

**Universidade de São Paulo  
Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Estruturas**

**Estágio Pós-Doutoral**

**Projeto Ótimo de Estruturas Treliçadas Sujeitas ao Colapso  
Progressivo**

**Aluno: D.Sc Túlio Raunyr Cândido Felipe**

**Orientador: Ph.D André Teófilo Beck**

**São Carlos/SP  
2021**

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

Sistemas estruturais compostos por elementos de treliça são amplamente utilizados em aplicações de engenharia. Esse elemento estrutural permite a rápida montagem de grandes vãos com estruturas leves como observado em sistemas de cobertura, pontes, passarelas de pedestres, torres de transmissão e plataformas *offshore*, por exemplo. Além disso, baixo custo e alta eficiência mecânica tornam as estruturas treliçadas altamente atraentes.

A modelagem mecânica das estruturas treliçadas é desenvolvida com base nos fundamentos da mecânica dos sólidos e assume propriedades dos materiais, ações e condições de contorno conhecidas. Estas premissas conduzem incertezas na resposta da estrutura. Portanto, para uma avaliação robusta do comportamento mecânico das estruturas treliçadas é de fundamental importância a consideração das incertezas.

As incertezas em problemas de engenharia podem ser classificadas em intrínsecas e epistêmicas [1]. As incertezas intrínsecas podem ser quantificadas em termos de probabilidades [1, 2]. A confiabilidade estrutural endereça adequadamente essas incertezas por meio do cálculo da probabilidade de falha. Por outro lado, as incertezas epistêmicas estão relacionadas com fatores não estruturais, tais como: carregamentos imprevisíveis, qualidade de fabricação dos componentes do sistema estrutural, qualidade da mão de obra e erros humanos [3]. Esses fatores podem ser considerados em uma abrangente análise de risco [4].

O projeto ótimo de estruturas considerando incertezas tem sido objeto de várias pesquisas [4–12]. Estas pesquisas vêm empregando o *Reliability-Based Design Optimization* (RBDO) e o *Risk Optimization* (RO) para determinar a configuração ótima dos problemas avaliados. Todavia, faltam publicações na literatura sobre o projeto ótimo de sistemas estruturais com a consideração do colapso progressivo [4]. Ademais, em uma recente revisão bibliográfica não foram encontrados trabalhos que levem em conta a não linearidade geométrica e material, bem como a análise dinâmica não linear na busca do projeto ótimo de estruturas treliçadas. Consequentemente, esta linha de pesquisa é um campo amplamente aberto para novos estudos e publicações. Portanto, o objetivo deste trabalho é determinar o coeficiente de segurança característico ótimo a ser empregado em projetos de estruturas treliçadas sob colapso progressivo, que minimiza o custo esperado total das estruturas projetadas. Para tal, o problema de otimização de risco é acoplado a uma formulação Lagrangeana total em posição para a análise dinâmica não linear de estruturas treliçadas. A análise probabilística do colapso progressivo é realizada por meio da simulação de Monte Carlo no decorrer da busca pela configuração ótima, enquanto o problema de otimização é avaliado mediante o algoritmo *Golden Section*.

## 1.2 Uma Formulação Lagrangeana Total para a Análise Dinâmica não Linear de Estruturas Treliçadas Sujeitas ao Colapso Progressivo

O colapso progressivo ocorre quando as estruturas não conseguem dissipar totalmente a energia cinética após a ocorrência de danos acidentais [13–15]. Entre os complexos mecanismos de dissipação de energia, existe o trabalho plástico dos elementos e o amortecimento estrutural [16]. A resposta das estruturas no início ou durante o colapso progressivo é altamente não-linear [17, 18]. Portanto, a não linearidade geométrica e material precisam ser consideradas na análise dinâmica do colapso progressivo.

Nesta pesquisa, emprega-se o modelo mecânico desenvolvido pelo autor durante sua pesquisa de doutorado. Esse modelo é resumido brevemente nesta seção. Detalhes teóricos e de implementação

são fornecidos em [19]. Ademais, esse modelo mecânico está implementado no programa computacional *Mechanical and Probabilistic Analysis of Truss Structures* (MecTruss) desenvolvido por [19].

O modelo emprega a medida de deformação logarítmica ( $\epsilon_{ln}$ ), que é decomposta em uma parte elástica ( $\epsilon_{ln}^e$ ) e plástica ( $\epsilon_{ln}^p$ ). O modelo assume: desacoplamento entre elasticidade-dano e encruamento para escrever a energia livre de Helmholtz ( $\Psi$ ) [20]; critério de plastificação de von Mises e encruamento isotrópico multilinear [21] e variação da porosidade na mesoescala igual à componente hidrostático da deformação plástica [22]. Ademais, a energia mecânica total do sistema ( $\Pi$ ) é escrita em termos de posições nodais, em vez de deslocamentos nodais como a formulação clássica de elementos finitos, sendo dada por [19]:

$$\Pi(\mathbf{Z}) = \mathbb{U} + \mathbb{K} + \mathbb{Q} + \mathbb{P} = \int_{V_0} \Psi[\epsilon_{ln}(\mathbf{Z}), D, \mathfrak{w}] dV_0 + \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\mathbf{Z}} dV_0 + \oint_{\gamma} \mathbf{F}^{(am)} d\mathbf{Z} - \mathbf{F}^{(ex)} \cdot \mathbf{Z} \quad (1)$$

onde  $\mathbb{U}$  é a energia de deformação,  $\mathbb{K}$  é a energia cinética,  $\mathbb{Q}$  é a energia total dissipada,  $\mathbb{P}$  é o potencial das forças externas aplicadas,  $\mathbf{Z}$  é o vetor com as posições nodais na configuração atual,  $D$  é a variável de dano,  $\mathfrak{w}$  é a variável interna de encruamento,  $V_0$  é o volume inicial,  $\rho_0$  é a massa específica associada a configuração inicial,  $\dot{\mathbf{Z}}$  é o vetor com as velocidades nodais na configuração atual,  $F^{(am)}$  é a força de amortecimento e  $F^{(ex)}$  é a força externa aplicada.

A Equação 1 acopla a não linearidade geométrica à não linearidade do material. A análise não linear geométrica é contemplada pela descrição Lagrangeana Total da mudança de configuração do elemento de treliça por meio do mapeamento posicional. Já a análise não linear do material é considerada pelo acoplamento da mecânica do dano a plasticidade mediante o modelo de dano dúctil FLHB<sup>1</sup>. Este modelo representa com boa precisão o escoamento, encruamento, amolecimento e falha do material. Tal modelo foi utilizado para avaliar com excelente acurácia os resultados experimentais dos seguintes materiais: aço doce, aço ASTM A36, alumínio, cobre, concreto convencional, ferro, madeira de espécie *Simarouba amara* e *Ultra-High Performance Fiber-Reinforced Concrete* [21, 23].

### 1.3 Análise de Confiabilidade do Colapso Progressivo

As incertezas são intrínsecas ao evento do colapso progressivo. Os danos acidentais que podem desencadear um evento de colapso são caracterizadas por uma baixa probabilidade de ocorrência, intensidades grandes, aleatoriedade e consequências extremas [24–26]. Portanto, é natural usar a teoria da confiabilidade para avaliar o colapso progressivo das estruturas.

As formulações probabilísticas disponíveis na literatura abordam os riscos, os cenários de carregamento e suas probabilidades [11, 26, 27]. No entanto, a maioria das formulações que abordam a mecânica da transferência de carga à medida que os danos estruturais progridem são determinísticas [18, 28, 29]. Formulações que abordam a confiabilidade de estruturas em cenários de falha progressiva são raras [11, 27, 30–32].

A análise probabilística do colapso progressivo pode ser realizada pela avaliação da seguinte expressão [4]:

$$P_{colapso} = P[\mathbf{X} \in \Omega_f] = \int_{\cup_k \cap_{i \in C_k} g_i(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

onde  $P_{colapso}$  é a probabilidade de falha ao colapso progressivo,  $P[\cdot]$  é o operador probabilidade,  $\Omega_f$  é o domínio de falha do sistema,  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  é a função conjunta de densidade de probabilidade,  $g(\mathbf{X})$  é a equação de estado limite e  $\mathbf{X}$  é o vetor com as variáveis aleatórias do problema. O vetor  $\mathbf{X}$  além dos parâmetros de geometria, resistência e carregamentos contempla o dano acidental (explosões, impactos,

<sup>1</sup>Este modelo é referido usando as iniciais dos quatro autores: o modelo Felipe-Leonel-Haach-Beck (FLHB) [21].

ataques terroristas, ações excepcionais, erros humanos e de construção, etc.), que acarreta o evento do colapso progressivo.

