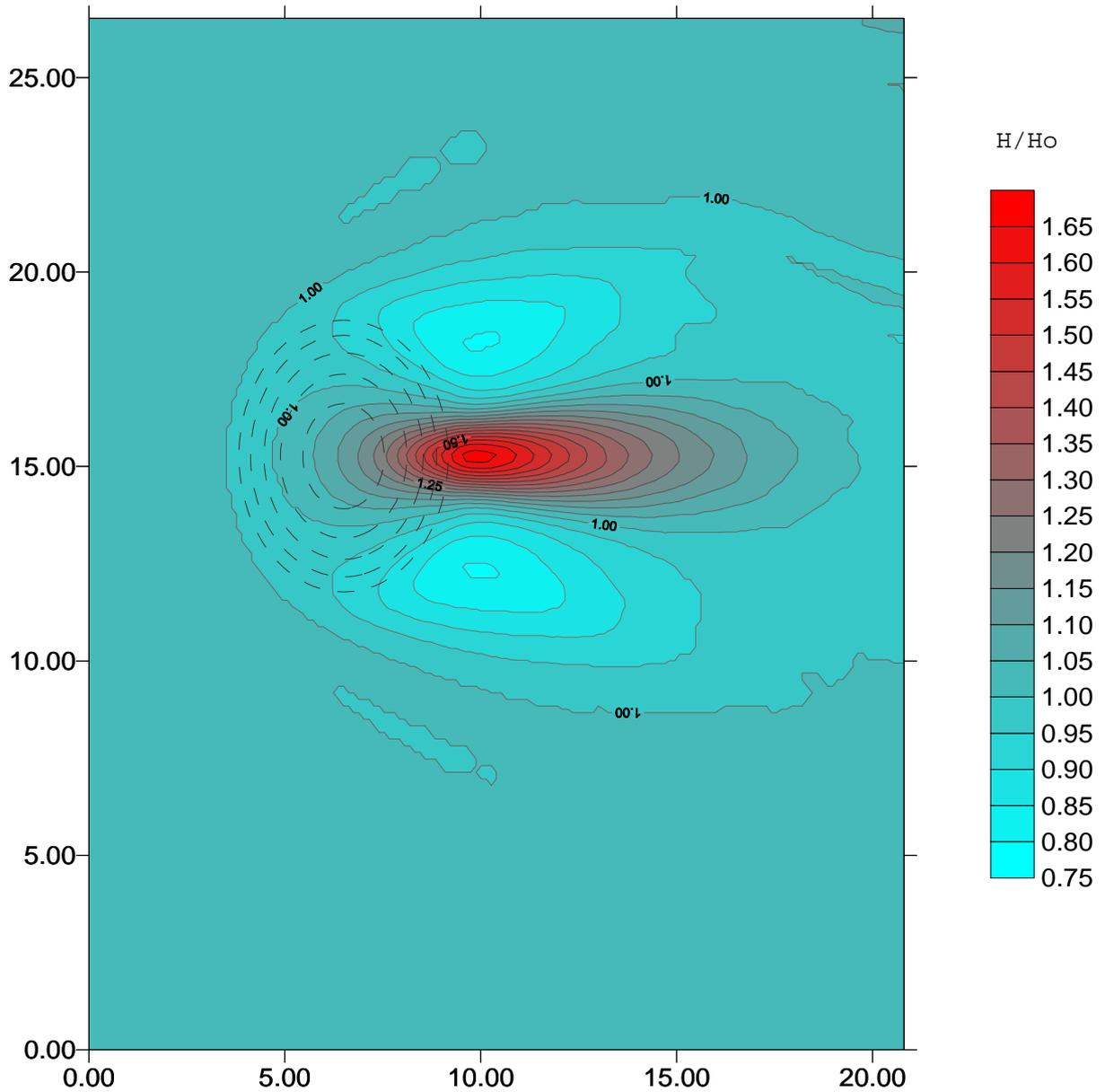


Figura 9 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 340 ondas (espectro de banda larga) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 10

