

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Curso de Engenharia Aeronáutica e Mecânica na Área de Mecânica dos Sólidos e Estruturas

Alex Evangelista de Almeida

**O EFEITO DE ENRIJECIMENTO POR TENSÃO
PIEZELETRICAMENTE INDUZIDA NA ESTABILIDADE
AEROELÁSTICA DE PAINÉIS AERONÁUTICOS**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:

Maurício Vicente Donadon
Orientador

Celso Massaki Hirata
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP – Brasil
2011

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Almeida, Alex Evangelista de
O Efeito de Enrijecimento por Tensão Piezeletricamente Induzida na Estabilidade Aeroelástica de Painéis Aeronáuticos / Alex Evangelista de Almeida
São José dos Campos, 2011.
100f.

Tese de Mestrado – Curso de Engenharia Aeronáutica e Mecânica. Área de Mecânica dos Sólidos e Estruturas – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2011. Orientador: Prof. Dr. Maurício Vicente Donadon.

1. Efeito piezoelétrico. 2. Estabilidade aeroelástica. 3. Método dos elementos finitos. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Engenharia Aeronáutica. II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ALMEIDA, Alex Evangelista de. **O Efeito de Enrijecimento por Tensão Piezeletricamente Induzida na Estabilidade Aeroelástica de Painéis Aeronáuticos**. 2011. 100f. Tese de Mestrado em Ciências – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Alex Evangelista de Almeida

TÍTULO DO TRABALHO: O Efeito de Enrijecimento por Tensão Piezeletricamente Induzida na Estabilidade Aeroelástica de Painéis Aeronáuticos

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese de Mestrado / 2011

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a sua autorização (do autor).

Alex Evangelista de Almeida
Rua São Clemente, 271/206, Botafogo
22260-001, Rio de Janeiro - RJ

**O EFEITO DE ENRIJECIMENTO POR TENSÃO
PIEZELETRICAMENTE INDUZIDA NA ESTABILIDADE
AEROELÁSTICA DE PAINÉIS AERONÁUTICOS**

Alex Evangelista de Almeida

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Roberto Gil Annes da Silva	Presidente - ITA
Prof. Dr.	Maurício Vicente Donadon	Orientador - ITA
Prof. Dr.	Eliseu Lucena Neto	Membro Interno - ITA
Prof. Dr.	Carlos De Marqui Junior	Membro Externo – USP/EESC

ITA

Dedico este trabalho a DEUS, por tudo; à minha esposa ANA PAULA, pelo seu carinho e incondicional apoio; e ao meu filho VINÍCIUS, por sua existência.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Donadon, por toda a paciência e orientação acadêmica, durante a realização deste trabalho.

À Força Aérea Brasileira, por ter aberto as suas portas mais uma vez para mim.

À Marinha do Brasil, por acreditar e investir na capacitação do seu pessoal.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo da fronteira de estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos, curvos ou planos, sujeitos ao efeito de enrijecimento provocado pelo atuador piezoelétrico (PZT). Empregou-se o Princípio de Hamilton para a obtenção das equações de equilíbrio e das condições de contorno do problema. O método dos elementos finitos foi empregado para a solução das equações. Consideraram-se painéis manufacturados em material composto (boro-epóxi) ou em material convencional (alumínio 2024-T3) e duas camadas de material piezoelétrico (PZT-5A), uma na face superior e outra na face inferior da placa. Aplicou-se voltagem no atuador piezoelétrico e determinou-se a pressão dinâmica correspondente à condição de ocorrência de flutter da estrutura. A análise foi estendida para várias configurações do painel, onde foram investigados: a variação do alongamento da placa, o efeito da curvatura, a influência do ângulo de laminação da placa, a influência das condições de contorno, o efeito da voltagem inversa e o efeito da variação de espessura do painel. O estudo mostrou que a tensão mecânica induzida pelo efeito piezoelétrico aumenta a velocidade de ocorrência do *flutter*, estabilizando a placa. Este enrijecimento da estrutura está relacionado à voltagem aplicada nos atuadores e aos parâmetros geométricos da placa. Desta forma, pode-se controlar a velocidade de ocorrência de *flutter* através do controle da voltagem aplicada e no projeto adequado das propriedades geométricas do painel.

Abstract

This work aims to study the aeroelastic stability boundary of flutter in aircraft panels, curved or flat, subject to the stress stiffening caused by the piezoelectric actuator (PZT). The Hamilton's principle was used to obtain the equilibrium equations and boundary conditions of the problem. The finite element method was employed to solve the equations. Panels manufactured in composite material (boron-epoxy) or conventional material (aluminum 2024-T3) with two symmetric layers of piezoelectric material (PZT-5A), bonded to the top and bottom faces of the plates were investigated. Voltage was applied to the piezoelectric actuator to determine the dynamic pressure corresponding to the point of occurrence of flutter of the structure. The analysis was extended to various panel configurations and effects such as variation of elongation of the plate, the curvature, lamination angle of the plate, boundary conditions, reverse voltage and the variation at the thickness of the panel on the flutter velocity were investigated. The study showed that mechanical strain-induced piezoelectric effect increases the rate of occurrence of flutter, stabilizing the plate. This stiffening of the structure is related to the voltage applied on the actuators and the geometrical parameters of the plate. Thus, one can control the occurrence of flutter speed by controlling the voltage applied and the proper design of the geometric properties of the panel.

Índice de Figuras

Figura 3.1 – Placa laminada.....	11
Figura 3.2 - Eixos principais do material.....	12
Figura 3.3 – Elemento infinitesimal de casca.....	16
Figura 3.4 – Painel curvo retangular na presença de escoamento aerodinâmico.....	24
Figura 4.1 – Notação dos pontos nodais de um elemento retangular.	41
Figura 5.1 – Arranjo esquemático da montagem placa-atuador piezoelétrico.....	49
Figura 5.2 – Discretização da placa em elementos finitos.....	52
Figura 5.3 – Coalescência dos modos principais de vibração de uma placa.....	55
Figura 5.4 – Coalescência dos modos com a aplicação de tensão elétrica nos atuadores piezoelétricos.....	56
Figura 5.5 – Tensão elétrica versus λ_{cr} em uma placa quadrada, simplesmente apoiada, em alumínio 2024-T3, $a = b = 0,4$ m e $a/h = 100$	58
Figura 5.6 – Influência do alongamento e da condição de contorno de uma placa de Al 2024-T3 no parâmetro de pressão dinâmica crítica do escoamento, $a/h = 200$	59
Figura 5.7 – Influência do alongamento de uma placa de alumínio 2024-T3, simplesmente apoiada, com carregamento elétrico no atuador, $a/h = 200$	60
Figura 5.8 – Influência do alongamento de uma placa de alumínio 2024-T3, engastada, com carregamento elétrico no atuador, $a/h = 200$	61
Figura 5.9 – Influência da curvatura de um painel de alumínio 2024-T3, simplesmente apoiada, $a/b=1$, com carregamento elétrico no atuador.	62
Figura 5.10 – Influência da curvatura de um painel de alumínio 2024-T3, engastada, $a/b=1$, com carregamento elétrico no atuador.....	63
Figura 5.11 – Influência da curvatura na direção do escoamento, em um painel de alumínio 2024-T3, com carregamento elétrico no atuador, $a/b=1$, $a/h = 200$	64
Figura 5.12 – Influência da curvatura de um painel de alumínio 2024-T3, simplesmente apoiada, $a/b=2$, com carregamento elétrico no atuador.	66

Figura 5.13 – Influência da curvatura de um painel de alumínio 2024-T3, engastada, $a/b=2$, com carregamento elétrico no atuador.....	67
Figura 5.14 – Influência da curvatura de um painel de alumínio 2024-T3, sem carregamento elétrico no atuador.	67
Figura 5.15 – λ_{cr}^* versus θ , em uma placa de boro-epóxi, $a/b=1$	69
Figura 5.16 – λ_{cr}^* versus θ , em uma placa de boro-epóxi, $a/b=2$	70
Figura 5.17 – Influência do ângulo de laminação em uma placa de boro-epóxi, simplesmente apoiado, onde $a/b = 1$, $a/h=200$, sujeito ao carregamento piezoelétrico.	71
Figura 5.18 – Influência do ângulo de laminação, placa de boro-epóxi, engastada, $a/b = 1$, sujeito ao carregamento piezoelétrico.....	72
Figura 5.19 – Influência do ângulo de laminação, placa de boro-epóxi, simplesmente apoiada, $a/b = 2$, sujeito ao carregamento piezoelétrico.....	72
Figura 5.20 – Influência do ângulo de laminação, placa de boro-epóxi, engastada, $a/b = 2$, sujeito ao carregamento piezoelétrico.....	73
Figura 5.21 – Influência do ângulo de laminação, placa de boro-epóxi.	73
Figura 5.22 – Efeito da tensão elétrica inversa no atuador piezoelétrico, placa de alumínio 2024-T3, $a/b = 1$, $a/h = 200$	75
Figura 5.23 – Influência da razão de espessuras da placa e atuador. Placa de alumínio 2024-T3, $a/b = 1$, $a/h = 200$	76
Figura 5.24 – Influência da razão de espessuras da placa e atuador. Placa de alumínio 2024-T3, simplesmente apoiada, $a/b = 1$, $a/h = 200$	77
Figura 5.25 – Influência da razão de espessuras da placa e atuador. Placa de alumínio 2024-T3, engastada, $a/b = 1$, $a/h = 200$	77

Índice de Tabelas

Tabela 5.1 – Propriedades mecânicas da placa.	50
Tabela 5.2 – Propriedades mecânico-elétricas do atuador piezoelétrico.....	50
Tabela 5.3 – Freqüências dos modos principais de vibração de uma placa retangular, simplesmente apoiada.	51
Tabela 5.4 – Erro absoluto dos valores das freqüências de vibração principais obtidos pelo método dos elementos finitos, em função da malha empregada.	52
Tabela 5.5 – $\lambda_{cr}^* = \lambda_{cr} a^3 / D$, placa quadrada simplesmente apoiada.....	53
Tabela 5.6 – Valores de $\lambda_{cr}^* = \lambda_{cr} a^3 / (E_2 h^3)$ e $\omega_{cr}^* = \omega_{cr} a^2 / h (\rho / E_2)^{0,5}$ para placa ortotrópica quadrada de boro-epóxi, engastada em todos os bordos.....	54
Tabela 5.7 – Aumento percentual do parâmetro de pressão dinâmica crítica do escoamento sobre a placa com a aplicação de tensão sobre os atuadores piezoelétricos.....	57
Tabela 5.8 – Variação em λ_{cr} com a curvatura, $a/b = 1$	65
Tabela 5.9 – Variação em λ_{cr} com a curvatura, $a/b = 2$	65
Tabela 5.10 – Variação no M_{cr} para $h/h_p = 10$	78

Lista de Símbolos

- $\{D\}$ Matriz de deslocamento elétrico
- $\{E\}$ Vetor campo elétrico
- $\{\xi\}$ Matriz de permissividade elétrica do material
- $[Q]$ Matriz de rigidez do material
- $[S] = [Q]^{-1}$ Matriz de flexibilidade do material
- $\{\varepsilon\}$ Vetor deformação
- $\{\varepsilon^0\}$ Vetor deformação da superfície média
- $\{\kappa^0\}$ Vetor curvatura da superfície média
- ζ Coordenada normal à superfície média
- $\{\sigma\}$ Vetor de tensões mecânicas
- $[d]$ Matriz de acoplamento eletro-mecânico do sistema
- $[e]$ Matriz de sensibilidade do elemento piezoelétrico
- $[\bar{Q}]$ Matriz de rigidez do laminado
- E_i ($i=1,2$) Módulo de Elasticidade na direção i
- E_j ($j=x,y,z$) Campo elétrico na direção j
- $[T_1]$ Matriz de rotação
- $\{N\}$ Vetor de tensões resultantes no plano ao longo da espessura