Devido a mudança de configuração da estrutura, bem como a alta não linearidade do comportamento do material em decorrência de um colapso, as equações de estado limite do problema devem ser escritas em termos de variáveis internas do modelo mecânico, como por exemplo, o dano de cada elemento estrutural. Dessa forma, a avaliação da Equação 2 é geralmente realizada empregando a Simulação de Monte Carlo (SMC), usando a simulação por subconjunto [30, 32] ou amostragem por hipercubo latino [31]. Como a formulação apresentada na seção 1.2 é rápida e eficiente para análise não linear de estruturas treliçadas, a SMC bruto (sem técnicas de amostragem inteligente), pode ser adotada para realizar a avaliação probabilística do colapso progressivo [33]. Portanto, neste trabalho a avaliação da Equação 2 será por meio do SMC bruto, visto que esta estratégia já está implementada e acoplada ao modelo mecânico no programa computacional MecTruss.

## 1.4 Otimização de Risco

Segundo [2], as principais formulações empregadas para realizar o projeto ótimo de estruturas são: *Deterministic Design Optimization* (DDO), *Reliability-Based Design Optimization* (RBDO) e *Risk Optimization* (RO). A DDO aborda o projeto ótimo do ponto de vista econômico, porém não avalia a probabilidade de falha da estrutura analisada [2]. A RBDO permite impor ao problema restrições em termos de probabilidades de falha alvo, mas não considera os custos esperados de falha [4]. Por fim, a RO inclui os custos esperados de falha no balanço econômico, por conseguinte, endereça diretamente o compromisso entre economia e segurança [4]. Essa abordagem é complementar a DDO e RBDO, uma vez que o projeto com menor custo também é o mais eficiente do ponto de vista mecânico e da segurança [34]. Neste sentido, como a RO é a formulação mais geral para determinar a configuração ótima dos projetos de estruturas [2], essa será a abordagem empregada neste trabalho.

A literatura apresenta várias expressões para o custo esperado total ( $C_{ET}$ ) de um sistema estrutural [1, 2, 35, 36]. Segundo [2], o  $C_{ET}$  pode ser decomposto em custo inicial ou de construção ( $C_{IN}$ ), custo de operação ( $C_{OP}$ ), custo de inspeções e manutenção ( $C_{IM}$ ), custo de descarte ( $C_{DE}$ ) e custo esperado de falha ( $C_{EF}$ ). Nesta pesquisa, o  $C_{ET}$ , função objetivo do problema de otimização, será escrito em termos do  $C_{IN}$  e  $C_{EF}$ .

O  $C_{EF}$  é definido pelo produto direto do custo de falha ( $C_f$ ) pela probabilidade de falha ( $P_f$ ), conforme a Equação 3 [1].

$$C_{EF} = C_f \cdot P_f \quad (3)$$

A Equação 3 inclui custos de reparo ou de substituição de elementos danificados, custo de reconstrução, custo de indenizações, dentre outros [34]. Dessa forma, para cada modo de falha ( $m_f$ ) de um sistema estrutural a Equação 3 deve ser avaliada. O  $C_{ET}$  desse sistema estrutural pode ser decomposto na seguinte expressão:

$$C_{ET}(\lambda_k, \mathbf{X}) = C_{IN}(\lambda_k) + \sum_{i=1}^{m_f} C_f^i(\lambda_k) \cdot P_f^i(\lambda_k, \mathbf{X}) \quad (4)$$

onde  $\lambda_k$  é o coeficiente de segurança característico ótimo e  $\mathbf{X}$  é o vetor com as variáveis aleatórias do problema.

A minimização da Equação 4 da origem ao problema de RO, conforme a expressão abaixo:

$$\lambda_k^* = \arg \min [C_{ET}(\lambda_k, \mathbf{X}) | \lambda_k \in \mathcal{D}] \quad (5)$$

onde  $\lambda_k^*$  é o coeficiente de segurança característico ótimo do ponto de projeto e  $\mathcal{D} = \{\lambda_{k,mim} \leq \lambda_k \leq \lambda_{k,max}\}$  é o domínio das restrições laterais.

Em suma, o nível de segurança ideal para um sistema estrutural é verificado quando o  $C_{ET}$  atinge um valor mínimo.

## 2 Resultados

Nesta seção são apresentados os resultados do presente trabalho. Inicialmente, para validar a metodologia proposta dois exemplos são comparados com os resultados disponíveis na literatura. Em seguida, o projeto ótimo da treliça de von Mises é exibido. Posteriormente, o projeto ótimo de uma estrutura treliçada é apresentado. Para a resolução do problema de confiabilidade, as análises são realizadas via simulação de Monte Carlo com  $10^5$  amostras. Já o problema de otimização é resolvido por meio do algoritmo *Golden Section* com critério de convergência  $\zeta = 10^{-3}$  e comprimento do passo inicial  $\phi = 0,025$ . Além disso, no modelo mecânico o processo iterativo ocorre até a tolerância ( $tol$ ) ser menor ou igual que  $10^{-6}$ , conforme expressão a seguir:

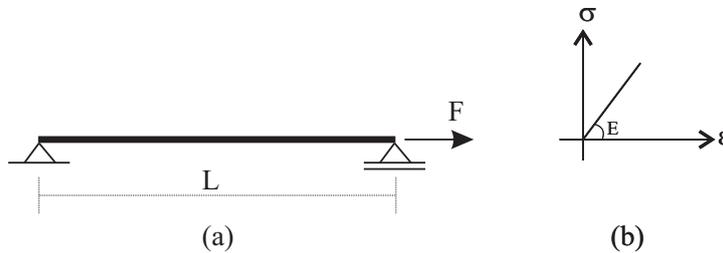
$$\frac{\|\Delta\mathbf{Z}\|}{\|\mathbf{Y}\|} \leq tol \quad (6)$$

onde  $\Delta\mathbf{Z}$  é o vetor de correções das posições nodais no instante considerado obtido pelo método de Newton-Raphson,  $\mathbf{Y}$  é o vetor com as posições nodais na configuração inicial e  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana.

### 2.1 Barra sujeita à tração

A Figura 1-(a) apresenta a estrutura em análise. A barra tem comprimento  $L = 500 \text{ cm}$  e está sujeita a uma força  $F = 55 \text{ kN}$ . A relação constitutiva do material é assumida elástica linear, conforme ilustrado na Figura 1-(b). As constantes do material são o módulo de elasticidade  $E = 200 \text{ GPa}$  e a tensão de escoamento  $\sigma_y = 120 \text{ MPa}$ . O projeto de referência é determinado utilizando os valores médios das variáveis aleatórias, o coeficiente de segurança característico  $\lambda_k = 1$  e os coeficientes parciais  $\phi_k = 0,92$  e  $\gamma_k = 1,20$ . Considerando o modo de falha de escoamento da barra, tem-se que a área de referência  $A_r = 5,98 \text{ cm}^2$ . A Tabela 1 apresenta as estatísticas desse problema, em conformidade com [34].

Figura 1: (a) geometria e (b) relação constitutiva.



Na busca pelo projeto ótimo da barra, a área da seção transversal é determinada pela Equação 7.

$$A = \lambda_k \cdot A_r \quad (7)$$

Portanto, um acréscimo do  $\lambda_k$  conduz a um aumento na área da seção transversal da barra. Por conseguinte, um aumento da resistência dessa barra ao esforço solicitante. Logo, a equação de estado limite utilizada no problema de confiabilidade fica dada por:

Tabela 1: Variáveis aleatórias do problema da barra sob tração.

variável	média	cov	distribuição	unidade	referência
$F$	55,0	0,20	normal	$kN$	[34]
$\sigma_y$	12,0	0,05	lognormal	$kN/cm^2$	[34]
$A_r$	5,98	0,02	lognormal	$cm^2$	[34]

$$g(\lambda_k, \mathbf{X}) = \lambda_k \cdot A_r \cdot \sigma_y - N_{bar}(\lambda_k, \mathbf{X}) \quad (8)$$

onde  $N_{bar}(\lambda_k, \mathbf{X})$  é a força normal na barra obtida pelo modelo numérico que é função do  $\lambda_k$  e do vetor de variáveis aleatórias  $\mathbf{X}$ .