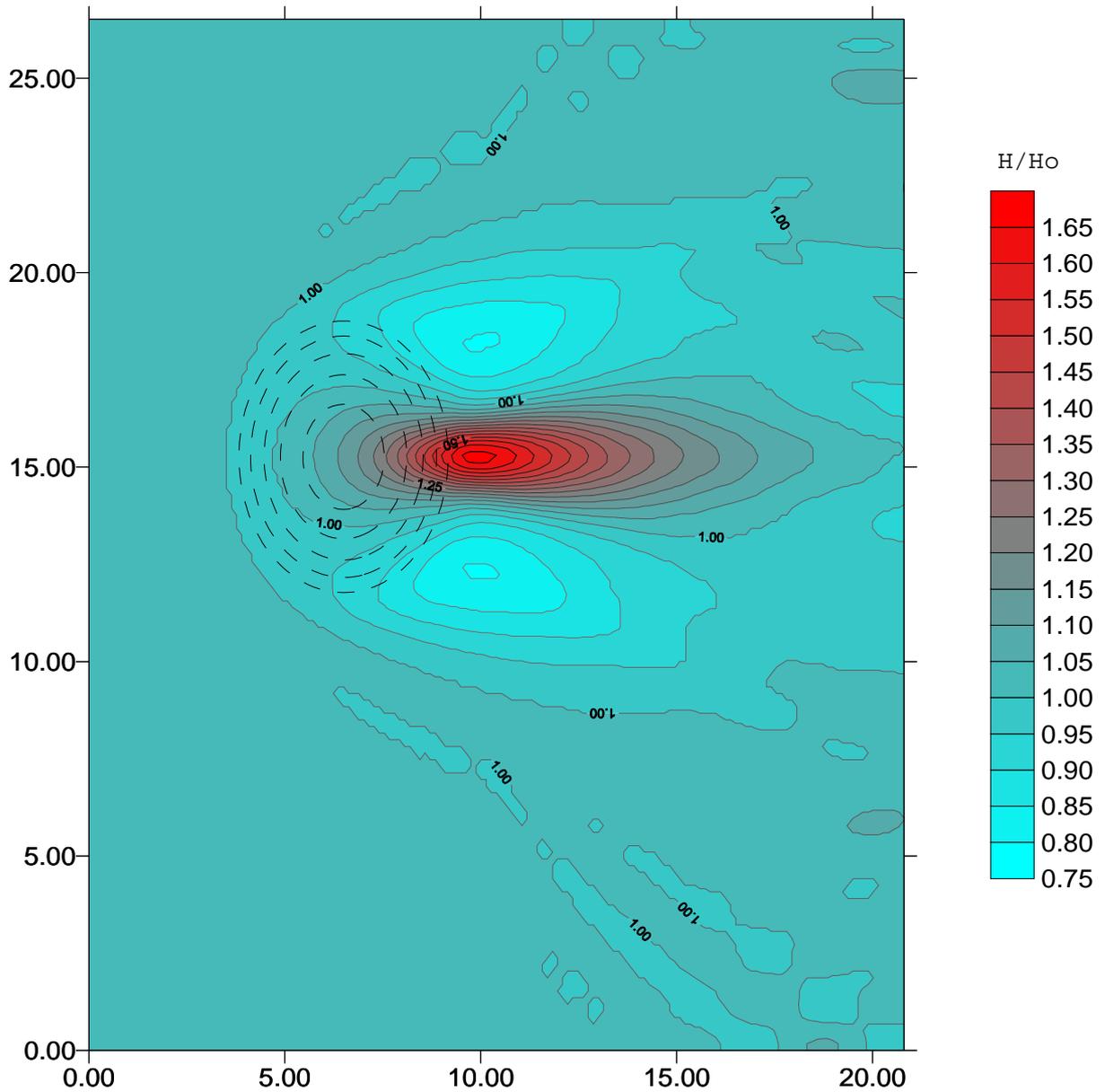


Figura 10 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 260 ondas (espectro de banda larga) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 11