- $\{M\}$ Vetor de momentos resultantes no plano ao longo da espessura
- $[A]$ Matriz de rigidez de membrana
- $[D]$ Matriz de rigidez de flexão
- $[B]$ Matriz de acoplamento membrana-flexão
- t_1, t_2 Versores tangentes à superfície média nas direções 1 e 2
- n Versor normal à superfície média
- ξ_1, ξ_2 Eixos coordenados nas direções 1 e 2
- h Espessura do painel
- h_p Espessura do atuador piezoelétrico
- $r = r(x,y,z)$ Vetor posição de um ponto do painel
- $u = u(t_1, t_2, n)$ Vetor deslocamento de um ponto do painel
- γ_{12} Deformação de cisalhamento na superfície
- α_1, α_2 Curvas coordenadas
- α_n Parâmetro de Lamé
- u, v, w Deslocamentos na superfície média nas direções x, y, z respectivamente
- R_1, R_2 Raios de curvatura da superfície média nas direções 1 e 2
- $\{\varepsilon^m\}$ Vetor de deformação de membrana
- $\{\kappa\}$ Vetor de deformação devido à flexão
- Φ Potencial elétrico

z_k	Coordenada z na lâmina k
h_k	Espessura da lâmina k
π	Energia potencial total
T	Energia cinética do sistema
U	Energia de deformação
W	Trabalho da força externa
ρ	Densidade do material por unidade de área
$\{N_P\}$	Vetor de tensão piezoelétrica resultante
$\{M_P\}$	Vetor de momento piezoelétrico resultante
F	Campo de tensão de Airy
W_A	Trabalho do escoamento potencial aerodinâmico
Δp^M	Diferencial de pressão da teoria linear do escoamento potencial
V_∞	Velocidade do escoamento não-perturbado
Q_∞	Pressão dinâmica do escoamento não-perturbado
M_∞	Número de Mach do escoamento não-perturbado
λ	Parâmetro de pressão dinâmica
$Q(\xi, \eta)$	Variável de campo generalizada
$L_i(\xi, \eta)$, $i = 1, 2, \dots, 16$	Polinômios de Hermite

$[M]$ Matriz de massa do painel

$[A]$ Matriz de carregamento aerodinâmico

$[K_{ww}]$ Matriz de rigidez estrutural

$[K_{wF}]$ Matriz de acoplamento

$[K_G]$ Matriz de rigidez piezoelétrica

$[K_{FF}]$ Matriz de rigidez do campo de tensões de Airy

$[K_{eq}]$ Matriz de rigidez equivalente

$s = \omega_r + i \omega_i$ Frequência de vibração do painel

SUMÁRIO

1. Introdução.....	1
1.1. Objetivo.....	3
1.2. Conteúdo.....	4
2. Revisão Bibliográfica	5
3. Formulação do Problema	10
3.1. Equações Constitutivas do Material Piezoelétrico.....	10
3.2. Equações Constitutivas do Laminado.....	11
3.3. Relação Deformação-Deslocamento	15
3.4. Princípio de Hamilton	24
3.5. Energia Cinética do Sistema	25
3.6. Energia de Deformação	25
3.7. Trabalho da Força Aerodinâmica	29
3.8. Equações de Equilíbrio.....	30
3.9. Condições de Contorno	35
4. Solução Numérica	39
5. Resultados	49
5.1. Validação do Modelo	51
5.2. Coalescência dos Modos	54
5.3. Influência do Alongamento	58
5.4. Influência da Curvatura.....	61
5.5. Influência do Ângulo de Laminação	68
5.6. Efeito da Tensão Elétrica Inversa no Atuador.....	74
5.7. Influência da Espessura Relativa da Placa.....	76
6. Conclusões e Perspectivas Futuras.....	80
Referências Bibliográficas	83

1. Introdução

O considerável aumento da velocidade de voo das aeronaves, principalmente durante a Segunda Guerra Mundial, teve como consequência a ocorrência de falhas estruturais na asa e na fuselagem, causada por instabilidade dinâmica nos painéis destas estruturas. Esta instabilidade aeroelástica de caráter dinâmico é conhecida como *flutter*, que é o movimento auto-excitado de dois ou mais modos de vibração do sistema, devidamente alterado e realimentado pelo escoamento do fluido, onde as oscilações de amplitude crescem exponencialmente, levando a estrutura a uma falha dinâmica. Desde então, esta instabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos tem sido estudada ao longo dos anos visando ao maior entendimento deste fenômeno físico e o consequente aperfeiçoamento dos projetos de veículos de alto desempenho. Neste sentido, dois grandes avanços tecnológicos no campo da Ciência dos Materiais têm despertado muito interesse dos engenheiros e, consequentemente, muita pesquisa tem sido conduzida para ampliar o conhecimento a respeito destas tecnologias. Estes avanços são: o uso de material composto no projeto estrutural e o emprego de materiais inteligentes para controlar fenômenos físicos na estrutura.

O interesse no emprego de materiais compostos no projeto aeronáutico deve-se principalmente a sua alta relação rigidez / peso, notadamente em projeto de painéis de asa e da fuselagem que juntos compõem grande parte do peso estrutural de uma aeronave.

O potencial de emprego de materiais inteligentes em estruturas aeronáuticas tem se mostrado bastante promissor. A principal característica desta nova concepção é a instalação de sensores interligados por um sistema de controle por atuadores, os quais imprimem

deformações induzidas em partes da estrutura. Os atuadores podem ter sua forma de ação baseada em alguns fenômenos, tais como termo-mecânico e piezoeletricidade. Devido ao acoplamento entre as propriedades elétricas e mecânicas, existente nos materiais piezoelétricos, estes podem ser utilizados como sensores ou como atuadores em estruturas inteligentes, oferecendo vantagens como a alta precisão, grande sensibilidade, capacidade de inserção na estrutura, conversão direta de energia elétrica para mecânica e vice-versa, resposta rápida e baixo peso (MELIM, 1996).

O efeito piezoelétrico direto ocorre quando uma deformação é imposta ao material e este gera um campo elétrico; o efeito piezoelétrico inverso surge quando um campo elétrico é aplicado sobre o material e este apresenta deformação. Dois materiais piezoelétricos amplamente empregados são: as cerâmicas piezoelétricas, como o titanato zirconato de chumbo (PZT); e os polímeros piezoelétricos, como o polifluoreto de vinilideno (PVDF). Devido a sua natureza cerâmica, o PZT apresenta rigidez mecânica relativamente alta. Como resultado, a conversão de energia elétrica em mecânica é muito eficiente, tornando este material ideal para a utilização como atuador. Entretanto, as cerâmicas possuem uma considerável fragilidade mecânica, o que dificulta a sua manipulação e confecção em superfícies complexas, e massa específica 2,7 vezes maior que a do alumínio 2024-T3, o que pode conferir grande incremento em massa à estrutura de um painel aeronáutico. Alternativamente, os polímeros piezoelétricos são mais flexíveis, possibilitando o seu emprego em geometrias complexas, sendo indicados para aplicações de sensoriamento (PIERRONI, 2009).

A inovação tecnológica deste trabalho consiste no uso de atuadores piezoelétricos (PZT) na estrutura do painel aeronáutico, através do efeito piezoelétrico inverso, onde estes atuadores sofrem deformações, alterando as características de rigidez da placa. Esta

capacidade de alterar a rigidez confere aos atuadores PZT a grande vantagem de permitir o controle da velocidade de ocorrência do flutter.

Este estudo compreende a determinação da fronteira de estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos, sujeitos ao efeito de enrijecimento por tensão induzida piezoeletricamente. Para isto, considerou-se um painel de material composto (boro-epóxi) ou material convencional (alumínio 2024-T3) com duas camadas de material piezoelétrico (PZT-5A), uma na face superior e outra na face inferior. Aplicou-se tensão elétrica sobre as lâminas do PZT, variando-a de 0 a 200 volts, e, em seguida, determinou-se a pressão dinâmica crítica, correspondente ao ponto de ocorrência de flutter da estrutura. A análise foi estendida para várias configurações do painel, onde foi pesquisada a influência dos seguintes parâmetros: o alongamento do painel, a curvatura, o ângulo de laminação, as condições de contorno, a tensão inversa no atuador e a razão de espessuras entre o painel e o atuador. O estudo mostrou que a tensão mecânica induzida pelo efeito piezoelétrico aumenta a velocidade de ocorrência do *flutter*, estabilizando o painel. Desta forma, pode-se controlar a velocidade de ocorrência da instabilidade aeroelástica no painel através do controle da voltagem aplicada nos atuadores piezoelétricos e no projeto adequado das propriedades geométricas da estrutura.

1.1. Objetivo

Estudar formulações propostas para a modelagem de placas laminadas com atuadores piezoelétricos, adaptar um programa computacional de elementos finitos para a análise aeroelástica de placas laminadas munidas de atuadores piezoelétricos e determinar a fronteira

de estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos, curvos ou planos, manufaturados em material composto ou não, sujeitos ao efeito de enrijecimento provocado pelo PZT.

1.2. Conteúdo

Este trabalho é dividido em seis capítulos.

O primeiro capítulo consiste de uma breve introdução e objetivos da tese. O segundo capítulo compreende uma revisão bibliográfica de alguns trabalhos relacionados ao emprego de atuadores piezoelétricos.

O terceiro capítulo apresenta a formulação do problema, iniciando-se pelas relações deformação-deslocamento, seguindo-se pelas equações constitutivas e pela formulação variacional do problema estrutural e finalizando com a obtenção das equações de equilíbrio do problema.

O quarto capítulo apresenta a solução numérica do problema utilizando-se a formulação do método dos elementos finitos. O quinto capítulo apresenta os resultados numéricos bem como a análise pertinente.

O último capítulo apresenta as conclusões do trabalho e perspectivas futuras.

2. Revisão Bibliográfica

O emprego de material piezoelétrico como atuadores e sensores para controle ativo de estruturas tem sido explorado extensivamente ao longo das últimas três décadas. As pesquisas sobre as aplicações do fenômeno piezoelétrico inverso têm se concentrado em controle de vibração de estruturas, controle de ruído e controle de carga de flambagem de vigas e placas. A formulação dos modelos teóricos que fundamentam esta aplicação é baseada na constituição de um funcional de energia e um princípio variacional que estabeleça as equações de equilíbrio e as condições de contorno do problema. Conseqüentemente, o método de elementos finitos tem sido amplamente empregado na solução de problemas de controle ativo de estruturas por meio de elementos piezoelétricos. Um dos primeiros trabalhos desenvolvidos neste campo é atribuído à Allik e Hughes (1970). Eles desenvolveram uma formulação em elementos finitos incluindo o efeito piezoelétrico e eletrostático, onde foi deduzida a equação dinâmica da eletroelasticidade, sendo esta reduzida à forma da equação da Dinâmica de Estruturas. Um elemento tetraédrico foi utilizado para a aplicação em problemas tridimensionais de eletroelasticidade.