O custo inicial ( $C_{IN}$ ) é representado pelo custo do material. Assumindo um custo de 2 R\$/kg para o aço estrutural com densidade de  $7850 \text{ kg}/m^3$ , tem-se:

$$C_{IN} = massa \cdot \alpha = \rho \cdot volume \cdot \alpha = \rho \cdot \lambda_k \cdot A_r \cdot L \cdot \alpha = 7,85 \cdot \lambda_k \cdot A_r \quad (9)$$

sendo  $\alpha = 2 \text{ R}/\text{kg}$ ,  $L = 500 \text{ cm}$  e  $\rho = 7850 \text{ kg}/m^3$ .

O custo de falha ( $C_f$ ) é considerado proporcional ao custo inicial, sendo dado por:

$$C_f = \xi \cdot C_{IN} \quad (10)$$

onde  $\xi$  é o fator de proporcionalidade que leva em conta as classes de consequência, conforme [37]. Logo, o custo esperado total ( $C_{ET}$ ) fica expresso pela Equação 11.

$$C_{ET} = C_{IN} + C_f \cdot P[g(\lambda_k, \mathbf{X}) \leq 0] \quad (11)$$

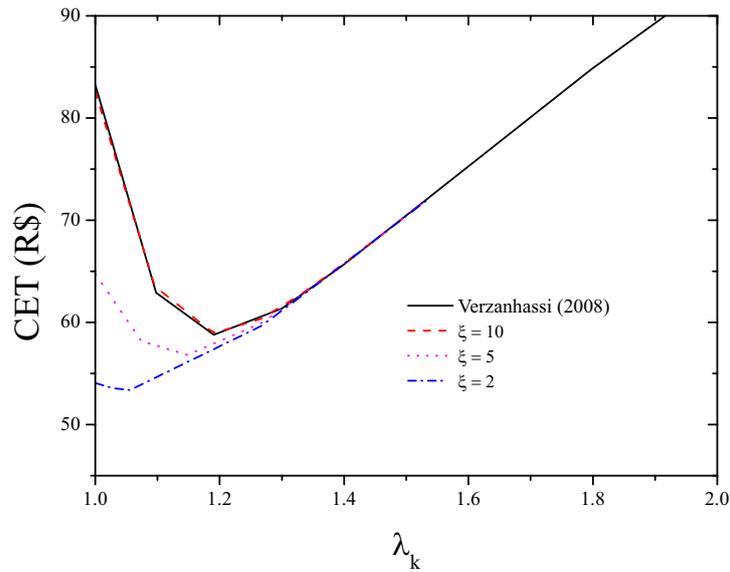
A Figura 2 apresenta o custo esperado total em função do coeficiente de segurança característico. Nota-se a boa acurácia da metodologia proposta em comparação ao resultado alcançado por [34], em que este autor utilizou o algoritmo de otimização Interpolação Quadrática acoplado ao método de confiabilidade de primeira ordem (*First Order Reliability Method*). O referido autor obteve com  $\xi = 10$  o coeficiente de segurança característico ótimo  $\lambda_k^* = 1,1908$ , enquanto que a metodologia proposta resultou em  $\lambda_k^* = 1,1903$ . Esta pequena diferença ocorreu porque [34] usou uma equação de estado limite analítica mediante a análise linear elástica, enquanto aqui a resposta é obtida via modelo mecânico por meio de uma análise não linear. Como o nível de deformação da barra é pequeno as respostas tornam-se aproximadamente iguais.

A Tabela 2 resume os resultados obtidos para diferentes classes de consequência. Observa-se que o  $\lambda_k^*$  aumenta em 8,72% e 12,73% para  $\xi = 5$  e  $\xi = 10$ , respectivamente, em comparação a  $\xi = 2$ .

Tabela 2: Valores de  $\lambda_k^*$  e  $C_{ET}$  para diferentes classes de consequência.

Classe de consequência	$\xi$	$\lambda_k^*$	$C_{ET}$ (R\$)
1	2	1,0560	53,3860
2	5	1,1482	56,8282
3	10	1,1903	58,9295

Figura 2: CET versus  $\lambda_k$  para o problema de barra tracionada.



## 2.2 Barra sujeita à compressão

Uma barra de seção tubular está submetida a uma força  $F$ , conforme ilustrado na Figura 3-(a). A Figura 3-(b) apresenta a relação constitutiva do material. A Tabela 3 apresenta as variáveis aleatórias do problema, enquanto a Tabela 4 mostra as variáveis determinísticas. O projeto de referência é determinado utilizando os valores médios das variáveis aleatórias (Tabela 3), o coeficiente de segurança característico  $\lambda_k = 1$  e os coeficientes parciais  $\phi_k = 0,92$  e  $\gamma_k = 1,20$ . Por conseguinte, para o modo de falha de escoamento da barra, obtém-se a área de referência  $A_r = 0,02 \text{ m}^2$ . Fixando  $d = 1,0 \text{ m}$ , tem-se  $t = 6,4 \text{ mm}$ , conforme apresentado na Tabela 4.

Figura 3: (a) geometria e (b) relação constitutiva.

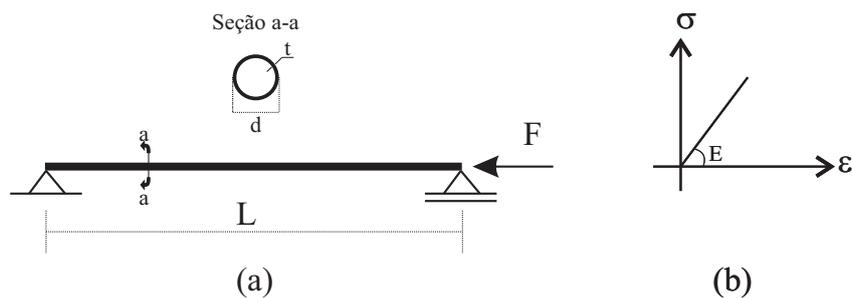


Tabela 3: Variáveis aleatórias do problema da barra sob compressão.

variável	média	cov	distribuição	unidade	referência
$F$	10000,00	0,20	normal	$kN$	[34]
$\sigma_y$	65,00	0,05	lognormal	$kN/cm^2$	[34]
$E$	21000,00	0,05	lognormal	$kN/cm^2$	[34]
$k_d$	0,54	0,16	normal	-	[34]

Tabela 4: Variáveis determinísticas do problema da barra sob compressão.

variável	valor	unidade	referência
$t$	6,4	$mm$	[34]
$d$	1,0	$m$	[34]
$L$	25,0	$m$	[34]
$\nu$	0,3	-	[34]

Para a análise a seguir, duas equações de estado limite são consideradas. A primeira, trata-se do modo de falha escoamento do material (Equação 12). Já a segunda, leva em conta a instabilidade local da parede da seção tubular (Equação 13), conforme escrita abaixo:

$$g_1(\lambda_k, \mathbf{X}) = \lambda_k \cdot A_r \cdot \sigma_y - |N_{bar}(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (12)$$

$$g_2(\lambda_k, \mathbf{X}) = \lambda_k \cdot A_r \cdot \sigma_{lb} - |N_{bar}(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (13)$$

onde  $|\cdot|$  é o operador valor absoluto e  $\sigma_{lb}$  é a tensão que leva em conta a instabilidade local da barra, sendo determinada pela seguinte expressão:

$$\sigma_{lb} = \left(1,5 - \frac{\lambda_b}{\sqrt{2}}\right) \sigma_y \quad (14)$$

sendo  $\lambda_b$  a taxa relativa de esbeltez que é dada por:

$$\lambda_b = \sqrt{\frac{\sigma_y}{\theta_b \cdot \sigma_{el}}} \rightarrow \sqrt{1/2} \leq \lambda_b \leq \sqrt{2} \quad (15)$$

em que  $\sigma_{el}$  é a tensão crítica obtida pela Teoria da Elasticidade e  $\theta_b$  é o fator de correção que leva em conta as imperfeições por meio do fator de abatimento  $k_d$ , conforme as seguintes expressões:

$$\sigma_{el} = \frac{2 \cdot E \cdot t}{d \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \quad (16)$$

$$\theta_b = \frac{k_d}{\sqrt{1 + 0,005 \cdot d/t}} \quad (17)$$

sendo  $d$  o diâmetro externo,  $t$  a espessura,  $E$  o módulo de elasticidade,  $\sigma_y$  a tensão de escoamento e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

O custo inicial é determinado pelo custo do material. Considerando um custo de 2 R\$/kg e densidade do material de 7850 kg/m<sup>3</sup>, obtém-se:

$$C_{IN} = massa \cdot \alpha = \rho \cdot volume \cdot \alpha = \rho \cdot \lambda_k \cdot A_r \cdot L \cdot \alpha = 392500 \cdot \lambda_k \cdot A_r \quad (18)$$

sendo  $\alpha = 2$  R\$/kg,  $L = 25$  m e  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>.