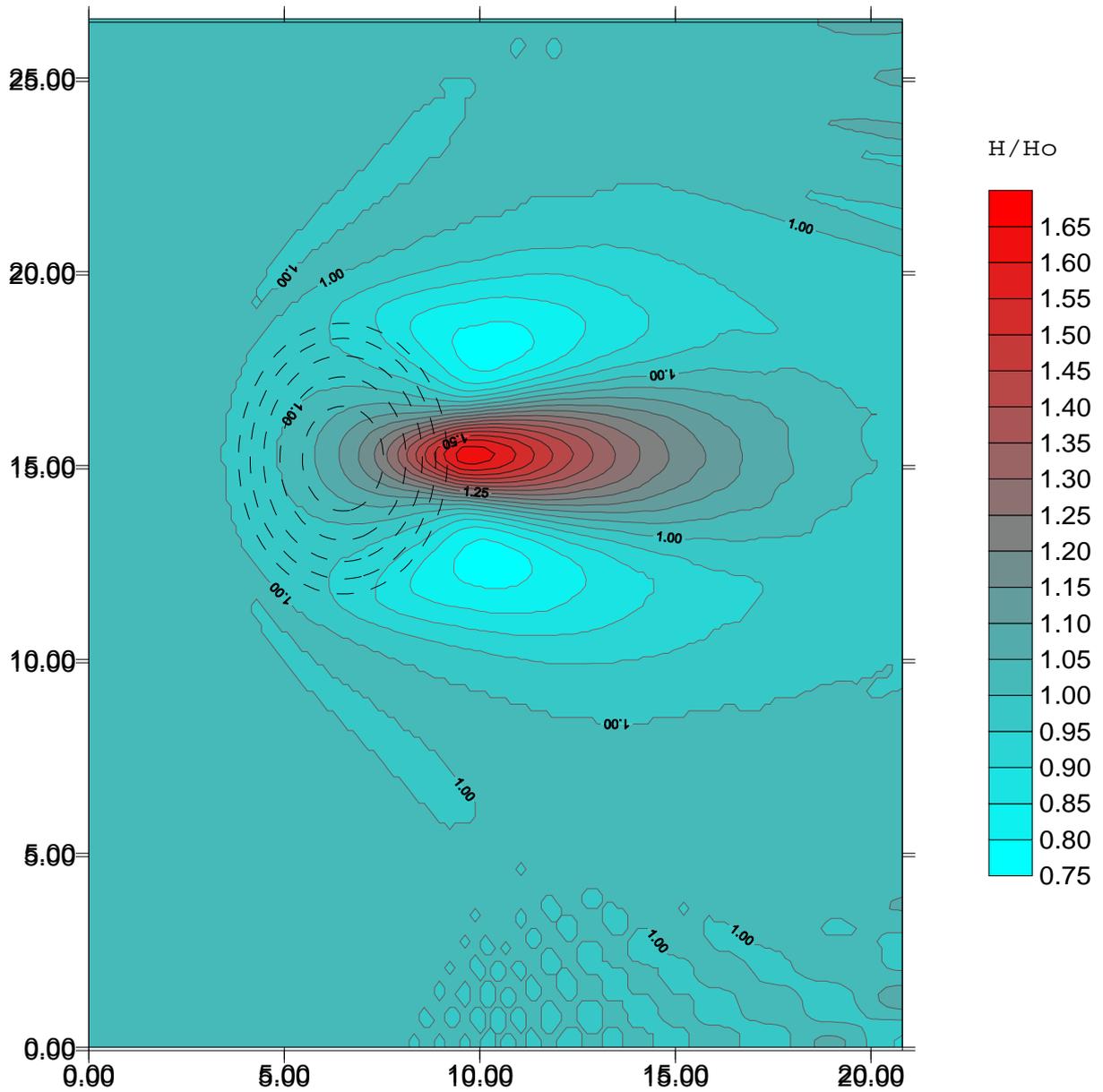


Figura 11 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 171 ondas (espectro de banda larga) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 12