Crawley e de Luis (1987) estudaram a resposta dinâmica de elementos estruturais a comandos de voltagem aplicados aos atuadores piezoelétricos, e medidos por sensores espalhados ao longo da estrutura. O modelo analítico estático e dinâmico empregado por eles, bem como a montagem experimental dos atuadores e sensores, permitiam analisar o comportamento da estrutura e prever a localização ótima dos atuadores piezoelétricos. Os elementos estruturais utilizados nos experimentos foram vigas de alumínio, vigas de fibra de vidro e vigas de grafite-epóxi. O modelo analítico empregado foi a teoria de vigas de Euler-Bernoulli e o método de Rayleigh-Ritz para a análise de vigas retas. Crawley e Anderson

(1990) desenvolveram uma técnica para modelar a deformação induzida em elementos de viga de estruturas inteligentes. Dois modelos analíticos e um numérico descreveram o mecanismo da deformação de alongamento, flexão e cisalhamento induzidos por atuadores piezoelétricos em estruturas unidimensionais. Estes modelos analíticos e numérico foram validados por resultados experimentais.

Uma formulação em elementos finitos para controle de vibração em placas laminadas com atuadores e sensores piezoelétricos foi apresentada por Hwang e Park (1993). Eles empregaram elementos de placa com quatro nós e doze graus de liberdade para modelar a flexão da placa, e um grau de liberdade para representar a atuação piezoelétrica. Os sensores piezoelétricos foram distribuídos e integrados ao longo da estrutura, de forma que a voltagem aplicada era dependente da variação de deformação sofrida pela estrutura sob o sensor. Desta forma, estes autores concluíram que a quantidade, o tamanho e a localização dos sensores e atuadores são fundamentais na efetividade do controle de estruturas.

Ghosh e Batra (1995) estudaram o uso de atuadores piezoelétricos para controle da forma e vibração de placas finas. Eles analisaram a deflexão no centro de uma placa simplesmente apoiada e na extremidade livre de uma placa engastada-livre, ambas deformadas quase-estaticamente, e mostraram que estas deflexões podem ser controladas por voltagem elétrica que, por sua vez, é função da área de cobertura dos atuadores na superfície da placa.

Faria (1995) estudou a aplicação de atuadores piezoelétricos no problema de controle ativo de vibrações. O modelo desenvolvido simula o controle da vibração em uma viga esbelta, induzida por um movimento de corpo rígido prescrito. Faria e Almeida (1996) estudaram neste mesmo modelo, o efeito de uma colagem com rigidez finita e a sua efetividade no controle de vibração da viga.

Batra, Liang e Yang (1996) estudaram o controle da forma de placas sujeitas a distúrbios externos. Assumiu-se uma placa simplesmente apoiada, com atuadores piezoelétricos na parte superior e inferior, vibrando livremente em uma frequência próxima a sua frequência natural. Eles determinaram a localização ótima e o tamanho dos atuadores piezoelétricos, de forma a minimizar a voltagem aplicada para suprimir o movimento da placa.

Lima Jr (1999) apresenta uma metodologia para modelagem analítica e numérica de estruturas, com elementos piezoelétricos incorporados. Desenvolve-se modelos analíticos de placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin e de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko com efeito piezoelétrico visando ao controle ativo destas estruturas.

Donadon (2000) estuda formulações propostas para a modelagem de placas laminadas com atuadores piezoelétricos e implementa um programa computacional de elementos finitos para a análise destas placas, incluindo efeitos de enrijecimento por tensão. Estas formulações são validadas experimentalmente, onde através de ensaios, o autor caracteriza o campo de deformação induzido pelos atuadores piezoelétricos e o comportamento mecânico da placa em termos de sua rigidez à flexão e frequências naturais de vibração.

Hernandes, Almeida e Nabarrete (2000) investigam a vibração livre de placas laminadas finas sujeita ao efeito de enrijecimento por tensão, induzido por atuadores piezoelétricos em sua superfície. Os autores apresentam uma formulação em elementos finitos baseada na teoria de Reissner-Mindlin, incluindo a não-linearidade na relação deformação-deslocamento. A aplicação de voltagem produziu tensões induzidas piezoelectricamente no plano. Os autores concluíram que estas tensões induzidas afetaram significativamente o comportamento em vibração livre da placa.

Piefort (2001) desenvolveu uma metodologia de sistema de controle envolvendo atuadores e sensores piezoelétricos empregando o conceito de função de transferência entre as entradas e saídas do sistema. Neste método, a localização dos atuadores e sensores torna-se crítica porque os zeros da função de transferência são dominados por efeitos locais induzidos pelos atuadores, e que só podem ser determinados pelo método de elementos finitos. O autor apresenta uma formulação de elementos finitos para sistemas piezoeletricamente acoplados baseado na teoria de Mindlin para elementos de cascas. São apresentadas aplicações deste sistema em controle de ruído e vibração.

Machado (2004) apresentou uma teoria de placas laminadas piezoelétricas com o campo de deslocamentos de Reissner-Mindlin e potencial elétrico com variação linear ao longo da espessura de cada camada piezoelétrica. O autor utilizou os métodos de Navier e de Lévy para as soluções analíticas do problema.

Perroni (2009) propôs uma técnica para aumentar as cargas de flambagem de placas de material composto. A técnica consiste em utilizar tensões residuais induzidas por atuadores piezoelétricos para criar forças de tração agindo ao longo do plano da placa, permitindo a aplicação de forças externas maiores que as cargas críticas de flambagem tradicionais. Assim, o autor sugere que se restrinjam completamente os movimentos da placa nas direções do seu plano, em todo o contorno, e que seja aplicada uma voltagem em atuadores simetricamente colados nas faces da placa. Essa voltagem é aplicada de forma que os atuadores contraiam, resultando em forças de tração uniformes ao longo do plano da placa.

De Marqui Junior et al. (2009) apresenta um modelo em elementos finitos de um sistema eletromecânico composto por placa e lâminas piezoelétricas cujo objetivo é converter energia mecânica de vibração em energia elétrica. Após a validação do modelo com resultados conhecidos na literatura, o autor analisa a possibilidade de aplicação deste conceito através da geração de energia elétrica alternativa a Veículos Aéreos Não-Tripulados (UAV,

Unmanned Aerial Vehicle, em inglês), por intermédio da energia de vibração proveniente do carregamento aerodinâmico sobre as asas. Neste estudo, o autor conduz uma análise de otimização para determinar os parâmetros geométricos ótimos de comprimento e espessura das lâminas piezoelétricas, visto que, o incremento em massa na estrutura da asa, provenientes da inserção do PZT, poderia tornar impeditivo o seu emprego. O estudo concluiu que, para um acréscimo em massa de 10% do valor original, a máxima potência de energia elétrica obtida pelo acoplamento eletromecânico é alcançada quando o comprimento da lâmina de PZT é de 22,5% do total da longarina da asa e a espessura do PZT corresponde a 12,1% do total da espessura da longarina. O estudo não considerou o carregamento aerodinâmico incremental presente em um modelo aerodinâmico não-estacionário, e, por consequência, o acoplamento aeroelástico existente no fenômeno.

Trindade e Godoy (2011) apresentam um modelo em elementos finitos para placas laminadas com camadas de material piezoelétrico embutidas, onde a estrutura é conectada a um circuito ativo-passivo ressonante. O autor combina a teoria de placas laminadas de camada simples equivalente e a teoria de deformação de cisalhamento de 3ª ordem (TSDT) para a placa, e um modelo eletromecânico para o material piezoelétrico. O modelo é empregado para otimizar o posicionamento das lâminas de PZT utilizando-se o coeficiente de acoplamento eletromecânico e projetar os componentes do circuito elétrico visando o controle ativo-passivo da vibração da estrutura.

3. Formulação do Problema

3.1. Equações Constitutivas do Material Piezoelétrico

Considere um meio elástico elétrico tridimensional. O deslocamento elétrico na ausência de esforços mecânicos relaciona-se com o campo elétrico através da relação (IEEE, 1976)

$$\{D\} = [\xi]\{E\} \quad (3.1)$$

Similarmente, um corpo elástico exposto a um campo elétrico nulo apresenta a seguinte relação entre deformação e tensão mecânica:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (3.2)$$

Acoplando as relações puramente elétricas com as relações puramente mecânicas, pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \{D\} \\ \{\varepsilon\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\xi] & [d] \\ [d]^T & [S] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E\} \\ \{\sigma\} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde a matriz $[d]$ relaciona o deslocamento elétrico com tensão mecânica em um campo elétrico nulo ou relaciona a deformação mecânica com o campo elétrico na ausência de tensões mecânicas sobre o meio. Portanto, a matriz $[d]$ representa o acoplamento eletromecânico do sistema. A equação (3.3) pode ser desmembrada em

$$\{D\} = [\xi]\{E\} + [d]\{\sigma\} \quad (3.4)$$

$$\{\varepsilon\} = [d]^T\{E\} + [S]\{\sigma\} \quad (3.5)$$

Nas duas equações anteriores, emprega-se a relação $\{\sigma\} = [\bar{Q}]\{\varepsilon\}$ e obtém-se,

$$\{D\} = [\xi]\{E\} + [e]\{\varepsilon\} \quad (3.6)$$

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}]\{\varepsilon\} - [e]^T\{E\} \quad (3.7)$$

onde $[e] = [d][\bar{Q}]$. Os elementos e_{ij} da matriz $[e]$ representam a sensibilidade do elemento piezoelétrico na direção i quando lhe é imposto um esforço na direção j e vice-versa. As equações (3.6) e (3.7) são denominadas respectivamente equações constitutivas para o elemento sensor piezoelétrico e elemento atuador piezoelétrico.

3.2. Equações Constitutivas do Laminado

Admite-se que as N lâminas que constituem a placa da figura 3.1 sejam de material homogêneo, ortotrópico e elástico linear. Para uma lâmina genérica k , mostrada na figura 3.2, tem-se

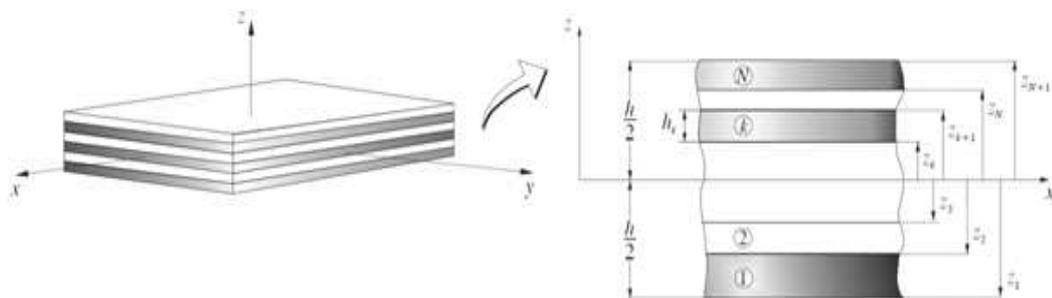


Figura 3.1 – Placa laminada.