O custo de falha é uma proporção do custo inicial sendo expresso por:

$$C_f = \xi \cdot C_{IN} \quad (19)$$

onde  $\xi$  é o fator de proporcionalidade que leva em conta as classes de consequência. Consequentemente, o custo esperado total é dado pela Equação 20.

$$C_{ET} = C_{IN} + C_f \cdot (P[g_1(\lambda_k, \mathbf{X}) \leq 0] + P[g_2(\lambda_k, \mathbf{X}) \leq 0]) \quad (20)$$

Figura 4: CET versus  $\lambda_k$  para o problema de barra comprimida.

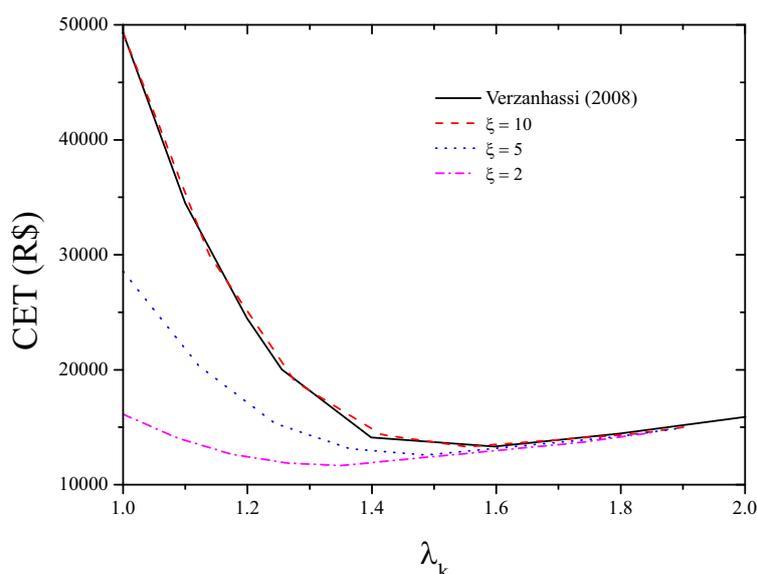


Tabela 5: Valores de  $\lambda_k^*$ , CET e  $t^*$  para diferentes classes de consequência.

Classe de consequência	$\xi$	$\lambda_k^*$	CET (R\$)	$t^*$ (mm)
1	2	1,3499	11667,18	8,59
2	5	1,4872	12581,33	9,47
3	10	1,5535	13296,57	9,89

A Figura 4 apresenta os resultados obtidos para diferentes valores de  $\xi$ . Conforme observado a metodologia proposta exibe excelente acurácia na determinação do coeficiente de segurança característico ótimo ( $\lambda_k^*$ ).

A Tabela 5 resume os valores de  $\lambda_k^*$ , CET e  $t^*$  para as classes de consequência. Onde  $t^*$  (espessura ótima) foi obtida pela seguinte equação:

$$t^* = \frac{\lambda_k^* \cdot A_r}{\pi \cdot d} \quad (21)$$

em que  $d$  foi fixado em 1,0 m.

## 2.3 Treliça de von Mises

Esta seção apresenta o projeto ótimo da treliça de von Mises. O CET e  $\lambda_k$  são determinados via análise linear elástica, análise não linear elástica e análise não linear plástica. Estas soluções são comparadas e discutidas.

A Figura 5-(a) ilustra a geometria da treliça de von Mises, enquanto a Figura 5-(b) a relação constitutiva do material. As barras são em seção tubular com diâmetro externo  $d$  e espessura  $t$ . Valores nominais para os parâmetros são os seguintes: largura ( $2 \cdot x = 200 \text{ cm}$ ), altura ( $y = 10 \text{ cm}$ ), módulo de elasticidade ( $E = 200 \text{ GPa}$ ), tensão de escoamento ( $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$ ), tensão última ( $\sigma_u = 400 \text{ MPa}$ ),

deformação última ( $\varepsilon_u = 0,20$ ), força horizontal ( $F_h = 5 \text{ kN}$ ) e força vertical ( $F_v = 10 \text{ kN}$ ). O projeto de referência é calculado utilizando estes valores nominais,  $\lambda_k = 1$ ,  $\phi_k = 0,92$  e  $\gamma_k = 1,20$ . Para o modo de falha de escoamento, obtém-se a área de referência  $A_r^1 = 2,75 \text{ cm}^2$  e  $A_r^2 = 2,49 \text{ cm}^2$ , respectivamente, para as barras 1 e 2. Fixando  $t = 0,15 \text{ cm}$ , têm-se  $d_1 = 5,84 \text{ cm}$  e  $d_2 = 5,29 \text{ cm}$ . A Tabela 6 apresenta as variáveis aleatórias.

Figura 5: (a) geometria e (b) relação constitutiva.

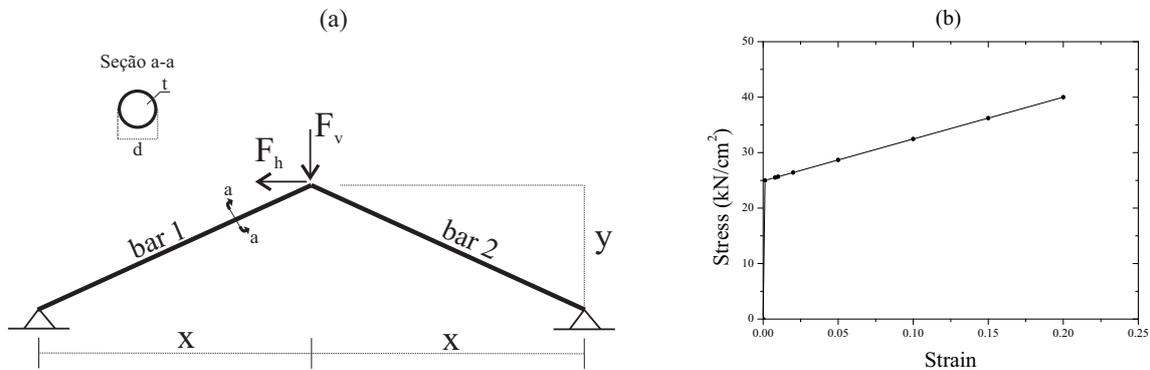


Tabela 6: Variáveis aleatórias do problema da treliça de von Mises.

variável	média	cov	distribuição	referência
$F_h$	$1,00 \cdot F_h$	0,25	Gumbel tipo 1	[38]
$F_v$	$1,00 \cdot F_v$	0,25	Gumbel tipo 1	[38]
$\sigma_y$	$1,05 \cdot \sigma_y$	0,11	lognormal	[38]
$\sigma_u$	$1,10 \cdot \sigma_u$	0,11	lognormal	[38]
$E$	$1,00 \cdot E$	0,03	lognormal	[37]
$\varepsilon_u$	$1,00 \cdot \varepsilon_u$	0,03	lognormal	[37]

Na busca pelo projeto ótimo da treliça de von Mises, as áreas da seção transversal das barras são calculadas em função do  $\lambda_k$  por meio das seguintes equações:

$$A_1 = \lambda_k \cdot A_r^1 = \lambda_k \cdot \pi \cdot d_1 \cdot t \quad (22)$$

$$A_2 = \lambda_k \cdot A_r^2 = \lambda_k \cdot \pi \cdot d_2 \cdot t \quad (23)$$

onde  $d_1$  e  $d_2$  são os diâmetros externos, respectivamente, das barras 1 e 2, enquanto  $t$  é a espessura da parede da seção transversal dessas barras.

Para cada análise são escritas as equações de estado limite de cada barra. Em relação à análise linear elástica, tem-se:

$$g_1^i(\lambda_k, \mathbf{X}) = \sigma_y - |\sigma_{bar,e}^i(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (24)$$

$$g_2^i(\lambda_k, \mathbf{X}) = \sigma_u - |\sigma_{bar,e}^i(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (25)$$

$$g_3^i(\lambda_k, \mathbf{X}) = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z^i}{L_i^2} - |\sigma_{bar,e}^i(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (26)$$

onde  $\sigma_{bar,e}^i(\lambda_k, \mathbf{X})$  é a tensão obtida por meio da análise linear elástica,  $I_z^i = \pi \cdot t \cdot [0,5 \cdot (d_i - t)]^3$  é o momento de inércia e  $L_i$  é o comprimento, respectivamente, da barra  $i$ .