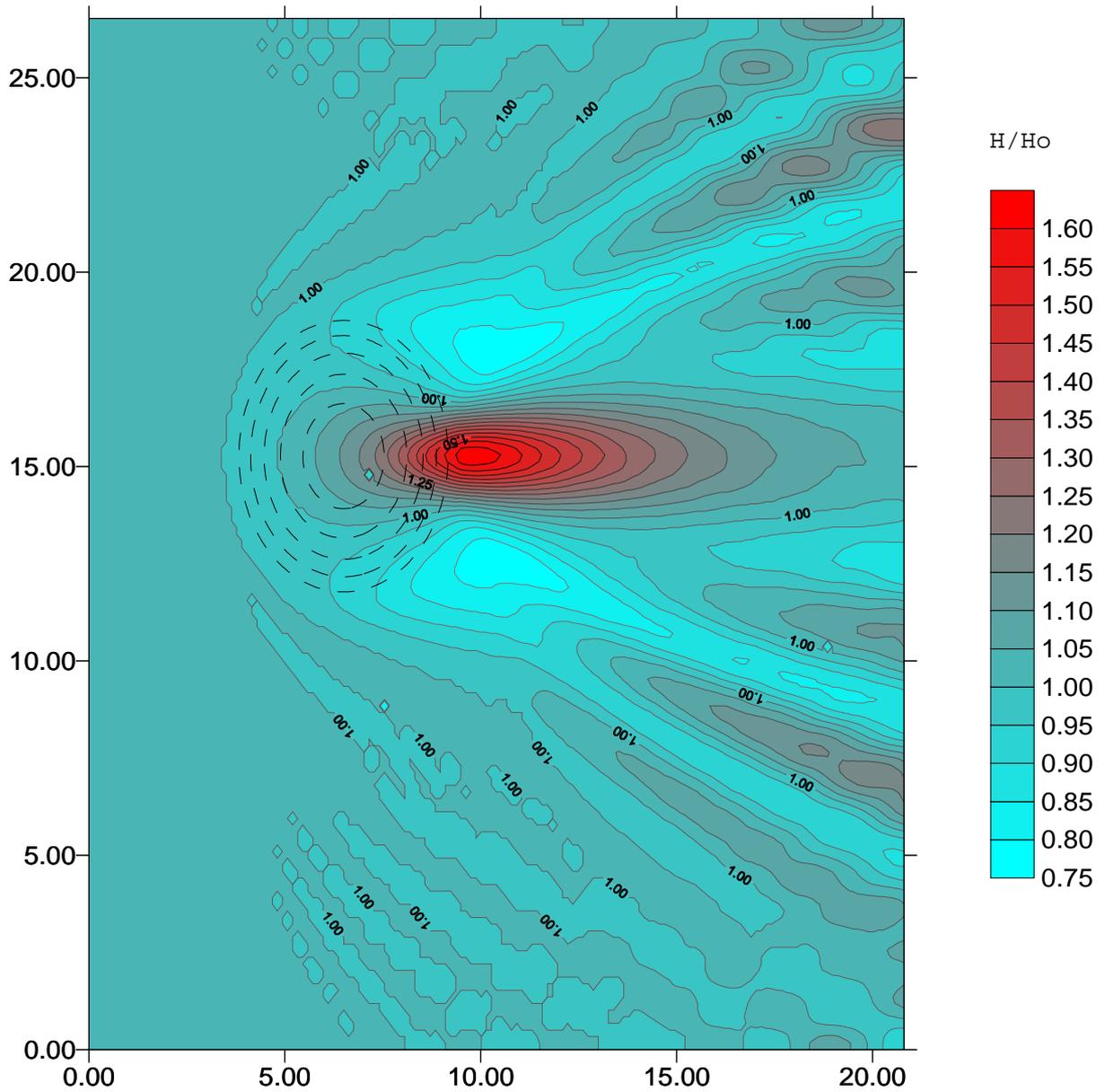


Figura 12 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 81 ondas (espectro de banda larga) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 13

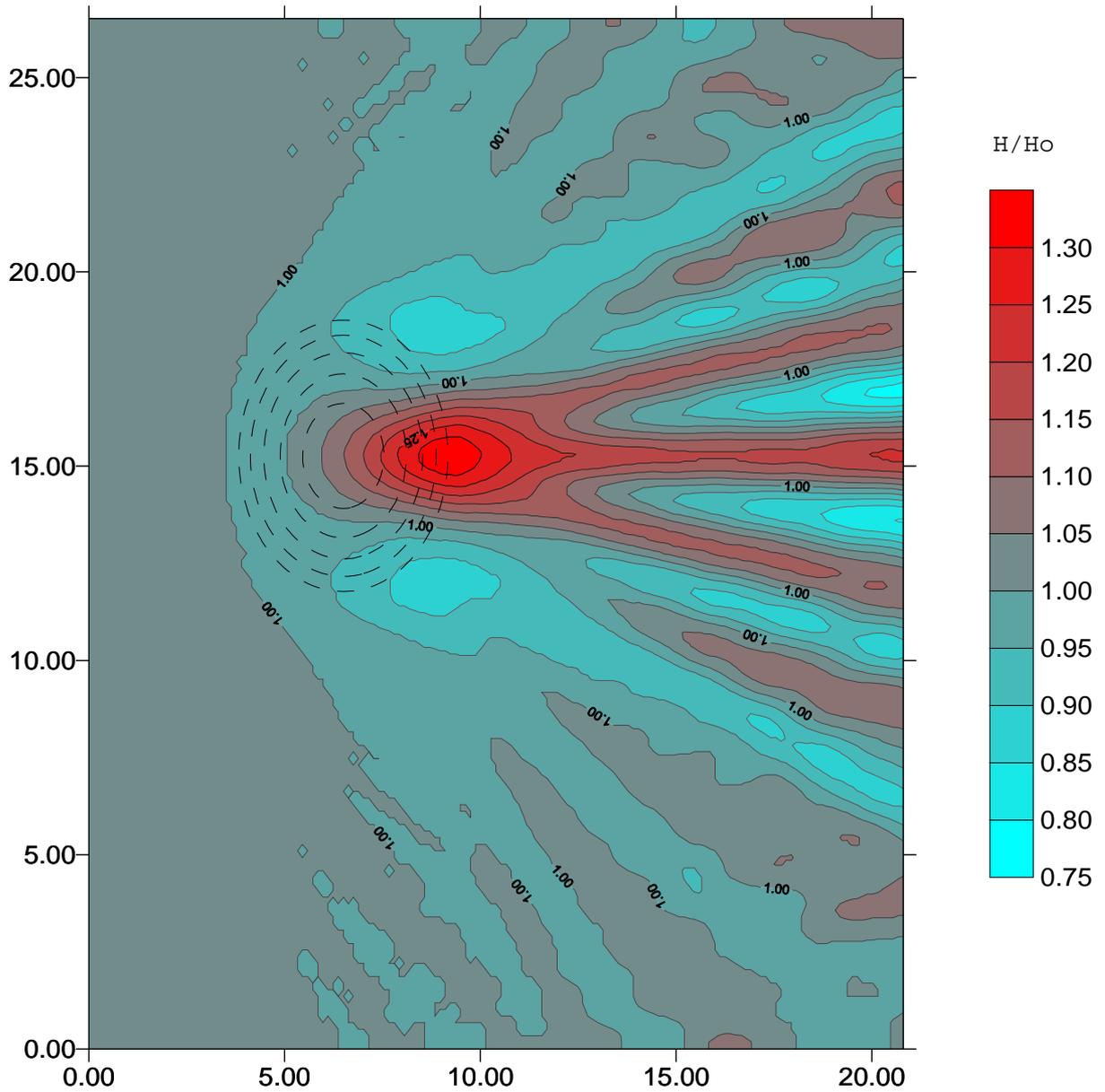


Figura 13 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 40 ondas (espectro de banda larga) sobre uma calota elíptica submersa.