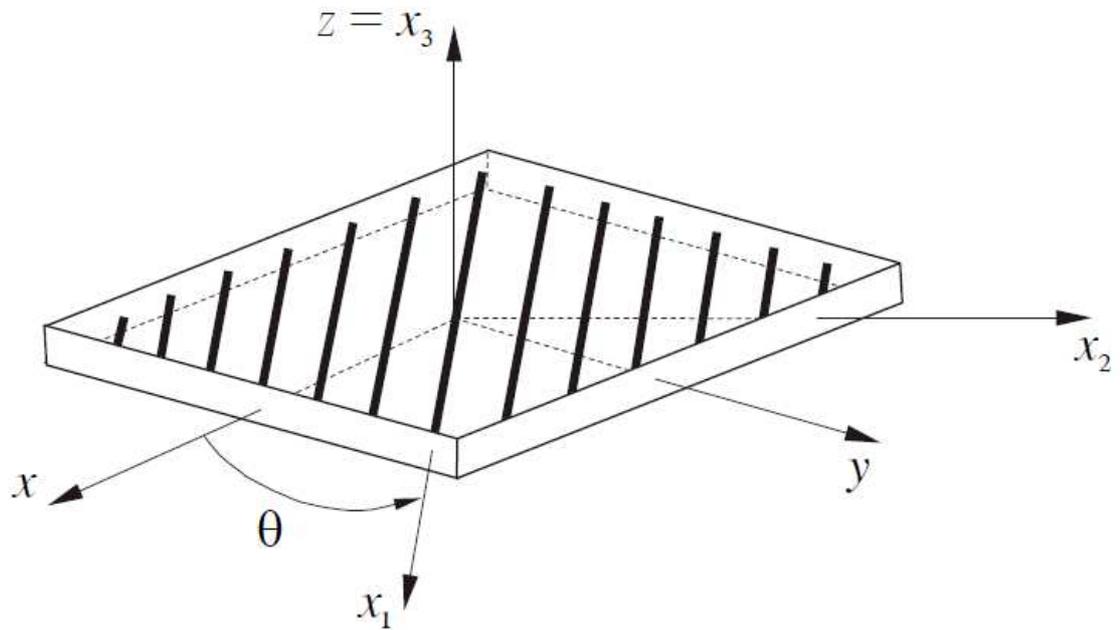


Figura 3.2 - Eixos principais do material.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.8)$$

onde:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{33} = G_{12}$$

O comportamento mecânico da lâmina na direção das fibras (direção x_1) é dominado pelas propriedades das fibras, enquanto que o comportamento na direção transversal (x_2 e x_3) é dominado pelas propriedades da matriz. O comportamento mecânico da placa no plano xy dependerá da orientação das fibras. O sistema $x_1x_2x_3$ é obtido de xyz por uma rotação θ do

plano xy , no sentido anti-horário, em torno do eixo $z = x_3$. As componentes de deformação e de tensão mantêm as seguintes relações nos dois sistemas de coordenadas:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} &= [T_1]^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \\ \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} &= [T_1]^{(k)T} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

em que

$$[T_1]^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}^{(k)} \quad (3.10)$$

As equações constitutivas da lâmina no sistema xyz são obtidas por (3.8) e (3.9):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.11)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} = [T_1]^{(k)T} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}^{(k)} [T_1]^{(k)} \quad (3.12)$$

Os coeficientes \bar{Q}_{ij} são explicitados por

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
\bar{Q}_{13} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
\bar{Q}_{23} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
\bar{Q}_{33} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{33}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Considerando um laminado composto por n lâminas e assumindo as hipóteses de Kirchhoff-Love para placas e cascas finas, na qual um segmento de reta normal à superfície média, após a deformação, permanece reto, conserva-se normal a esta superfície e mantém o mesmo comprimento (LUCENA NETO, 2005). A deformação do laminado em termos da deformação da superfície média e da curvatura é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

onde ζ é medido a partir da superfície média do laminado. Definem-se as tensões e momentos internos resultantes como:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} d\zeta \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \zeta d\zeta \quad (3.15)$$

Empregando-se as relações (3.11) a (3.15), as resultantes de tensão, momento e cisalhamento transversal podem ser escritas em termos de deformação da superfície média, curvatura e deformação de cisalhamento transversal através das equações (3.16):

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

As relações (3.16) representam as equações constitutivas de um laminado, onde os parâmetros de rigidez de membrana A_{ij} , rigidez de flexão D_{ij} e de acoplamento membrana-flexão B_{ij} são dados por:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ijk} (\zeta_{k+1} - \zeta_k) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ijk} (\zeta_{k+1}^2 - \zeta_k^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ijk} (\zeta_{k+1}^3 - \zeta_k^3) \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.17)$$

3.3. Relação Deformação-Deslocamento

A relação deformação-deslocamento foi desenvolvida considerando-se a teoria de cascas, assumindo-se hipóteses de Kirchhoff correspondentes ao modelo de casca achatada,

que é de uso bastante difundido na literatura. As seguintes hipóteses foram adotadas no modelo estrutural:

- A espessura é pequena em relação aos raios de curvatura e às outras dimensões da casca;
- Um segmento de reta normal à superfície média antes da deformação permanece reto após a deformação, não havendo empenamento da seção;
- O segmento de reta normal mantém o mesmo comprimento, não havendo variação de espessura durante a deformação; e
- O segmento de reta normal à superfície média, após a deformação, conserva-se normal a esta superfície.

A primeira hipótese valida o emprego da teoria de cascas finas. A segunda e terceira hipóteses correspondem às hipóteses de Reissner-Mindlin e Kirchhoff. A quarta hipótese representa a aproximação de Kirchhoff. A segunda hipótese implica em deformação normal à superfície média (ϵ_{zz}) nula. A quarta hipótese implica em deformações de cisalhamento transversal (ϵ_{xz} e ϵ_{yz}) nulas. As deformações normais ϵ_1 e ϵ_2 , como podem ser vistas na figura (3.3), são dadas em sua forma vetorial por (WANG, 1953):

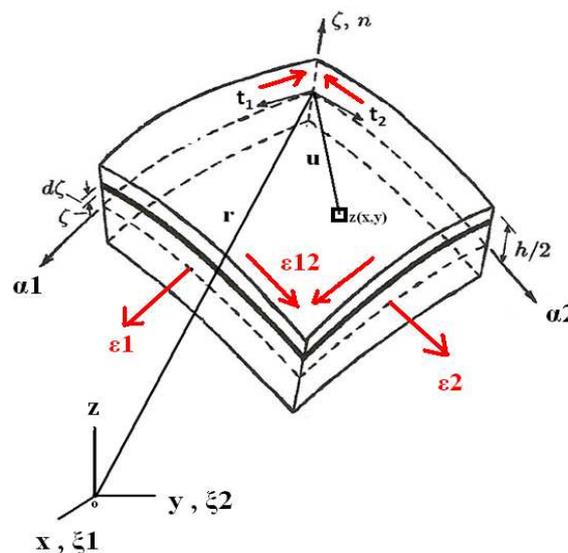


Figura 3.3 – Elemento infinitesimal de casca.

$$\epsilon_n = \frac{1}{\alpha_n^2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_n} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_n} \right), \quad n = 1,2; \quad (3.18)$$

onde $\alpha_n = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_n} \right| (1 + \frac{\zeta}{R_n})$ e \mathbf{r} é o vetor de posição de um ponto no laminado sobre a superfície média. O vetor de deslocamento \mathbf{u} é dado por:

$$\mathbf{u} = u\mathbf{t}_1 + v\mathbf{t}_2 + w\mathbf{n} \quad (3.19)$$

A deformação de cisalhamento em uma superfície paralela à superfície média é dada por:

$$\gamma_{12} = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) \quad (3.20)$$

As equações (3.18) e (3.20) podem ser empregadas na hipótese de grandes deformações e também em pequenas deformações, desprezando-se os últimos termos do lado direito das equações. Reduzindo-se estas relações as suas formas escalares, estas equações se transformam em:

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \bar{\epsilon}_n - \zeta \kappa_n, \quad n = 1,2 \\ \epsilon_{12} &= \bar{\epsilon}_{12} - 2\zeta \kappa_{12} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Onde $\bar{\epsilon}_n$ e $\bar{\epsilon}_{12}$ são as deformações de membrana, e κ_n e κ_{12} representam a curvatura da superfície média. Adotando-se a notação de WASHIZU (1960), as deformações de membrana e curvaturas da superfície média são relacionadas aos deslocamentos u , v e w por:

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon}_1 &= l_{11} + \frac{1}{2}(l_{11}^2 + l_{21}^2 + l_{31}^2) \\
\bar{\epsilon}_2 &= l_{22} + \frac{1}{2}(l_{12}^2 + l_{22}^2 + l_{32}^2) \\
\bar{\epsilon}_{12} &= \frac{1}{2}(l_{12} + l_{21}) + \frac{1}{2}(l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} + l_{31}l_{32}) \\
\kappa_1 &= \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial l_{31}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} l_{32} \\
\kappa_2 &= \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial l_{32}}{\partial \xi_2} + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} l_{31} \\
2\kappa_{12} &= \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial l_{32}}{\partial \xi_1} - \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} l_{32} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial l_{31}}{\partial \xi_2} - \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} l_{31}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

onde

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{v}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} - \frac{w}{R_1} & l_{12} &= \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} - \frac{v}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \\
l_{21} &= \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} - \frac{u}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} & l_{22} &= \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} + \frac{u}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} - \frac{w}{R_2} \\
l_{31} &= \frac{u}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} & l_{32} &= \frac{v}{R_2} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

É importante observar que as equações que definem as deformações de membrana da superfície média em (3.22) retêm os termos não-lineares, porém, apenas termos lineares definem as curvaturas. Esta combinação de termos é freqüentemente usada em problemas de

aeroelasticidade de cascas, onde pequenas vibrações são executadas em torno da posição de equilíbrio, na qual a deformação estática de membrana pode ser grande.

Normalmente, os painéis da asa são planos e os painéis da fuselagem possuem pequena curvatura. Desta forma, a análise mais adequada para este tipo de estrutura é o emprego da teoria de casca achatada, que envolverá simplificações nas equações (3.22) e (3.23).

Qualitativamente, a casca achatada possui valor pequeno para as derivadas da superfície média em relação aos eixos coordenados x e y , em todos os pontos. REISSNER (1955) sugere que a teoria de casca achatada será tão precisa quanto menor que $1/8$ forem estas derivadas.

Neste trabalho, a teoria de casca achatada foi empregada no sistema de coordenadas retangulares, considerando um painel cilíndrico de uma curvatura (característico de fuselagem). Os seguintes valores foram considerados para os parâmetros das equações (3.22) e (3.23):

$$\xi_1 = x$$

$$\xi_2 = y$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$R_2 = \infty$$

$$R_1 = R \tag{3.24}$$

Os vetores unitários tangentes e normais à superfície de referência, como podem ser observados na figura (3.3), são dados por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_1 &= \mathbf{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{k} \\
\mathbf{t}_2 &= \mathbf{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\
\mathbf{n} &= - \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \mathbf{k}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

O vetor posição da superfície de referência é definido por:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z(x, y)\mathbf{k} \tag{3.26}$$

Quantitativamente, estabelecem-se as seguintes simplificações quanto ao emprego da teoria de casca achatada:

$$\begin{aligned}
1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 &\approx 1 & 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 &\approx 1 & 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &\approx 1 \\
1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 &\approx 1 & 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 &\approx 1 & 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) &\approx 1 \\
1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 &\approx 1 & 1 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 &\approx 1 & 1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) &\approx 1
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Substituindo-se as equações (3.23) a (3.26) e as simplificações (3.27) em (3.22), obtêm-se as seguintes relações deformação-deslocamento:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3.28}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

As deformações podem ser escritas da seguinte forma:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{yy}^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

e

$$\{\varepsilon^m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{yy}^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

onde $\{\varepsilon^m\}$ são as deformações de membrana e $\{\kappa\}$ são as deformações devido à flexão.