No tocante à análise não linear elástica, obtém-se:

$$g_1^i(\lambda_k, \mathbf{X}) = \sigma_y - |\sigma_{bar,ne}^i(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (27)$$

$$g_2^i(\lambda_k, \mathbf{X}) = \sigma_u - |\sigma_{bar,ne}^i(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (28)$$

$$g_3^i(\lambda_k, \mathbf{X}) = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z^i}{L_i^2} - |\sigma_{bar,ne}^i(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (29)$$

$$g_4(\lambda_k, \mathbf{X}) = \delta_{lim,e} - \delta_{ne}(\lambda_k, \mathbf{X}) \quad (30)$$

onde  $\sigma_{bar,ne}^i(\lambda_k, \mathbf{X})$  é a tensão na barra  $i$  determinada por meio da análise não linear elástica,  $\delta_{lim,e}$  é o deslocamento vertical limite que conduz o *snap-through* considerando o material elástico linear e  $\delta_{ne}(\lambda_k, \mathbf{X})$  é o deslocamento vertical obtido pelo modelo mecânico via análise não linear elástica.

Com respeito à análise não linear plástica, as equações de estado limite ficam escritas como:

$$g_1^i(X, \lambda_k) = \epsilon_p^{lim} - |\epsilon_p^i(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (31)$$

$$g_2^i(X, \lambda_k) = \sigma_u - |\sigma_{bar,np}^i(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (32)$$

$$g_3^i(X, \lambda_k) = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z^i}{L_i^2} - |\sigma_{bar,np}^i(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (33)$$

$$g_4(X, \lambda_k) = \delta_{lim,p} - \delta_{np}(\lambda_k, \mathbf{X}) \quad (34)$$

onde  $\epsilon_p^{lim} = 0,2\%$  é a deformação plástica do limite de escoamento convencional do aço,  $\sigma_{bar,np}^i(\lambda_k, \mathbf{X})$  é a tensão na barra  $i$  determinada por meio da análise não linear plástica,  $\delta_{lim,p}$  é o deslocamento vertical limite que conduz o *snap-through* considerando o material com comportamento plástico e  $\delta_{np}(\lambda_k, \mathbf{X})$  é o deslocamento vertical obtido pelo modelo mecânico via análise não linear plástica.

O custo inicial é calculado a partir do custo de material. Assumindo um custo unitário e densidade de  $7850 \text{ kg/m}^3$ , o custo inicial fica expresso pela Equação 35.

$$C_{IN}^i = massa_i \cdot \alpha = \rho \cdot volume_i \cdot \alpha = \rho \cdot \lambda_k \cdot A_r^i \cdot L_i \cdot \alpha \quad (35)$$

O custo de falha é determinado a partir do custo inicial, diferenciando falha de serviço por falha última por meio do fator de proporcionalidade  $\xi$ . No caso de falha de serviço é adotado  $\xi_s = 2$  (Classe de Consequência 1), enquanto para falha última  $\xi_u = 100$ . Este valor para falha última foi admitido, uma vez que a ruptura de uma das barras conduz o colapso direto da treliça de von Mises. Portanto, o custo esperado total para a análise linear fica escrito pela Equação 36.

$$C_{ET} = \sum_{i=1}^2 C_{IN}^i + \sum_{i=1}^2 C_{IN}^i \cdot \xi_s \cdot P[g_1^i(\lambda_k, \mathbf{X}) \leq 0] + \sum_{i=1}^2 C_{IN}^i \cdot \xi_u \cdot P[g_2^i(\lambda_k, \mathbf{X}) \leq 0] + \sum_{i=1}^2 C_{IN}^i \cdot \xi_u \cdot P[g_3^i(\lambda_k, \mathbf{X}) \leq 0] \quad (36)$$

Em contrapartida, o custo esperado total para a análise não linear fica escrito pela Equação 37.

$$C_{ET} = \sum_{i=1}^2 C_{IN}^i + \sum_{i=1}^2 C_{IN}^i \cdot \xi_s \cdot P[g_1^i(\lambda_k, \mathbf{X}) \leq 0] + \sum_{i=1}^2 C_{IN}^i \cdot \xi_u \cdot P[g_2^i(\lambda_k, \mathbf{X}) \leq 0] + \sum_{i=1}^2 C_{IN}^i \cdot \xi_u \cdot P[g_3^i(\lambda_k, \mathbf{X}) \leq 0] + \sum_{i=1}^2 C_{IN}^i \cdot \xi_u \cdot P[g_4(\lambda_k, \mathbf{X}) \leq 0] \quad (37)$$

A Figura 6 apresenta as curvas do custo esperado total para as diferentes soluções, enquanto a Tabela 7 resume os valores de  $\lambda_k^*$  e  $C_{ET}$ . Nota-se que conforme o modelo mecânico é refinado o coeficiente de segurança característico tende a aumentar na treliça de von Mises. Isso ocorre porque o

*snap-through* é o modo de falha predominante nessa estrutura. Este fenômeno conduz de forma abrupta um salto de posição da estrutura no trecho estável da trajetória de equilíbrio.

Figura 6:  $CET$  versus  $\lambda_k$  para a treliça de von Mises.

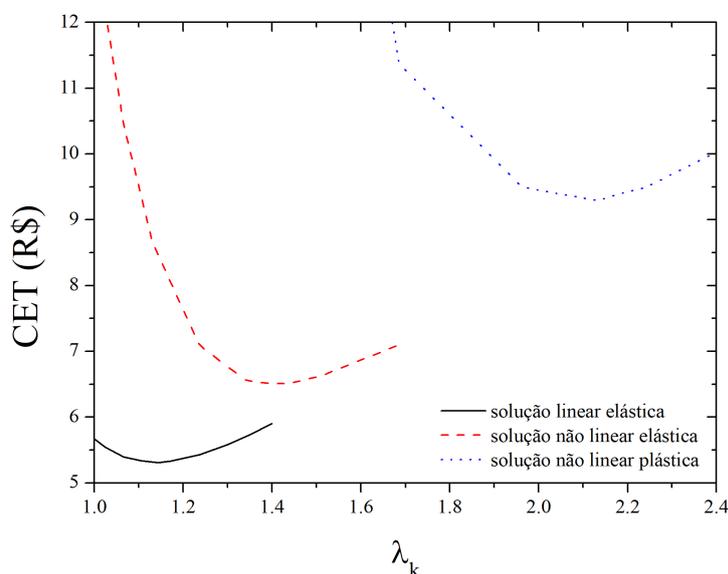


Tabela 7: Valores de  $\lambda_k^*$  e  $CET$  para diferentes soluções.

Solução	$\lambda_k^*$	$CET$ (R\$)
linear elástica	1,1451	5,3081
não linear elástica	1,4105	6,5087
não linear plástica	2,1339	9,2889

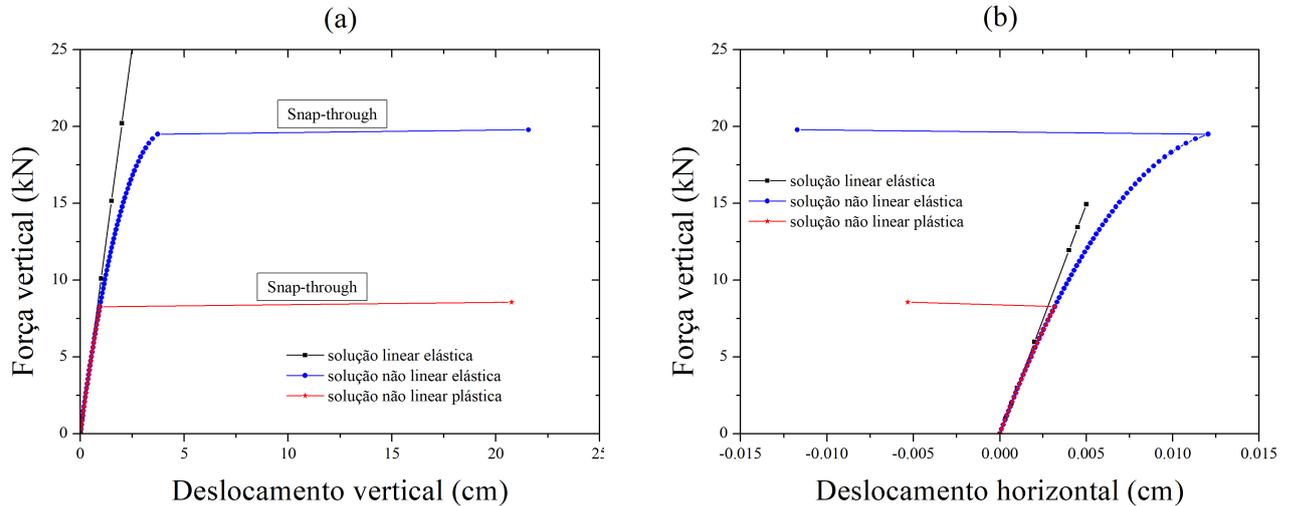
Uma vez que na análise linear a solução é avaliada na configuração inicial, logo, não simula/ocorre o fenômeno de *snap-through*. Nesta análise o modo de falha dominante é o escoamento do material (Equação 27). Todavia, este é um estado limite de serviço, que leva a uma ultrapassagem da tensão de escoamento do material com o surgimento de deformações plásticas, porém não conduz a ruptura das barras. Por consequência, não acarreta o colapso da estrutura. Logo, considerar a análise linear elástica não representa o comportamento da treliça von Mises.