Caso 14

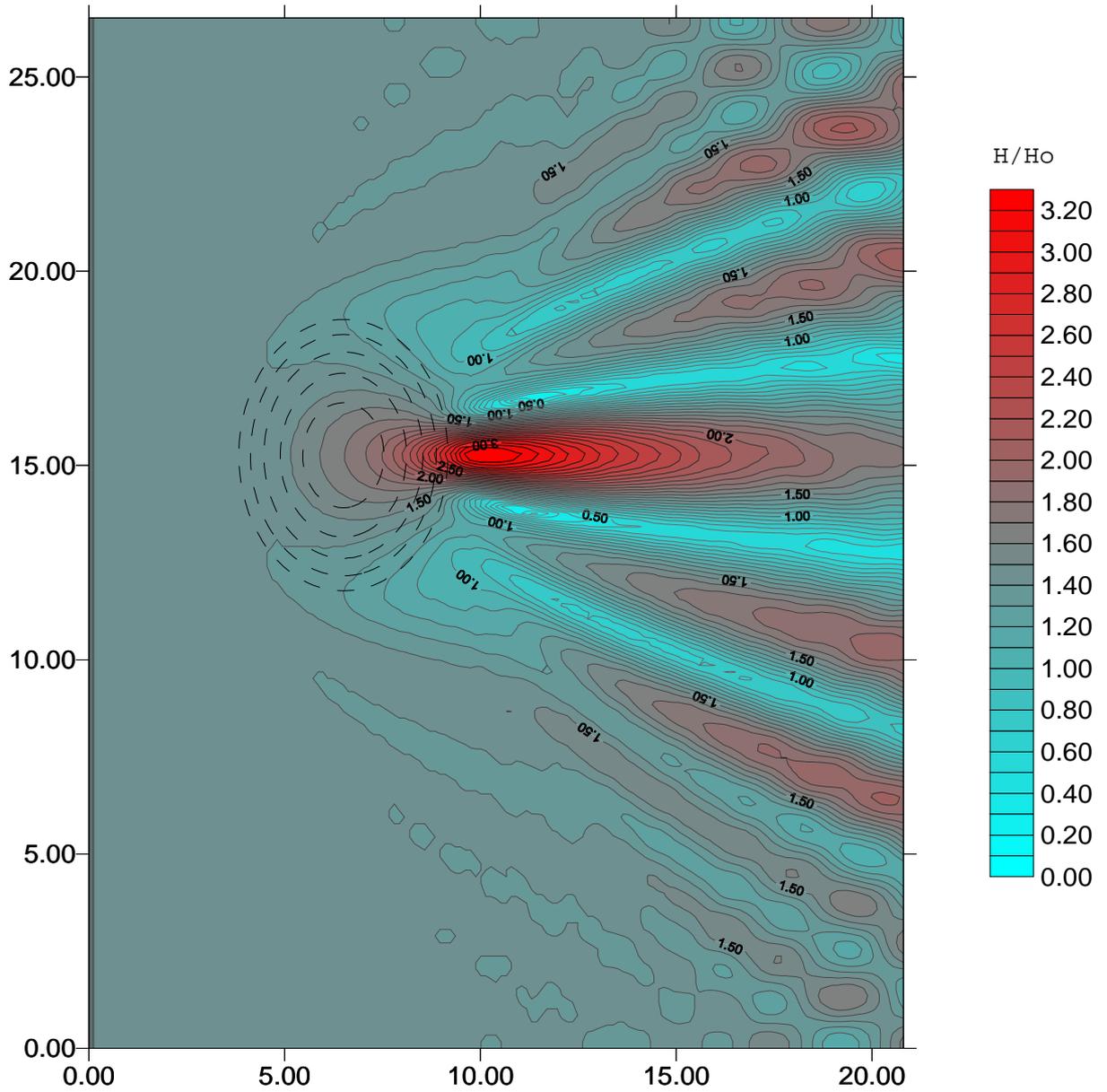


Figura 14 - Gráfico de alturas normalizadas com base na altura de onda significativa no contorno externo (H_0) para o caso da propagação de 1 onda (espectro de banda larga) sobre uma calota elíptica submersa.