Admitindo-se que o potencial elétrico ϕ varie linearmente ao longo da espessura das camadas piezoelétricas e se mantém constante no plano destas, matematicamente

$$\phi(z) = \left(1 + \frac{z_k - z}{h_k}\right) \phi_k, \quad z_k \leq z \leq z_{k+1} \quad (3.31)$$

A relação entre campo e potencial elétrico, assumindo campo elétrico conservativo, é dada por:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Substituindo-se (3.31) em (3.32), tem-se

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= 0 \\ E_z &= \frac{\phi_k}{h_k}, \quad z_k \leq z \leq z_{k+1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

As equações (3.6) e (3.7) podem ser reescritas como:

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{e}_{11} & \bar{e}_{21} & \bar{e}_{31} \\ \bar{e}_{12} & \bar{e}_{22} & \bar{e}_{32} \\ \bar{e}_{13} & \bar{e}_{23} & \bar{e}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{11} & \bar{\xi}_{12} & \bar{\xi}_{13} \\ \bar{\xi}_{21} & \bar{\xi}_{22} & \bar{\xi}_{23} \\ \bar{\xi}_{31} & \bar{\xi}_{32} & \bar{\xi}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{e}_{11} & \bar{e}_{12} & \bar{e}_{13} \\ \bar{e}_{12} & \bar{e}_{22} & \bar{e}_{23} \\ \bar{e}_{13} & \bar{e}_{23} & \bar{e}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

Considerando uma placa cujas lâminas são de material elástico linear, homogêneo, ortotrópico, além disso, as lâminas piezoelétricas são polarizadas apenas na direção z e o material não apresenta direção preferencial no plano, portanto $e_{13} = e_{23}$, as equações (3.34) se reduzem a

$$\begin{Bmatrix} D_{xx} \\ D_{yy} \\ D_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{e}_{13} & \bar{e}_{13} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + E_z \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\xi}_{33} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - E_z \begin{Bmatrix} \bar{e}_{13} \\ \bar{e}_{13} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Portanto,

$$D_z = [\bar{e}]^T \{\varepsilon\} + E_z \bar{\xi}_{33} \quad (3.37)$$

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}]\{\varepsilon\} - E_z \{\bar{e}\} \quad (3.38)$$

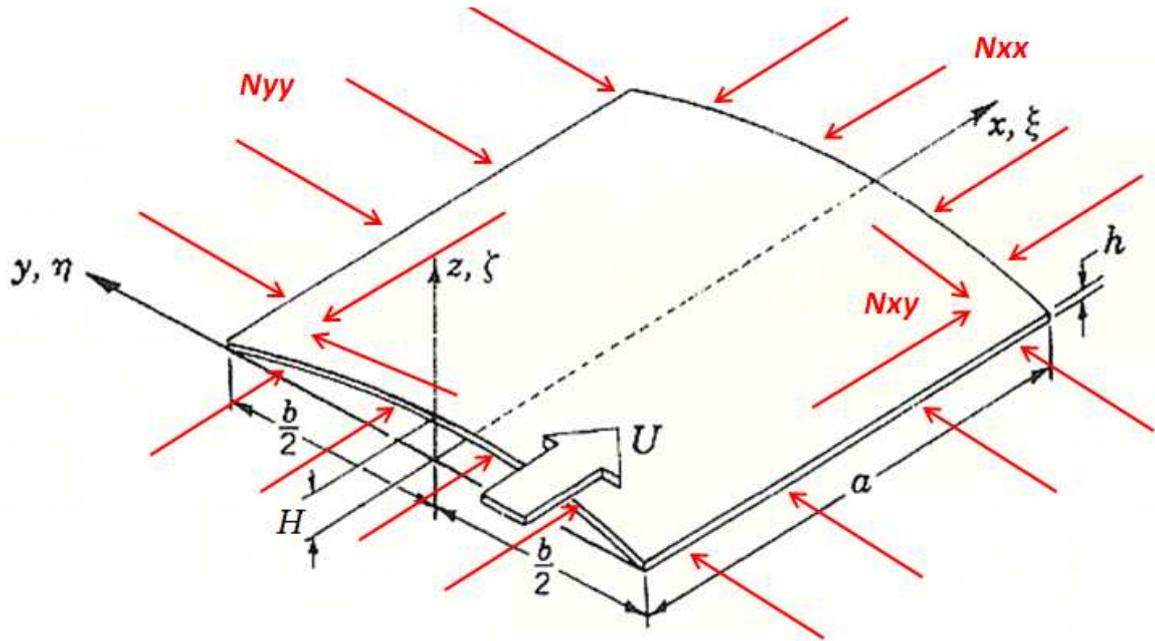


Figura 3.4 – Painel curvo retangular na presença de escoamento aerodinâmico.

3.4. Princípio de Hamilton

As equações de equilíbrio do sistema são obtidas através da aplicação do Princípio de Hamilton:

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1} \delta(T - U)dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0 \quad (3.39)$$

onde T é a energia cinética do sistema físico, U representa a energia de deformação e W o trabalho das forças externas ao sistema. Este princípio estabelece que quando o primeiro variacional do funcional de energia é nulo, em um intervalo de tempo $\Delta t = t_1 - t_0$, tem-se uma condição de equilíbrio do sistema.

3.5. Energia Cinética do Sistema

A energia cinética do sistema do sistema é dada por

$$T = \frac{1}{2} \int \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA \quad (3.40)$$

onde ρ é a densidade do material por unidade de área e h é a espessura da casca.

3.6. Energia de Deformação

A energia de deformação de um sistema eletromecânico casca laminada e camadas piezoelétricas pode ser escrito como (REDDY, 1997):

$$U = \frac{1}{2} \int \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \frac{1}{2} \int \{E\}^T \{D\} dV \quad (3.41)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (3.41) representa a energia de deformação da casca e o segundo termo corresponde à energia devido à atuação piezoelétrica. Substituindo-se as equações (3.37) e (3.38) em (3.41), tem-se

$$U = \frac{1}{2} \int \{\varepsilon\}^T ([\bar{Q}] \{\varepsilon\} - E_z \{\bar{e}\}) dV - \frac{1}{2} \int E_z (\{\bar{e}\}^T \{\varepsilon\} + E_z \bar{\xi}_{33}) dV \quad (3.42)$$

Substituindo-se (3.29) em (3.42), tem-se

$$U = \frac{1}{2} \int (\{\varepsilon^m\} + z\{\kappa\})^T [\bar{Q}] (\{\varepsilon^m\} + z\{\kappa\}) dV - \int (\{\varepsilon^m\} + z\{\kappa\})^T E_z \{\bar{e}\} dV - \frac{1}{2} \int E_z^2 \bar{\xi}_{33} dV \quad (3.43)$$

Desenvolvendo-se a equação (3.43):

$$U = \frac{1}{2} \int \{\varepsilon^m\}^T [\bar{Q}] \{\varepsilon^m\} dV + \frac{1}{2} \int z \{\varepsilon^m\}^T [\bar{Q}] \{\kappa\} dV + \frac{1}{2} \int z \{\kappa\}^T [\bar{Q}] \{\varepsilon^m\} dV + \frac{1}{2} \int z^2 \{\kappa\}^T [\bar{Q}] \{\kappa\} dV - \int (\{\varepsilon^m\}^T E_z \{\bar{e}\} + z \{\kappa\}^T E_z \{\bar{e}\}) dV - \frac{1}{2} \int E_z^2 \bar{\xi}_{33} dV \quad (3.44)$$

Integrando-se a equação (3.44) na direção da espessura z , obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \int (\{\varepsilon^m\}^T [A] \{\varepsilon^m\} + \{\varepsilon^m\}^T [B] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B] \{\varepsilon^m\} + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\}) dA + \int (\{\varepsilon^m\}^T \{N_p\} + \{\kappa\}^T \{M_p\}) dA - \frac{1}{2} \bar{\xi}_{33} A \int_{-h_p - \frac{h}{2}}^{h_p + \frac{h}{2}} E_z^2 dz \quad (3.45)$$

Na equação (3.45), A representa a área da superfície da casca, h_p é a espessura das lâminas piezoelétricas e h é a espessura do laminado. As matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ são dadas pela equação (3.17). Os vetores $\{N_p\}$ e $\{M_p\}$ representam, respectivamente, as tensões resultantes e momentos piezoelétricos ao longo da espessura do laminado, e são dados por:

$$\{N_p\} = - \int_{-h_p - \frac{h}{2}}^{h_p + \frac{h}{2}} E_z \{\bar{e}\} dz \quad (3.46)$$

$$\{M_p\} = - \int_{-h_p - \frac{h}{2}}^{h_p + \frac{h}{2}} z E_z \{\bar{\epsilon}\} dz \quad (3.47)$$

A equação (3.47) é identicamente nula, dado que E_z e $\bar{\epsilon}$ são constantes.

Existem dois tipos de acoplamento membrana-flexão em problemas de *flutter* em painéis laminados curvos: acoplamento material e acoplamento geométrico. O primeiro ocorre quando o laminado é assimétrico. O acoplamento geométrico ocorre quando o painel é curvo ou quando são considerados os termos não-lineares da deformação de membrana do elemento de placa ou casca.

Nesta tese foi considerado apenas laminado simétrico, desta forma, o acoplamento material é nulo e, como pode ser visto na equação (3.17), a matriz [B] é nula. Assim, o único acoplamento que existe neste trabalho é o geométrico. Desta forma, a equação (3.45) se reduz a:

$$U = \frac{1}{2} \int (\{\epsilon^m\}^T [A] \{\epsilon^m\} + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\}) dA + \int (\{\epsilon^m\}^T \{N_p\}) dA - \frac{1}{2} \bar{\xi}_{33} A \int_{-h_p - \frac{h}{2}}^{h_p + \frac{h}{2}} E_z^2 dz \quad (3.48)$$

Estabelecendo-se a seguinte relação entre tensão resultante e momento na superfície de referência do laminado simétrico:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^m\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

E invertendo-se a relação que fornece $\{N\}$, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon^m\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^*] & 0 \\ 0 & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

onde $[A^*] = [A]^{-1}$, e

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

Definindo-se a função de tensão de Airy como (DOWELL, 1975)

$$N_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad N_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3.52)$$

a equação (3.48) se transforma em

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int (\{N\}^T [A^*] \{N\}) dA + \frac{1}{2} \int (\{\kappa\}^T \{M\}) dA + \int (\{\varepsilon^m\}^T \{N_p\}) dA \\ & - \frac{1}{2} \bar{\xi}_{33} A \int_{-h_p - \frac{h}{2}}^{h_p + \frac{h}{2}} E_z^2 dz \end{aligned} \quad (3.53)$$

Desenvolvendo a equação acima, tem-se que:

$$\begin{aligned}
U = & \int -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \frac{w}{R} dA + \int \left[A_{11}^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + A_{12}^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) - A_{13}^* \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right] \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) dA \\
& + \int \left[A_{12}^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + A_{22}^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) - A_{23}^* \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right] \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) dA - \int \left[A_{13}^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \right. \\
& + A_{23}^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) - A_{33}^* \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \left. \right] \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dA + \int \left[D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA \\
& + \int \left[D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dA + \int 4D_{33} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 dA \\
& + \frac{1}{2} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 N_{xx}^p + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 N_{yy}^p + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\right) N_{xy}^p \right\} dA - \frac{1}{2} \bar{\xi}_{33} A \int_{-h_p - \frac{h}{2}}^{h_p + \frac{h}{2}} E_z^2 dz \quad (3.54)
\end{aligned}$$