No tocante a análise não linear elástica, a súbita movimentação dinâmica do *snap-through* leva à inversão da inclinação das barras até o nível de deslocamento correspondente ao ponto na trajetória de equilíbrio estável, conforme ilustrado na Figura 7. Neste caso, a ocorrência do *snap-through* caracteriza uma falha última, conduzindo ao colapso da treliça de von Mises. Entretanto, como o comportamento do material não é levado em conta, a perda de rigidez devido ao surgimento de deformações plásticas não é contabilizada na análise.

Com relação à análise não linear plástica, a consideração do comportamento do material potencializa o fenômeno do *snap-through*, em conformidade com a Figura 7. Isso ocorre devido à penalização da rigidez pelo aparecimento de deformações plásticas nas barras, que leva à ocorrência desse fenômeno em um nível de deslocamento vertical igual a 0,94 cm. Em contrapartida, na análise

não linear elástica o nível de deslocamento vertical que conduz o *snap-through* é 3,72 cm, conforme Figura 7-(a). Portanto, fica claro a importância de modelos mecânicos que considerem a solução na configuração atual (não linearidade geométrica) e o comportamento do material (não linearidade física).

Figura 7: Trajetória de equilíbrio da treliça de von Mises.



As soluções apresentadas na Figura 7 foram obtidas com o vetor de variáveis aleatórias  $\mathbf{X} = \{F_h; F_v; E; \sigma_y; \sigma_u; E; \epsilon_u\} = \{4,80; 29,55; 18516,50; 17,54; 28,95; 0,15\}$  e  $\lambda_k = 1,07$ .

## 2.4 Viga treliçada em balanço

A Figura 8 apresenta uma viga treliçada em balanço. A resposta mecânica desta estrutura foi estudada por [39] usando uma formulação mista, por [40] empregando uma formulação Lagrangeana atualizada e por [23] utilizando uma formulação Lagrangeana total em posição. O módulo de elasticidade ( $E$ ), a tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ), tensão última ( $\sigma_u$ ), deformação última ( $\epsilon_u$ ) e densidade ( $\rho$ ) são dados por:  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_u = 400 \text{ MPa}$ ,  $\epsilon_u = 0,20$  e  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ . A área da seção transversal das barras é  $A_r = 1,6 \text{ cm}^2$ . Os parâmetros de Newmark são  $\beta_n = 0,25$ ,  $\gamma_n = 0,50$  e  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$ . O fator de amortecimento é igual  $\zeta = 0,05$ , enquanto que a frequência natural é  $\omega_n = 716,4 \text{ Hz}$ . A Figura 8-(b) mostra a relação constitutiva do material, já a Figura 8-(c) exibe a força aplicada, onde  $f_0 = 50 \text{ kN}$ . A Tabela 8 apresenta as variáveis aleatórias.

Figura 8: (a) geometria, (b) relação constitutiva e (c) força atuante.

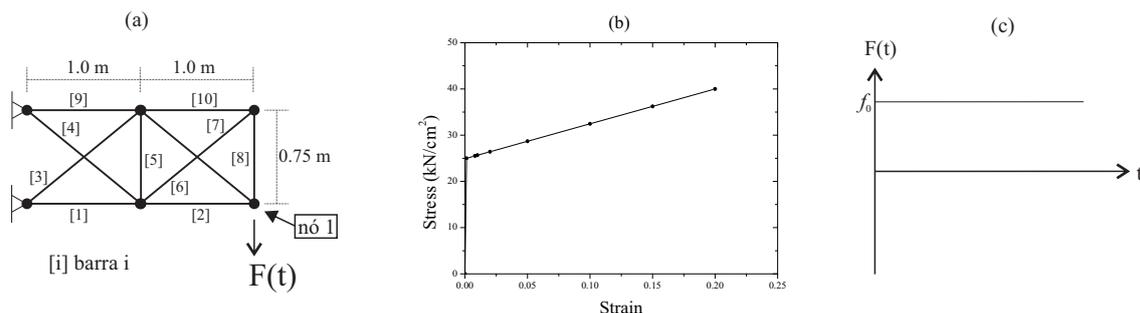
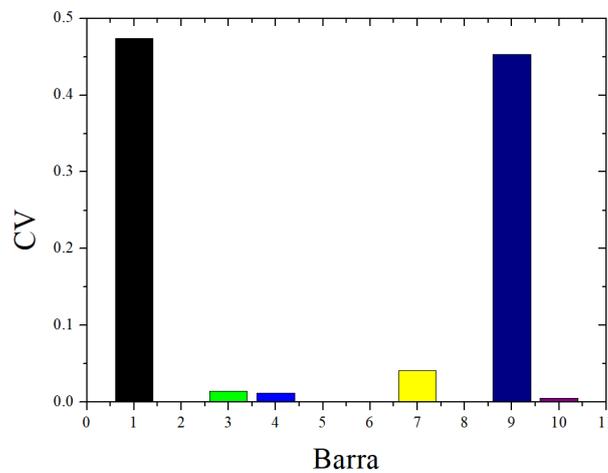


Tabela 8: Variáveis aleatórias do problema da viga treliçada em balanço.

variável	média	cov	distribuição	referência
$f_0$	$1,00 \cdot f_0$	0,25	Gumbel tipo 1	[38]
$\sigma_y$	$1,05 \cdot \sigma_y$	0,11	lognormal	[38]
$\sigma_u$	$1,10 \cdot \sigma_u$	0,11	lognormal	[38]
$E$	$1,00 \cdot E$	0,03	lognormal	[37]
$\varepsilon_u$	$1,00 \cdot \varepsilon_u$	0,03	lognormal	[37]

Figura 9: Coeficiente de vulnerabilidade das barras.



Inicialmente, são calculados os coeficientes de vulnerabilidades (CV) das barras por meio da metodologia *Systematic reliability-based approach to progressive collapse* proposta por [27]. Isso é importante para verificar quais barras iniciam o colapso progressivo da estrutura na ocorrência de falha.

A Figura 9 apresenta os valores de CV para as barras da estrutura. Nota-se que as barras 1 e 9 são as que exibem os maiores valores de CV. Conseqüentemente, caso essas barras falhem irá conduzir o colapso da estrutura, uma vez que acarreta a perda de instabilidade da treliça. Outras sequências de falha que podem levar o colapso dessa treliça por perda de instabilidade são: falha da barra 1 seguida pela barra 3, falha da barra 1 seguida pela barra 4 ou reciprocamente. Entretanto, os CV das barras 3 e 4 são muito baixos 1,43% e 1,23%, respectivamente. Logo, essas sequências de falha têm baixa contribuição na probabilidade de ocorrência do colapso progressivo ( $P_{colapso}$ ). Portanto, a  $P_{colapso}$  pode ser aproximada usando a metodologia *Systematic reliability-based approach to progressive collapse* por:

$$P_{colapso} \cong P[b_1] \cdot P[b_9|b_1] \quad (38)$$

onde  $P[b_1]$  é a probabilidade de falha da barra 1 e  $P[b_9|b_1]$  é a probabilidade condicional de falha da barra 9 dado que ocorreu a falha da barra 1.

A área da seção transversal das barras no decorrer do processo de otimização é determinada pela Equação 39.

$$A = \lambda_k \cdot A_r \quad (39)$$

Para a análise de confiabilidade a seguinte equação de estado limite local é escrita para cada

barra:

$$g_1^i(X, \lambda_k) = \sigma_u - |\sigma_{bar}^i(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (40)$$

sendo  $|\sigma_{bar}^i(\lambda_k, \mathbf{X})|$  a tensão da barra  $i$  calculada via modelo mecânico.