APÊNDICE A

Revisão da Teoria Linear

A revisão feita a seguir baseia-se em Dean & Dalrymple (1991). A solução do potencial de velocidades para ondas de pequena amplitude admite que o fundo pode ser representado pela função:

$$F(x,y,z) = z + h(x,y)$$

sendo $h(x,y)$ a profundidade local.

Admitindo-se ser este impermeável e rígido temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde \vec{n} é um vetor unitário perpendicular ao fundo.

A condição de contorno no fundo em função de \emptyset é dada por:

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial z} = -\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \emptyset}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \emptyset}{\partial y} \quad \text{em } z = -h(x,y) \quad (\text{A.2})$$

Na superfície livre, tem-se uma condição de contorno cinemática e uma dinâmica. A condição de contorno cinemática considera que a superfície não é estática, mas variável com o tempo e pode ser representada por:

$$F(x,y,z,t) = z - \eta(x,y,t) = 0$$

onde $\eta(x,y,t)$ representa o deslocamento da superfície livre. Segundo essa condição, para que uma partícula permaneça sempre na superfície deve obedecer à seguinte equação:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{em } z = \eta(x, y, t) \quad (\text{A.3})$$

A condição de contorno dinâmica descreve a distribuição da pressão ao longo da superfície livre, assumindo-a constante, de forma que ela seja uniforme ao longo da forma da onda. Para isso, supõem que o escoamento é invíscido e despreza os efeitos das tensões tangenciais, considerando apenas os efeitos devido ao campo de pressão. Esse campo é obtido a partir da utilização da equação de Bernoulli para escoamentos irrotacionais:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot \nabla \phi \cdot \nabla \phi + gz = C(t) \quad \text{em } z = \eta(x, y, t) \quad (\text{A.4})$$

onde, g é a aceleração da gravidade

p é a pressão na superfície livre

$C(t)$ é uma constante arbitrária.

Uma vez que a pressão na superfície é constante, pode-se admitir que $C(t)$ e p sejam iguais a zero, e a equação (A.4) pode ser rearranjada sob a forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = 0 \quad \text{em } z = \eta(x, y, t)$$

(A.5)

As condições de contorno na superfície (A.3) e (A.5) são linearizadas e aplicadas ao nível de

repouso. Este processo é feito com base na teoria de Airy (1845, *apud* Dean & Dalrymple, 1991) e consiste na eliminação dos termos de segunda ordem e superiores.

As versões linearizadas são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{em } z=0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \cdot \eta \quad \text{em } z=0 \quad (\text{A.7})$$

A solução final para a função potencial de velocidades (Dean & Dalrymple, 1991) é dada por:

$$\phi = \frac{H g}{2 \omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos kx \sin \omega t \quad (\text{A.8})$$

onde, H é a altura da onda

ω é a frequência da onda, dada por $\omega = 2\pi/T$

g é a gravidade, e

k é o número de onda, dado por $k = 2\pi/L$.

APÊNDICE B

Dedução da EDS

Reescrevendo as equações governantes para um fundo plano e horizontal, de acordo com o procedimento descrito em Rego (1992), a partir de $f(z)$, dado pela eq.(3.9) no capítulo 3, obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f = 0 \quad \text{em } h(x,y) < z < 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = -h(x,y) \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \cdot f = 0 \quad \text{em } z = 0 \quad (\text{B.3})$$

A solução do problema para fundo não horizontal (definido pelas equações (3.6), (3.7) e (3.8)) deve considerar agora que as relações (3.9) e (3.10) variam suavemente em x e y ao longo da profundidade $h(x,y)$ que, por sua vez, também será variável. Esta solução é descrita por:

$$\phi(x,y,z,t) = \phi(x,y,z) \cdot e^{-i\omega t} = -\frac{ig}{\omega} \cdot f(z,h) \cdot \phi(x,y) \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{B.4})$$

Sendo a função $f(z,h)$ conhecida, resta obter a solução para a função potencial na dimensão horizontal $\{\phi(x,y)\}$. De acordo com a equação (A.7), dada no apêndice A, essa função está diretamente relacionada com o deslocamento da superfície livre (η) e pode ser aproximada por:

$$\eta(x,y,t) = \text{Re}[\phi(x,y) \cdot e^{-i\omega t}] \quad (\text{B.5})$$

Seguindo o procedimento sugerido por Mei (1983), o problema tridimensional acima deve ser reduzido a um problema bidimensional (x,y). Isto é feito por meio de uma integração entre a superfície livre e o fundo, visando a eliminação dos termos diferenciais relativos à dimensão vertical.