3.7. Trabalho da Força Aerodinâmica

O trabalho da força aerodinâmica W_A corresponde ao trabalho do escoamento potencial aerodinâmico sobre o painel oscilante:

$$W_A = \int w \Delta p^M dA \quad (3.55)$$

Usando-se a aproximação de primeira ordem da teoria linear do escoamento potencial, conhecida na literatura como teoria do pistão (BISMARCK-NARS, 1999), tem-se a seguinte relação entre a pressão Δp^M e a variável w :

$$\Delta p^M = \frac{2Q_\infty}{V_\infty \sqrt{M^2 - 1}} \left(V_\infty \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (3.56)$$

Desprezando-se o amortecimento aerodinâmico, isto é, o termo proporcional à velocidade, tem-se o caso conhecido na literatura como aproximação quase-estacionária da teoria linear do escoamento potencial (BISMARCK, 1999), e a equação (3.56) se reduz a:

$$\Delta p^M = \frac{2Q_\infty}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.57)$$

O trabalho da força aerodinâmica é dado por

$$W = \int w \frac{2Q_\infty}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} dA \quad (3.58)$$

3.8. Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio e as condições de contorno do problema são obtidas inserindo-se as equações (3.40), (3.54) e (3.58) em (3.39), aplicar a primeira variação ao funcional de Hamilton e torná-lo igual a zero.

$$\begin{aligned}
\delta\pi = & \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \int \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA + \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{w}{R} dA - \int A_{11}^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dA \right. \\
& - \int \left[A_{12}^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - A_{13}^* \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dA - \int \left[A_{12}^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + A_{22}^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right. \\
& - A_{23}^* \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \left. \right] \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dA + \int \left[A_{13}^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + A_{23}^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - A_{33}^* \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dA \\
& - \int \left[D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA - \int \left[D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\
& + 2D_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dA - 2 \int \left[D_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dA \\
& + \frac{1}{2} \bar{\xi}_{33} A \int_{-h_P - \frac{h}{2}}^{h_P + \frac{h}{2}} E_z^2 dz + \int w \frac{2Q_\infty}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} dA + \phi \bar{e}_{13} \int \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA \Big) dt \quad (3.59)
\end{aligned}$$

Observando-se que π é função de F e w , a equação (3.59) mostra que a energia potencial total é uma função do tipo $\pi = \pi(F, w)$, onde estas variáveis são as coordenadas generalizadas do funcional de energia do problema. Pela teoria da Mecânica Clássica, as equações de Euler-Lagrange e as condições de contorno do problema são obtidas quando se aplica a condição de estacionariedade ao funcional de energia do sistema, ou seja, $\delta I = 0$. Matematicamente, esta condição é dada pelo variacional do funcional de energia aplicado às coordenadas generalizadas do problema.

O variacional do funcional é dado por:

$$\begin{aligned}
\delta\pi &= \int_A [\rho h \dot{w} \delta w]_{t_0}^{t_1} dA - \int_{t_0}^{t_1} \int_A [\rho h \ddot{w} \delta w] w dA dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_A \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta w dA dt \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[\frac{w}{R} \delta \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} \delta F \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} dx dt \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \int_A \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta F dA dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[2A_{11} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} dx dt \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[2A_{11} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \delta F \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_A 2A_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \delta F dA dt \\
&- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[\left[A_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - A_{13} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right] \delta \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} dx dt \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[\left[A_{12} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - A_{13} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right] \delta F \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} dx dt \\
&- \int_{t_0}^{t_1} \int_A \left[A_{12} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - A_{13} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} \right] \delta F dA dt \\
&- \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\left[A_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - A_{23} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right] \delta \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right]_{x=0}^{x=a} dy dt \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\left[A_{12} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - A_{23} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \right] \delta F \right]_{x=0}^{x=a} dy dt \\
&- \int_{t_0}^{t_1} \int_A \left[A_{12} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - A_{23} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} \right] \delta F dA dt \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[\left[A_{13} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + A_{23} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - A_{33} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right] \delta \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} dx dt
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\left[A_{13} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + A_{23} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - A_{33} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right] \delta F \right]_{x=0}^{x=a} dy dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_A \left[A_{13} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + A_{23} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} - A_{33} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \delta F dAdt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\left[D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_{x=0}^{x=a} dy dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\left[D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta w \right]_{x=0}^{x=a} dy dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_A \left[D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2D_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} \right] \delta w dAdt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[\left[D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} dx dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[\left[D_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2D_{23} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \delta w \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} dx dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_A \left[D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2D_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right] \delta w dAdt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[\left[D_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} dx dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\left[D_{13} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + D_{23} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2D_{33} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \delta w \right]_{x=0}^{x=a} dy dt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_A \left[D_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + D_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + 2D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \delta w dAdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_A \frac{2q_\infty}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \, dAdt + 2\phi \bar{e}_{13} \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \delta w \right]_{x=0}^{x=a} dydt \\
& - 2\phi \bar{e}_{13} \int_{t_0}^{t_1} \int_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w \, dAdt + 2\phi \bar{e}_{13} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[\frac{\partial w}{\partial y} \delta w \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} dxdt \\
& - 2\phi \bar{e}_{13} \int_{t_0}^{t_1} \int_A \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta w \, dAdt = 0
\end{aligned}$$

A teoria do cálculo variacional estabelece que a variação das coordenadas generalizadas do problema (δF e δw) pode assumir quaisquer valores, desta forma, para que a condição de estacionariedade do funcional de Hamilton seja observada, as seguintes equações devem ser simultaneamente satisfeitas:

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\
& + 2\phi \bar{e}_{13} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
& A_{22}^* \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + A_{11}^* \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + (A_{12}^* + A_{33}^*) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2A_{23}^* \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} - 2A_{13}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.61)
\end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{2q_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$

As equações (3.61) são as equações de Euler-Lagrange do problema. Note-se que elas formam um sistema de duas equações diferenciais parciais não-lineares e acopladas, cujas incógnitas são o deslocamento vertical w e o campo de tensões de Airy F .

3.9. Condições de Contorno

As condições de contorno do problema são obtidas através da equação (3.60) e são dadas por:

Em $x = 0$ e $x = a$:

Condições Essenciais	Condições Naturais
$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$
$w = 0$	$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$
$w = 0$	$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$
$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$
$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$
$w = 0$	$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$
$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$
$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$
$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$
$F = 0$	$\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = 0$
$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$

$$F = 0$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

$$F = 0$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

Em $y = -b/2$ e $y = b/2$:

Condições Essenciais	Condições Naturais
$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$
$w = 0$	$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$
$w = 0$	$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$
$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$
$w = 0$	$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0$
$w = 0$	$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$
$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$
$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$	$w = 0$

$$\begin{array}{ll}
 F = 0 & \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial y} = 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \\
 F = 0 & \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial y} = 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \\
 F = 0 & \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = 0 \\
 F = 0 & \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial y} = 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial x} = 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0
 \end{array}$$

Nesta tese apenas são consideradas duas condições de contorno: Placa simplesmente apoiada ou placa engastada, nos quatro bordos. Matematicamente estas condições são representadas por:

1) Simplesmente Apoiada:

$$\text{Em } x = 0, \text{ a: } w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

$$\text{Em } y = \pm b/2: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

$$\text{Nos cantos: } \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0;$$

2) Engastada:

$$\text{Em } x = 0, a: \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

$$\text{Em } y = \pm b/2: \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

$$\text{Nos cantos:} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

4. Solução Numérica

A solução numérica do problema é obtida utilizando-se a formulação de elementos finitos. Neste método, a placa é dividida em elementos retangulares, onde cada elemento é composto de quatro pontos nodais com quatro graus de liberdade por nó, que são: q , $q_{,x}$, $q_{,y}$ e $q_{,xy}$, onde q representa w ou F . Desta forma, definem-se as variáveis de campo $w(x,y)$ e $F(x,y)$ como expansão polinomial do tipo:

$$Q(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{16} L_i(\xi, \eta) Q_i \quad (4.1)$$

onde

$$L_1(\xi, \eta) = (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)(2\eta^3 - 3\eta^2 + 1)$$

$$L_2(\xi, \eta) = a(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)(2\eta^3 - 3\eta^2 + 1)$$

$$L_3(\xi, \eta) = b(2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)(\eta^3 - 2\eta^2 + \eta)$$

$$L_4(\xi, \eta) = ab(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)(\eta^3 - 2\eta^2 + \eta)$$

$$L_5(\xi, \eta) = (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)(-2\eta^3 + 3\eta^2)$$

$$L_6(\xi, \eta) = a(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)(-2\eta^3 + 3\eta^2)$$

$$L_7(\xi, \eta) = b(2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)(\eta^3 - \eta^2)$$

$$L_8(\xi, \eta) = ab(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)(\eta^3 - \eta^2) \quad (4.2)$$

$$L_9(\xi, \eta) = (-2\xi^3 + 3\xi^2)(-2\eta^3 + 3\eta^2)$$

$$L_{10}(\xi, \eta) = a(\xi^3 - \xi^2)(-2\eta^3 + 3\eta^2)$$

$$L_{11}(\xi, \eta) = b(-2\xi^3 + 3\xi^2)(\eta^3 - \eta^2)$$

$$L_{12}(\xi, \eta) = ab(\xi^3 - \xi^2)(\eta^3 - \eta^2)$$

$$L_{13}(\xi, \eta) = (-2\xi^3 + 3\xi^2)(2\eta^3 - 3\eta^2 + 1)$$

$$L_{14}(\xi, \eta) = a(\xi^3 - \xi^2)(2\eta^3 - 3\eta^2 + 1)$$

$$L_{15}(\xi, \eta) = b(-2\xi^3 + 3\xi^2)(\eta^3 - 2\eta^2 + \eta)$$

$$L_{16}(\xi, \eta) = ab(\xi^3 - \xi^2)(\eta^3 - 2\eta^2 + \eta)$$

e

$$Q_1 = Q_{11}$$

$$Q_2 = Q_{,\xi_{11}}$$

$$Q_3 = Q_{,\eta_{11}}$$

$$Q_4 = Q_{,\xi\eta_{11}}$$

$$Q_5 = Q_{12}$$

$$Q_6 = Q_{,\xi_{12}}$$

$$Q_7 = Q_{,\eta_{12}}$$

(4.3)

$$Q_8 = Q_{,\xi\eta_{12}}$$

$$Q_9 = Q_{22}$$

$$Q_{10} = Q_{,\xi_{22}}$$

$$Q_{11} = Q_{,\eta_{22}}$$

$$Q_{12} = Q_{,\xi\eta_{22}}$$

$$Q_{13} = Q_{21}$$

$$Q_{14} = Q_{,\xi_{21}}$$

$$Q_{15} = Q_{,\eta_{21}}$$

$$Q_{16} = Q_{,\xi\eta_{21}}$$

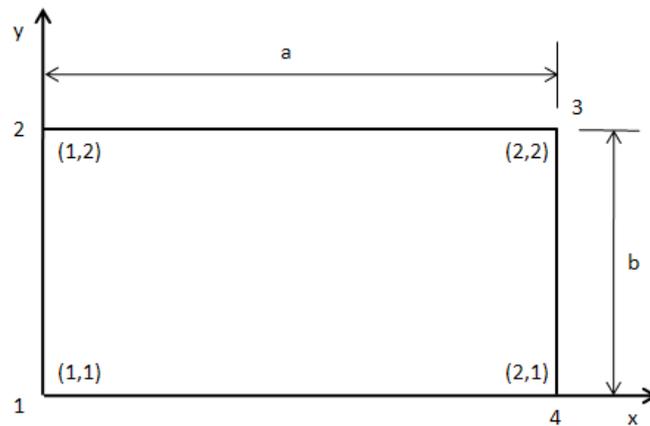


Figura 4.1 – Notação dos pontos nodais de um elemento retangular.