Como a estrutura está em balanço, esta apresenta uma maior deslocabilidade na sua extremidade. Logo, o deslocamento vertical na extremidade da viga deve ser limitado a um valor prescrito por norma [41]. Portanto, a equação de estado limite global fica escrita como:

$$g_2(X, \lambda_k) = \delta_{lim} - |\delta_{v1}(\lambda_k, \mathbf{X})| \quad (41)$$

onde  $\delta_{lim}$  é o deslocamento limite apresentado na Tabela C.1 da norma ABNT NBR 8800 [41] e  $|\delta_{v1}(\lambda_k, \mathbf{X})|$  é o deslocamento vertical do nó 1 obtido por meio do modelo mecânico.

O custo inicial é determinado a partir do custo de material. Considerando um custo unitário, o  $C_{IN}$  de cada barra  $i$  fica expresso pela Equação 42.

$$C_{IN}^i = \rho \cdot volume_i = \rho \cdot \lambda_k \cdot A_r^i \cdot L_i \quad (42)$$

O custo de falha é assumido proporcional ao custo inicial sendo expresso por:

$$C_f = \sum_{i=1}^{10} \xi_u \cdot C_{IN}^i \cdot P[g_1^i(\lambda_k, \mathbf{X}) \leq 0] + \sum_{i=1}^{10} \xi_s \cdot C_{IN}^i \cdot P[g_2(\lambda_k, \mathbf{X}) \leq 0] + \sum_{i=1}^{10} \xi_c \cdot C_{IN}^i \cdot P_{colapso} \quad (43)$$

sendo  $\xi_s = 2$ ,  $\xi_u = 10$  e  $\xi_c = 100$ . Consequentemente, o custo esperado total é dado pela Equação 44.

$$C_{ET} = \sum_{i=1}^{10} C_{IN}^i + C_f \quad (44)$$

A Figura 10 apresenta as curvas do custo esperado total para as diferentes soluções. Para a solução não linear elástica o valor de  $\lambda_k$  é igual 2,0841, enquanto para a solução não linear plástica  $\lambda_k$  é igual 1,6082. Verifica-se que conforme o modelo mecânico é refinado, o  $\lambda_k$  tende a reduzir na viga treliçada em balanço. Isso corre porque para o mesmo nível de deformação o material com comportamento elástico implica em uma maior tensão do que o material com comportamento plástico, pois o primeiro não apresenta redução de rigidez com o surgimento de deformações plásticas, conforme ilustrado na Figura 11-(a). Consequentemente, na análise não linear elástica o modo de falha dominante é a Equação 40. Por outro lado, a dissipação de energia devido ao aparecimento de deformações plásticas conduz um nível de tensão menor na análise plástica do que na análise elástica. Além disso, leva a uma redução na rigidez da estrutura e um aumento dos deslocamentos, em conformidade com a Figura 11-(b). Por conseguinte, na análise não linear plástica o modo de falha preponderante é a Equação 41.

Figura 10: CET versus  $\lambda_k$  para a viga treliçada.

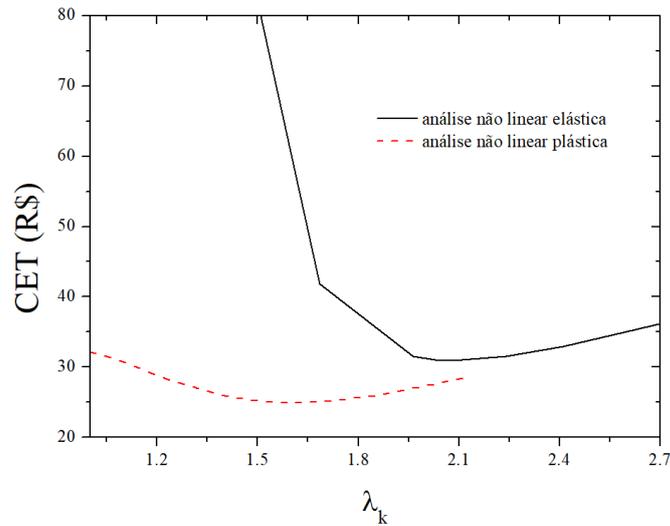
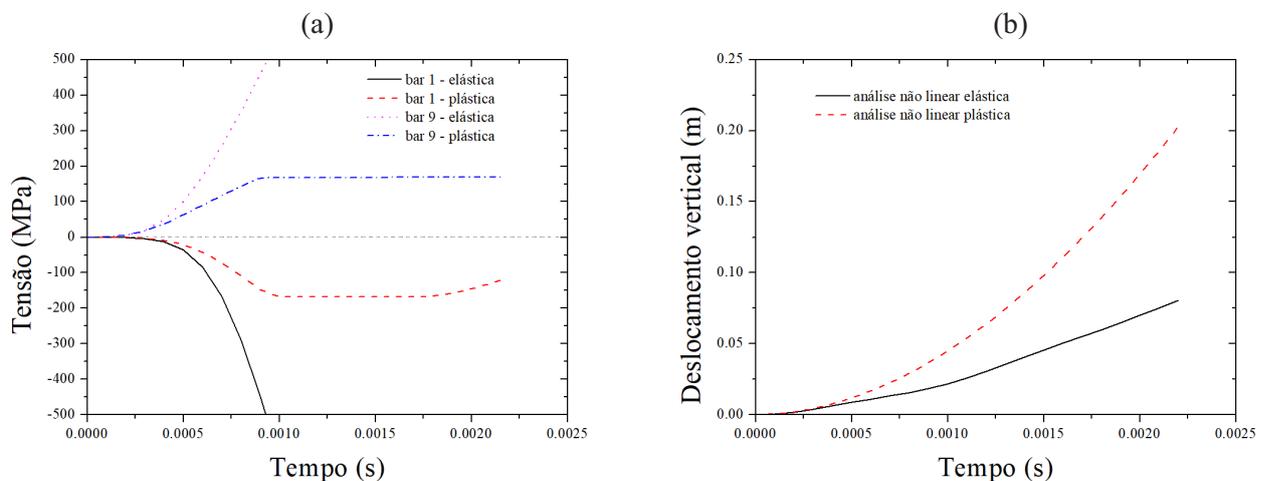


Figura 11: (a) Histórico de tensão nas barras 1 e 9 e (b) Histórico do deslocamento vertical do nó 1.



### 3 Conclusões

Neste trabalho, foi proposto o desenvolvimento e a implementação computacional de uma metodologia para avaliar o projeto ótimo de estruturas treliçadas sujeitas ao colapso progressivo. A metodologia combina: (i) uma formulação Lagrangeana Total para análise estática e dinâmica de estruturas treliçadas, usando posições nodais e a medida de deformação logarítmica; (ii) um modelo de dano dúctil que captura a degradação mecânica devido ao crescimento e a coalescência de microcavidades no material; (iii) o método de simulação de Monte Carlo bruto para resolver o problema de confiabilidade estrutural e (iv) o algoritmo *Golden Section* para avaliar o problema de otimização de risco.

O item (i) foi importante para mensurar a trajetória de equilíbrio exata das estruturas treliçadas considerando as não linearidades geométrica e do material. Outrossim, o uso da deformação logarítmica implica em uma formulação consistente para a análise de problemas sob grandes deslocamentos e grandes deformações. O item (ii) foi fundamental para determinar a relação constitutiva do material, levando em conta sua resposta não linear plástica. O item (iii) foi relevante, pois as equações de estado limite eram numéricas e altamente não lineares. Logo, não comprometeram a execução dos problemas analisados, apesar do método de simulação de Monte Carlo bruto ser mais custoso computacionalmente em comparação a outros métodos de resolução do problema de confiabilidade estrutural. Por fim, o item (iv) foi utilizado, uma vez que os problemas aqui formulados tinham apenas uma variável de projeto. Por consequência, existe apenas uma direção de busca conduzindo uma convergência mais rápida no problema de otimização.

Para análise de confiabilidade, as equações de estado limite foram escritas em função das variáveis internas do modelo mecânico. Isso conduz um aumento do custo computacional em comparação as equações de estado limite analítica apresentadas pela literatura. Todavia, essa estratégia produz uma maior acurácia na avaliação das incertezas do problema. Isso porque o modelo mecânico leva em conta a descrição exata da trajetória de equilíbrio das estruturas treliçadas.

Com relação aos dois exemplos acadêmicos, verificou-se a boa acurácia da metodologia proposta em comparação aos resultados disponíveis na literatura. Além disso, constatou-se que à medida que as classes de consequências eram aumentadas, maiores valores de coeficientes de segurança característico foram determinados. Isso era esperado, uma vez que as classes de consequências estão diretamente relacionadas com o fator de proporcionalidade que multiplica o custo de falha.