Partindo-se das duas equações governantes (3.6) e (B.1) e igualando-se a equação (3.6), multiplicada por $f(z)$, com a (B.1), multiplicada por ϕ , têm-se:

$$f \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + f \cdot \nabla_h^2 \phi = \phi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f \phi \quad (\text{B.6})$$

Rearranjando a equação acima e integrando-a na vertical no intervalo de $-h < z < 0$:

$$\int_{-h}^0 (f \nabla_h^2 \phi + k^2 f \phi) dz = \int_{-h}^0 \left(\phi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - f \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) dz \quad (\text{B.7})$$

Integrando-se por partes o lado direito desta equação:

$$\int_{-h}^0 \left(\phi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - f \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) dz = \phi \cdot \left(\left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]_0 - \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]_{-h} \right) - f \cdot \left(\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_0 - \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{-h} \right)$$

(B.8)

(I) (II) (III) (IV)

Os termos (I) e (III) se cancelam com base na equação (B.3) e o termo (II) será nulo, de acordo com a equação (B.2). O termo (IV) é, então, obtido a

partir da condição de contorno cinemática, e a eq.(B.7) torna-se:

$$\int_{-h}^0 (f\nabla_h^2\phi + k^2f\phi) dz = -[f\nabla_h h \cdot \nabla_h \phi]_{-h} \quad (\text{B.9})$$

Reescrevendo a eq.(B.4) sob a forma:

$$\phi(x, y, z) = -\frac{ig}{\omega} \cdot f(z, h) \cdot \phi(x, y) \quad (\text{B.10})$$

e desenvolvendo-a matematicamente, dado que:

$$\nabla_h \phi = -\frac{ig}{\omega} \cdot \nabla_h (f\phi) = -\frac{ig}{\omega} \cdot \left(f\nabla_h \phi + \phi \frac{\partial f}{\partial h} \nabla_h h \right) \quad (\text{B.11})$$

obtêm-se:

$$\nabla_h^2 \phi = -\frac{ig}{\omega} \cdot \left(f\nabla_h^2 \phi + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial h} \nabla_h \phi \cdot \nabla_h h + \phi \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \cdot (\nabla_h h)^2 + \phi \frac{\partial f}{\partial h} \cdot \nabla_h^2 h \right) \quad (\text{B.12})$$

Aplicando-se as duas eqs. acima na eq.(B.9), têm-se:

$$\int_{-h}^0 \left\{ \left[\left(f^2 \nabla_h^2 \phi + 2f \frac{\partial f}{\partial h} \nabla_h \phi \cdot \nabla_h h \right) + \phi f \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} (\nabla_h h)^2 + \phi f \frac{\partial f}{\partial h} \nabla_h^2 h + k^2 f^2 \phi \right] \right\} dz =$$

$$= \left\{ -[f^2 \nabla_h h \cdot \nabla_h \phi]_{-h} - \left[\phi \cdot (\nabla_h h)^2 f \frac{\partial f}{\partial h} \right]_{-h} \right\}$$

(B.13)

Os termos entre parênteses no lado esquerdo da equação acima podem ser reescritos como:

$$\int_{-h}^0 \left(f^2 \nabla_h^2 \phi + 2f \frac{\partial f}{\partial h} \nabla_h \phi \cdot \nabla_h h \right) \cdot dz = \int_{-h}^0 \nabla_h \left(f^2 \nabla_h \phi \right) dz \quad (\text{B.14})$$

A resolução da integral descrita por esta equação, aplicando-se a regra de Leibniz resulta em:

$$\int_{-h}^0 \nabla_h (f^2 \nabla_h \phi) \cdot dz = \nabla_h \cdot \int_{-h}^0 f^2 \nabla_h \phi \cdot dz - [f^2 \nabla_h \phi \cdot \nabla_h h]_{-h} \quad (\text{B.15})$$

Substituindo-se a eq.(B.15) em (B.14) e, conseqüentemente, em (B.13) e rearranjando os termos nesta última, têm-se:

$$\begin{aligned} & \nabla_h \int_{-h}^0 f^2 \nabla_h \phi dz + \int_{-h}^0 k^2 f^2 \phi dz = \\ & = \left[\phi (\nabla_h h)^2 f \frac{\partial f}{\partial h} \right]_{-h} - \int \phi f \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} (\nabla_h h)^2 dz - \int_{-h}^0 \phi f \frac{\partial f}{\partial h} \nabla_h^2 h dz \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Lembrando que para fundos não horizontais deve ser respeitada a hipótese de inclinação suave do meio, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\frac{\nabla_h h}{kh} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \nabla_h h \ll \frac{h}{L} \quad (\text{B.17})$$

A partir de uma análise da ordem de grandeza da eq.(B.17), observa-se que os termos do lado direito

são de ordem $\left[\left(\frac{\nabla_h h}{kh} \right)^2 \right] \ll 1$ e podem, portanto, ser

desprezados. A equação apenas com os termos de $O(1)$ é dada por:

$$\nabla_h \int_{-h}^0 f^2 \nabla_h \phi dz + \int_{-h}^0 k^2 f^2 \phi dz = 0 \quad (\text{B.18})$$