onde $\xi = x/a$ e $\eta = y/b$. Os polinômios L_i em (4.2) são funções de Hermite, que obedecem à condição de continuidade C^1 do funcional de energia para que seja obtida a convergência da

solução em elementos finitos (BISMARCK-NARS, 1992). Substituindo-se (4.1) em (3.59), onde w e F são dados por funções do tipo $Q(\zeta, \eta)$, obtém-se as seguintes equações matriciais

$$[M]\{\ddot{w}\} + \lambda[A] + [C]\{\dot{w}\} + [K_{ww}]\{w\} + [K_{wF}]\{F\} + N_P([K_{Gx}] + [K_{Gy}])\{w\} = 0 \quad (4.4)$$

$$[K_{Fw}]\{w\} + [K_{FF}]\{F\} = 0$$

onde

$$[M] = \rho h R2_a(n_i, n_j)R2_b(m_i, m_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, 16 \quad (4.5)$$

$$[A] = S2_a(n_i, n_j)R2_b(m_i, m_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, 16 \quad (4.6)$$

$$[K_{ww}] = D_{11}K^{(1)} + D_{22}K^{(2)} + D_{12}K^{(3)} + 4D_{33}K^{(4)} + 2D_{13}K^{(5)} + 2D_{23}K^{(6)} \\ + N_P K_{GN_{yy}} + N_P K_{GN_{xx}} \quad (4.7)$$

$$[K_{FF}] = A_{22}^*K^{(1)} + A_{11}^*K^{(2)} + A_{12}^*K^{(3)} + A_{33}^*K^{(4)} - A_{23}^*K^{(5)} - A_{13}^*K^{(6)} \quad (4.8)$$

$$[K_{wF}] = \frac{1}{R}K^{(7)} \quad (4.9)$$

$$[K_{Fw}] = [K_{wF}]^T \quad (4.10)$$

Na equação (4.4), a matriz $[C]$ representa o amortecimento estrutural do painel. Este parâmetro em estruturas aeronáuticas é muito pequeno, desta forma, a influência do amortecimento estrutural foi desprezada neste estudo.

Nas equações acima, as matrizes $K^{(i)}$ são dadas por

$$K^{(1)} = R1_a(n_i, n_j)R2_b(m_i, m_j) \quad (4.11)$$

$$K^{(2)} = R2_a(n_i, n_j)R1_b(m_i, m_j) \quad (4.12)$$

$$K^{(3)} = S1_a(n_i, n_j)S1_b(m_j, m_i) + S1_a(n_j, n_i)S1_b(m_i, m_j) \quad (4.13)$$

$$K^{(4)} = R3_a(n_i, n_j)R3_b(m_i, m_j) \quad (4.14)$$

$$K^{(5)} = S3_a(n_i, n_j)S2_b(m_j, m_i) + S3_a(n_j, n_i)S2_b(m_j, m_i) \quad (4.15)$$

$$K^{(6)} = S3_b(m_i, m_j)S2_a(n_i, n_j) + S3_b(m_j, m_i)S2_a(n_j, n_i) \quad (4.16)$$

$$K^{(7)} = S1_a(n_j, n_i)R2_b(m_i, m_j) \quad (4.17)$$

Os vetores de índices $\{m\}$ e $\{n\}$ são dados por

$$\{m\} = (1,1,3,3,2,2,4,4,2,2,4,4,1,1,3,3)^T \quad (4.18)$$

$$\{n\} = (1,3,1,3,1,3,1,3,2,4,2,4,2,4,2,4)^T \quad (4.19)$$

As matrizes R e S são dadas por

$$R1_a = \begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{-12}{a^3} & \frac{6}{a^2} & \frac{6}{a^2} \\ -12 & 12 & -6 & -6 \\ \frac{a^3}{6} & \frac{a^3}{-6} & \frac{a^2}{4} & \frac{a^2}{2} \\ \frac{a^2}{6} & \frac{a^2}{-6} & \frac{a}{2} & \frac{a}{4} \\ \frac{6}{a^2} & \frac{-6}{a^2} & \frac{2}{a} & \frac{4}{a} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$R2_a = \begin{bmatrix} \frac{13a}{35} & \frac{9a}{70} & \frac{11a^2}{210} & \frac{-13a^2}{420} \\ \frac{9a}{70} & \frac{13a}{35} & \frac{13a^2}{420} & \frac{-11a^2}{210} \\ \frac{11a^2}{210} & \frac{13a^2}{420} & \frac{a^3}{105} & \frac{-a^3}{140} \\ \frac{-13a^2}{420} & \frac{-11a^2}{210} & \frac{-a^3}{140} & \frac{a^3}{105} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$R3_a = \begin{bmatrix} \frac{6}{5a} & \frac{-6}{5a} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{-6}{5a} & \frac{6}{5a} & \frac{-1}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{6}{5a} & \frac{-6}{5a} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{2a}{15} & \frac{-a}{30} \\ \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{-a}{15} & \frac{2a}{30} \\ \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{-a}{30} & \frac{2a}{15} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$S1_a = \begin{bmatrix} \frac{-6}{5a} & \frac{6}{5a} & \frac{-1}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{6}{5a} & \frac{-6}{5a} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{6}{5a} & \frac{-6}{5a} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{-11}{10} & \frac{1}{10} & \frac{-2a}{15} & \frac{a}{30} \\ \frac{10}{10} & \frac{10}{10} & \frac{15}{30} & \frac{30}{15} \\ \frac{-1}{10} & \frac{11}{10} & \frac{a}{30} & \frac{-2a}{15} \\ \frac{10}{10} & \frac{10}{10} & \frac{15}{30} & \frac{30}{15} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$S2_a = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-a}{10} & \frac{a}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{10} & \frac{-a}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{10} & \frac{10}{60} \\ \frac{a}{10} & \frac{-a}{10} & 0 & \frac{a^2}{60} \\ \frac{-a}{10} & \frac{a}{10} & \frac{-a^2}{60} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$S3_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{-1}{a} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{a} & \frac{1}{a} \\ -1 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{a} & \frac{-1}{a} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$R1_b = \begin{bmatrix} \frac{12}{b^3} & \frac{-12}{b^3} & \frac{6}{b^2} & \frac{6}{b^2} \\ -12 & 12 & -6 & -6 \\ \frac{6}{b^3} & \frac{-6}{b^3} & \frac{4}{b^2} & \frac{2}{b^2} \\ \frac{6}{b^2} & \frac{-6}{b^2} & \frac{2}{b} & \frac{4}{b} \\ \frac{6}{b^2} & \frac{-6}{b^2} & \frac{2}{b} & \frac{4}{b} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$R2_b = \begin{bmatrix} \frac{13b}{35} & \frac{9b}{70} & \frac{11b^2}{210} & \frac{-13b^2}{420} \\ \frac{9b}{70} & \frac{13b}{35} & \frac{13b^2}{420} & \frac{-11b^2}{210} \\ \frac{11b^2}{210} & \frac{13b^2}{420} & \frac{b^3}{105} & \frac{-b^3}{140} \\ -13b^2 & -11b^2 & -b^3 & b^3 \\ \frac{420}{420} & \frac{210}{210} & \frac{140}{140} & \frac{105}{105} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$R3_b = \begin{bmatrix} \frac{6}{5b} & \frac{-6}{5b} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -6 & 6 & -1 & -1 \\ \frac{6}{5b} & \frac{-6}{5b} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{2b}{15} & \frac{-b}{30} \\ \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{-b}{30} & \frac{2b}{15} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$S1_b = \begin{bmatrix} \frac{-6}{5b} & \frac{6}{5b} & \frac{-1}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{6}{5b} & \frac{-6}{5b} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{5b}{-11} & \frac{5b}{1} & \frac{10}{-2b} & \frac{10}{b} \\ \frac{10}{-1} & \frac{10}{11} & \frac{15}{b} & \frac{30}{-2b} \\ \frac{10}{10} & \frac{10}{10} & \frac{30}{30} & \frac{15}{15} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$S2_b = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-b}{10} & \frac{b}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{b}{10} & \frac{-b}{10} \\ \frac{b}{10} & \frac{-b}{10} & 0 & \frac{b^2}{60} \\ \frac{-b}{10} & \frac{b}{10} & \frac{-b^2}{60} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$S3_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{b} & \frac{-1}{b} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{-1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{b} & \frac{-1}{b} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Observando-se a equação (4.4), os graus de liberdade referentes à $\{F\}$ podem ser eliminados, através da relação

$$\{F\} = -[K_{FF}]^{-1}[K_{FW}]\{w\} \quad (4.30)$$

Esta condensação dos graus de liberdade $\{F\}$ é feita no nível da estrutura completa.

Substituindo-se (4.30) na primeira equação de (4.4), tem-se

$$[M]\{\ddot{w}\} + \lambda[A] + [K_{ww}]\{w\} - [K_{wF}][K_{FF}]^{-1}[K_{FW}]\{w\} + N_P([K_{Gx}] + [K_{Gy}])\{w\} = 0 \quad (4.31)$$

Definindo-se $[K_{eq}]$ como

$$[K_{eq}] = [K_{ww}] - [K_{wF}][K_{FF}]^{-1}[K_{FW}] \quad (4.32)$$

A equação (4.31) se transforma em

$$[M]\{\ddot{w}\} + [K_{eq}]\{w\} + \lambda[A]\{w\} + N_P([K_{Gx}] + [K_{Gy}])\{w\} = 0 \quad (4.33)$$

Eliminando-se os graus de liberdade prescritos pelas condições de contorno, na equação (4.33), $\{w\}$ representa o vetor de todos os graus de liberdade não-prescritos, de todos os nós do problema. Assumindo-se que o vetor de graus de liberdade do problema é do tipo

$$\{w\} = e^{ist}\{w_0\} \quad (4.34)$$

onde s é a frequência de vibração da estrutura e $\{w_0\}$ é o vetor de graus de liberdade no tempo inicial de observação do problema. A frequência de vibração da estrutura pode ser representada por:

$$s = \omega_r \quad (4.35)$$

onde ω_r é o termo responsável pela parte oscilatória do movimento da estrutura. Matematicamente, equivale representar o movimento da placa por:

$$\{w\} = \{w_0\}e^{i\omega_r t} \rightarrow \{w\} = \{w_0\} \cos(\omega_r t) \quad (4.36)$$

Aplicando-se a relação (4.34) na equação (4.33), tem-se:

$$[\omega^2[M] + [K] + \lambda[A] + N_p([K_{Gx}] + [K_{Gy}])]\{w_0\} = \{0\} \quad (4.37)$$

A equação (4.37) define o problema de autovalor que rege a solução do problema de instabilidade aeroelástica de placas sujeitas ao carregamento piezoelétrico. Nesta relação, $[M]$ é a matriz de massa do problema, $[K]$ a matriz de rigidez estrutural da placa, $[A]$ é a matriz de rigidez aerodinâmica, $[K_{Gx}]$ e $[K_{Gy}]$ são as matrizes de rigidez induzida pelo fenômeno piezoelétrico. Nota-se que quando o carregamento piezoelétrico N_p e o parâmetro de pressão dinâmica do escoamento aerodinâmico λ são nulos, ω representa as frequências naturais de vibração da placa. Por outro lado, à medida que o parâmetro λ aumenta, os valores das frequências ω se alteram até que, quando λ atinge um valor crítico, as frequências de dois modos principais de vibração se coalescem. O posterior aumento de λ provoca o surgimento de frequências complexas conjugadas nestes modos que coalesceram, caracterizando o movimento instável da estrutura, tendo em vista que, a amplitude do movimento harmônico da placa aumenta indefinidamente. Fisicamente, esta condição significa que a oscilação ocorrerá com o aumento da amplitude até a ruptura ou colapso da estrutura. Este valor crítico de λ representa a fronteira da estabilidade aeroelástica da placa. Matematicamente, quando ocorre a coalescência dos modos de vibração, o movimento da placa passa a ser representado por:

$$\{w\} = \{w_0\}e^{i(\omega_R + i\omega_I)t} \rightarrow \{w\} = \{w_0\} * e^{-\omega_I t} \cos(\omega_R t) \quad (4.38)$$

onde a parte imaginária do autovalor é a responsável pelo aumento da amplitude do movimento da estrutura, até o colapso da mesma.