No que se refere a treliça de von Mises, verificou-se que a consideração da solução linear elástica está longe de representar o comportamento real dessa estrutura. Isso porque, assumir a análise na configuração inicial não simula o fenômeno de *snap-through*. Em contrapartida, assumindo a análise na configuração atual com comportamento elástico para o material não contabiliza a perda de rigidez devido o surgimento de deformações plásticas. Já na análise não linear plástica a consideração do comportamento plástico do material potencializa o fenômeno de *snap-through*, consequentemente, conduz maiores valores de coeficientes de segurança característico.

Em referência a viga treliçada em balanço, inicialmente, empregou-se a metodologia do *Systematic reliability-based approach to progressive collapse* (SRBAPC) para determinar o coeficiente de vulnerabilidade (CV) de cada elemento desta estrutura. Verificou-se que as barras 1 e 9 foram as que apresentaram os maiores valores de CV. Em consequência, essas barras exibem a maior probabilidade para iniciar uma sequência de falha que pode conduzir o colapso progressivo da treliça. Assim, utilizou-se essa sequência de falha para aproximar a probabilidade de ocorrência do colapso progressivo por meio do SRBAPC. Outrossim, na análise não linear elástica o valor do coeficiente característico ótimo foi maior do que na análise não linear plástica. Isso ocorreu porque a dissipação de energia devido o surgimento de deformação plástica leva a um nível de tensão nas barras menor do que a solução não linear elástica. Em contrapartida conduz a um maior nível de deslocamento, uma vez que reduz a rigidez da estrutura.

## Referências

- 1 BECK, A. T. *Confiabilidade e segurança das estruturas*. Rio de Janeiro: Elsevier Campus, 2019.
- 2 MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. *Structural reliability analysis and prediction*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2018.

- 3 AYYUB, B. M.; KLIR, G. J. *Uncertainty modeling and analysis in engineering and the sciences*. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2006.
- 4 BECK, A. T. Optimal design of redundant structural systems: fundamentals. *Engineering structures*, Elsevier, v. 213, p. 1–23, 2020.
- 5 BECK, A. T.; KOUGIOUMTZOGLU, I. A.; SANTOS, K. R. dos. Optimal performance-based design of non-linear stochastic dynamical rc structures subject to stationary wind excitation. *Engineering structures*, Elsevier, v. 78, p. 145–153, 2014.
- 6 GOMES, W. J.; BECK, A. T. Optimal inspection planning and repair under random crack propagation. *Engineering structures*, Elsevier, v. 69, p. 285–296, 2014.
- 7 LIU, Y.; JEONG, H. K.; COLLETTE, M. Efficient optimization of reliability-constrained structural design problems including interval uncertainty. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 177, p. 1–11, 2016.
- 8 ZAMAN, K.; MAHADEVAN, S. Reliability-based design optimization of multidisciplinary system under aleatory and epistemic uncertainty. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 55, n. 2, p. 681–699, 2017.
- 9 SAAD, L.; CHATEAUNEUF, A.; RAPHAEL, W. Robust formulation for reliability-based design optimization of structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 57, n. 6, p. 2233–2248, 2018.
- 10 PEDROSA, T. G.; BECK, A. T. Progressive collapse on risk topology optimization. Proceedings of the joint ICVRAM ISUMA UNCERTAINTIES conference, 2018.
- 11 BECK, A. T.; TESSARI, R. K.; KROETZ, H. M. System reliability-based design optimization and risk-based optimization: a benchmark example considering progressive collapse. *Engineering Optimization*, Taylor & Francis, v. 51, n. 6, p. 1000–1012, 2018.
- 12 PEDROSA, T. G. *Otimização de Risco de Treliças sob Colapso Progressivo*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2020.
- 13 ASGARIAN, B.; REZVANI, F. H. Progressive collapse analysis of concentrically braced frames through epc algorithm. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 70, p. 127–136, 2012.
- 14 SZYNISZEWSKI, S.; KRAUTHAMMER, T. Energy flow in progressive collapse of steel framed buildings. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 42, p. 142–153, 2012.
- 15 FELIPE, T. R. C.; HAACH, V. G. Discussion about progressive collapse of masonry buildings. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, SciELO Brasil, v. 12, n. 3, p. 479–485, 2019.
- 16 SMITH, J. W. Structural robustness analysis and the fast fracture analogy. *Structural Engineering International*, Taylor & Francis, v. 16, n. 2, p. 118–123, 2006.
- 17 KAEWKULCHAI, G.; WILLIAMSON, E. B. Beam element formulation and solution procedure for dynamic progressive collapse analysis. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 82, n. 7-8, p. 639–651, 2004.
- 18 GERASIMIDIS, S.; SIDERI, J. A new partial-distributed damage method for progressive collapse analysis of steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 119, p. 233–245, 2016.
- 19 FELIPE, T. R. C. *Análise mecânica e probabilística de estruturas treliçadas sujeitas ao colapso progressivo*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019.

- 20 LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. *Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005.
- 21 FELIPE, T. R. C. et al. A comprehensive ductile damage model for 3d truss structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 112, p. 13–24, 2019.
- 22 GURSON, A. L. Plastic flow and fracture behavior of ductile materials incorporating void nucleation, growth, and interaction. 1977.
- 23 FELIPE, T. R. C.; BECK, A. T. Dynamic analysis of failure paths of truss structures: Benchmark examples including material degradation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 158, p. 107767, 2021.
- 24 ELLINGWOOD, B. R.; DUSENBERRY, D. O. Building design for abnormal loads and progressive collapse. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, Wiley Online Library, v. 20, n. 3, p. 194–205, 2005.
- 25 ELLINGWOOD, B. R. Mitigating risk from abnormal loads and progressive collapse. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, American Society of Civil Engineers, v. 20, n. 4, p. 315–323, 2006.
- 26 ELLINGWOOD, B. R. Strategies for mitigating risk to buildings from abnormal load events. *International Journal of Risk Assessment and Management*, Inderscience Publishers, v. 7, n. 6-7, p. 828–845, 2007.
- 27 FELIPE, T. R. C.; HAACH, V. G.; BECK, A. T. Systematic reliability-based approach to progressive collapse. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 4, n. 4, p. 04018039, 2018.
- 28 TIAN, L.-m.; WEI, J.-p.; HAO, J.-p. Optimisation of long-span single-layer spatial grid structures to resist progressive collapse. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 188, p. 394–405, 2019.
- 29 YAN, S. et al. Identification of critical members for progressive collapse analysis of single-layer latticed domes. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 188, p. 111–120, 2019.
- 30 MIAO, F.; GHOSN, M. Reliability-based progressive collapse analysis of highway bridges. *Structural safety*, Elsevier, v. 63, p. 33–46, 2016.
- 31 DING, Y.; SONG, X.; ZHU, H.-T. Probabilistic progressive collapse analysis of steel-concrete composite floor systems. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 129, p. 129–140, 2017.
- 32 DING, Y.; SONG, X.; ZHU, H.-T. Probabilistic progressive collapse analysis of steel frame structures against blast loads. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 147, p. 679–691, 2017.
- 33 FELIPE, T. R. C. et al. Reliability analysis of the paths of truss structures considering complete failure paths and using the flhb model. *Ibracon Structures and Materials Journal*, IBRACON, v. 14, n. 4, p. e14402, 2021.
- 34 VERZENHASSI, C. C. *Otimização de risco estrutural baseada em confiabilidade*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2008.
- 35 FRANGOPOL, D. M.; MAUTE, K. Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures. *Computers & structures*, Elsevier, v. 81, n. 7, p. 397–410, 2003.

- 36 GOMES, W. J. de S.; BECK, A. T. Global structural optimization considering expected consequences of failure and using ann surrogates. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 126, p. 56–68, 2013.
- 37 JCSS, J. Probabilistic model code. *Joint Committee on Structural Safety*, 2001.
- 38 ELLINGWOOD, B. R.; GALAMBOS, T. V. Probability-based criteria for structural design. *Structural Safety*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 15–26, 1983.
- 39 NOOR, A. K.; PETERS, J. M. Nonlinear dynamic analysis of space trusses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 21, n. 2, p. 131–151, 1980.
- 40 ZHU, K.; AL-BERMANI, F.; KITIPORNCHAI, S. Nonlinear dynamic analysis of lattice structures. *Computers & structures*, Elsevier, v. 52, n. 1, p. 9–15, 1994.
- 41 ABNT, N. 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, 2008.