As funções ϕ e k , entretanto, não dependem de z e a eq.(B.18) torna-se:

$$\nabla_h \cdot \left[\nabla_h \phi \int_{-h}^0 f^2 dz \right] + k^2 \phi \int_{-h}^0 f^2 dz = 0 \quad (\text{B.19})$$

Integrando a eq.(3.6), obtêm-se:

$$\int_{-h}^0 f^2 dz = gh \frac{\tanh(kh)}{kh} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) = CC_g \quad (\text{B.20})$$

onde, C é a velocidade de fase da onda dada por ω/k e

C_g é a velocidade de grupo para a profundidade local.

O resultado da aplicação da eq.(B.20) em (B.19) é uma equação que descreve completamente o campo do escoamento associado à propagação de ondas superficiais de gravidade nas dimensões horizontais para o caso de fundo com inclinação suave:

$$\nabla_h \cdot (CC_g \nabla_h \phi) + k^2 CC_g \phi = 0 \quad (\text{B.21})$$

Referências Bibliográficas

ALVES, J.H.G.M.. 1996. Refração do Espectro de Ondas Oceânicas em Águas Rasas: Aplicações à região costeira de São Francisco do Sul, S.C. Tese de mestrado, CPGEA/UFSC, Florianópolis.

CANDELLA, R.N.. 1996. Estudo de Casos de Ondas no Atlântico Sul através de Modelagem Numérica. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro. Em preparação.

DEAN, R.G. & DALRYMPLE, R.A.. 1991. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, New Jersey, second edition, 353 pp.

INNOCENTINI, W. & PELLEGGATTI FRANCO, D.M.. 1992. Numerical Experiments of an Ocean Wave Model for South Atlantic. **in:** *Proceedings of 3rd International Workshop on Wave Hindcasting and Forecasting*. Montreal, Canada.

KIRBY, J.T.. 1986. Higher-Order Aproximations in the Parabolic Equation Method for Water Waves. *J. Geophys. Res.*, 91, No. C1, p. 933-952.

KIRBY, J.T. & OZKAN, H.T.. 1994. *Combined Refraction/Difraction Model for Spectral Wave Conditions, Version 1.1.* CACR-94-04, Center for Applied Coastal Research, University of Delaware, 68 pp.

LIU, P.L.-F., YOON, S.B. & DALRYMPLE, R.A.. 1986. Wave reflection from energy dissipation region. *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, 112, No. 6, p. 632-644.

LIU, P.L.-F.. 1986. Parabolic Wave Equation For Surface Water Waves. *Scripps Institution of Oceanography Library, Miscellaneous Paper, CERC-86-11*, 32 pp.

LIU, P.L.-F.. 1990. Wave Transformation. **in:** *Ocean Engineering Science, The Sea*, v. 9, Part A., Wiley Interscience, New York, p. 27-63.

MALISKA, C.R.. 1995. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. Editora Guanabara, Florianópolis, p. 1-39.

MEI, C.C.. 1983. *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. Wiley Interscience, New York, 740 pp.

MELO FILHO, E., ROSMAN, P.C.C. & PARENTE, C.E.. 1991. Solução Conjunta dos Problemas de Erosão na Praia de Ipanema-Leblon e Qualidade de Água na Lagoa Rodrigo de Freitas. *Relatório Coppetec - ET - 170173*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 60 pp.

MUNK, W.H. & ARTHUR, R.S.. 1951. Wave Intensity Along a Refracted Ray. *Scripps Institution of Oceanography Library*, SIO Wave Report No.95, 18 pp.

OPEN UNIVERSITY. 1989. *Waves, Tides and Shallow Water Processes*. Pergamon Press, 187 pp.

PANCHANG, V.G., WEI, G., PEARCE, B.R. & BRIGGS, M.J.. 1990. Numerical Simulation of Irregular Wave

Propagation over a Shoal. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, 116, p. 324-340.

RADDER, A.C.. 1979. On the Parabolic Equation Method for Water Wave Propagation. *J. Fluid Mechanics*, 95, part 1, p. 159-176.

REGO, V.S.. 1992. *Refração-Difração de Ondas Irregulares: Aplicação à Praia de Ipanema - Leblon, RJ*. Dissertação de mestrado submetida à Coordenação de Projetos de Pós-Graduação de Engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro, R.J., 100 pp.

VINCENT, C.L. & BRIGGS, M.J.. 1989. Refraction-Diffraction of Irregular Waves Over A Mound. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, 115, No. 2, p. 269-284.

WROBEL, L.C.. 1989. *Introdução aos métodos numéricos* **in:** *Métodos Numéricos Em Recursos Hídricos*, ABRH, p. 1-83.