5. Resultados

Inicialmente, a solução pelo método de elementos finitos é validada comparando-se os valores das frequências naturais de vibração livre da placa obtida pelo método com os valores analíticos. Esta validação é acompanhada de uma análise de convergência da malha a ser empregada em todas as análises deste estudo. Em seguida, fez-se a validação do modelo aeroelástico através da comparação com resultados conhecidos na literatura; após esta validação, fez-se uma simulação da coalescência dos modos de vibração de uma placa, bem como o estudo da frequência de vibração destes modos principais, na ocorrência de flutter. O estudo subsequente compreendeu a análise da influência do alongamento, da curvatura e da espessura de um painel de alumínio 2024-T3 sob carregamento piezoelétrico; e a análise da influência do ângulo de laminação na fronteira de estabilidade aeroelástica da placa quando a tensão elétrica é aplicada sobre os atuadores. Finalmente, analisou-se o efeito da aplicação da tensão elétrica invertida sobre os atuadores piezoelétricos e a influência da espessura da placa, em relação à espessura do atuador piezoelétrico. Importante salientar que a espessura dos atuadores piezoelétricos foi mantida constante em todas as análises.

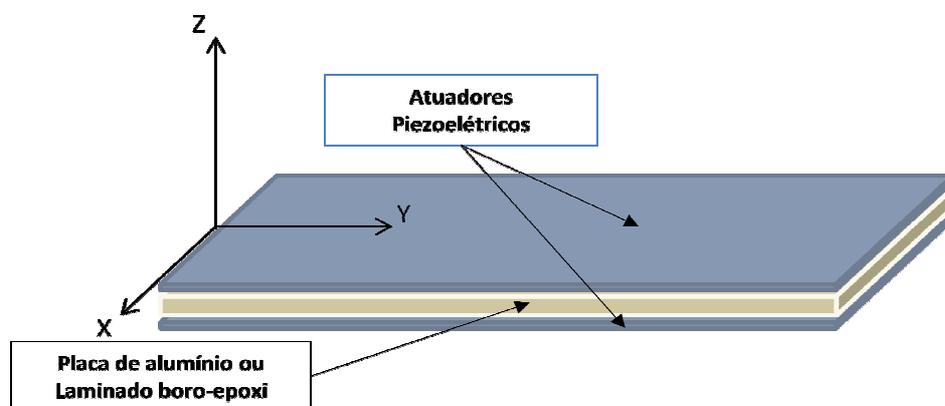


Figura 5.1 – Arranjo esquemático da montagem placa-atuador piezoelétrico.

Os materiais utilizados no estudo são representativos de painéis aeronáuticos. As propriedades mecânicas destes materiais estão descritos na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Propriedades mecânicas da placa.

Nomenclatura	Alumínio 2024 T3	Fibra de Boro-Epóxi
E_1	72,4 GPa	213,7 GPa
E_2	72,4 GPa	18,6 GPa
G_{12}	27,2 GPa	5,2 GPa
ν_{12}	0,30	0,28
ρ	2770 kg/m ³	2052 kg/m ³

Quanto ao material piezoelétrico utilizado no estudo, suas propriedades mecânico-elétricas estão descritas na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Propriedades mecânico-elétricas do atuador piezoelétrico.

Nomenclatura	PZT-5A
E_1	34,7 GPa
E_2	34,7 GPa
G_{12}	13,4 GPa
ν_{12}	0,3
ρ	7600 kg/m ³
e_{31}	12,7 N/(V*m)

5.1. Validação do Modelo

As frequências naturais de um laminado ortotrópico retangular, onde a inércia de rotação é negligenciada, são dadas por

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{\pi^4}{I_0 b^4} \left[D_{11} m^4 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + D_{22} n^4 \right]} \quad (5.1)$$

onde

$$I_0 = \sum_{k=1}^n \rho_0^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \quad (5.2)$$

Tabela 5.3 – Frequências dos modos principais de vibração de uma placa retangular, simplesmente apoiada.

	Frequências (rad/s)				
	1x1	2x2	4x4	8x8	Exato
1º Modo	364,6	739,5	770,4	771,4	771,4
2º Modo	744,2	1580,2	1922,5	1928,7	1928,8
3º Modo	744,2	1580,2	1922,5	1928,7	1928,8
4º Modo	858,4	1636,7	3023,4	3084,1	3086,0
5º Modo	2119,5	2861,6	3861,4	3859,9	3857,6

A Tabela 5.3 mostra as frequências dos cinco modos principais de vibração de uma placa retangular, simplesmente apoiada, onde $a = b = 0,4$ m; $a/h = 100$; $E = 72,4$ GPa; $\nu = 0,3$ e $\rho = 2770$ kg/m³.

É importante salientar que, os métodos de Galerkin ou Rayleigh-Ritz sempre convergem, porém as soluções obtidas são mais rígidas que a solução exata. Na presente formulação em elementos finitos, garante-se a continuidade C^1 na interface dos elementos através do uso de funções de interpolação de Hermite. Cada elemento possui 16 graus de liberdade, as primeiras soluções são menos rígidas que as exatas, porém a convergência monotônica das frequências para o valor exato é assegurada.

Tabela 5.4 – Erro absoluto dos valores das frequências de vibração principais obtidos pelo método dos elementos finitos, em função da malha empregada.

Malha	Erro (%)			
	1x1	2x2	4x4	8x8
1° Modo	52,74%	4,14%	0,13%	0,00%
2° Modo	61,42%	18,07%	0,33%	0,01%
3° Modo	61,42%	18,07%	0,33%	0,01%
4° Modo	72,18%	46,96%	2,03%	0,06%
5° Modo	45,06%	25,82%	0,10%	0,06%

Os erros obtidos, quando se usa a malha 8 x 8, são nulos até o quinto modo principal de vibração. Este resultado justifica a discretização da placa utilizando-se esta malha.

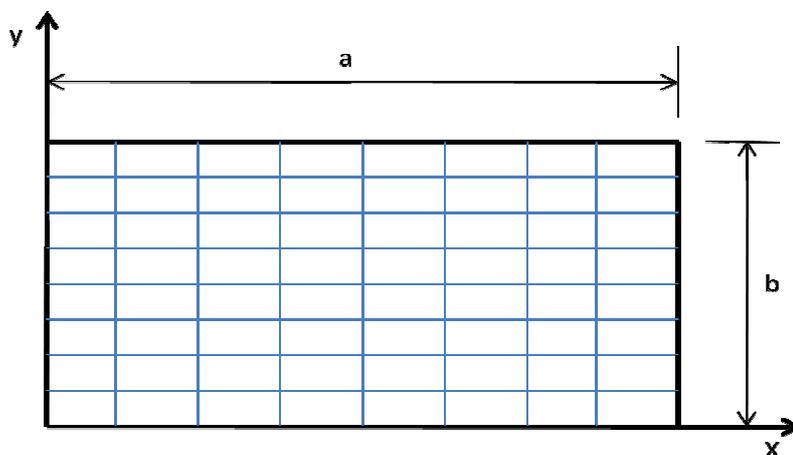


Figura 5.2 – Discretização da placa em elementos finitos.

O modelo aeroelástico empregado neste trabalho foi validado com os resultados conhecidos na literatura. Comparou-se o parâmetro de pressão dinâmica crítico (λ_{cr}) de uma placa quadrada simplesmente apoiada. A Tabela 5.5 mostra os resultados, onde se pode ver que o elemento retangular com 16 GL (Graus de Liberdade) empregado em uma malha 8 x 8 apresenta erro de apenas 0,01% com o valor exato. A solução analítica exata é 512,22.

Tabela 5.5 – $\lambda_{cr}^* = \lambda_{cr} a^3 / D$, placa quadrada simplesmente apoiada.

	Elemento Retangular	Elemento Retangular	Elemento Paralelogrâmico	Elemento Quadrilátero Composto	Elemento Retangular	Elemento Retangular
Malha	12 GL (OLSON,1970)	16 GL (OLSON,1970)	(KARI-APPA, 1970)	(SANDER, 1973)	16 GL (BISMARCK- NARS, 1977)	16 GL (presente trabalho)
2 x 2	506	553	----	517,2	----	357,4
3 x 3	430	501	----	----	----	487,4
4 x 4	463	509	----	509,7	508	505,1
5 x 5	----	----	518,22	----	----	511,0
6 x 6	489	511,78	----	512,2	----	511,3
8 x 8	----	----	----	----	----	512,3

O modelo de elementos finitos apresentado neste trabalho também foi validado com resultados conhecidos na análise da fronteira aeroelástica de flutter em placas de material composto. Analisou-se uma placa de boro-epóxi com 8 camadas dispostas simetricamente como $[0/90]_{2s}$. As dimensões da placa consideradas na análise foram 10,16 m x 10,16 m e espessura de 0,2 m. As propriedades do material são $E_1 = 213.7$ GPa, $E_2 = 18.6$ GPa, $G_{12} = 5.2$ GPa, $\nu_{12} = 0.28$ e $\rho = 2051.7$ kg/m³.

Tabela 5.6 – Valores de $\lambda_{cr}^* = \lambda_{cr} a^3 / (E_2 h^3)$ e $\omega_{cr}^* = \omega_{cr} a^2 / h (\rho / E_2)^{0,5}$ para placa ortotrópica quadrada de boro-epóxi, engastada em todos os bordos.

Método (fonte)	$\bar{\lambda}_{cr}$	$\bar{\omega}_{cr}$
Elemento finito triangular (malha 8 x 8) (LEE, 1990)	471,00	46,89
Elemento finito retangular (malha 6 x 6) (PIDAPARTI, 1993)	472,00	46,80
Solução em série (SRINIVASAN, 1987)	474,60	47,19
Método das equações integrais (SRINIVASAN, 1987)	446,36	46,09
Elemento retangular 16 GL (malha 4 x 4) (BISMARCK-NARS, 1999)	452,54	46,09
Elemento retangular 16 GL (malha 8 x 8) (presente trabalho)	479,60	47,07

Os resultados da Tabela 5.6 mostram que o modelo estudado neste trabalho apresentou resultados compatíveis com os existentes na literatura, validando desta forma o seu emprego na análise do efeito piezoelétrico na fronteira da estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos.

5.2. Coalescência dos Modos

O ponto correspondente à primeira coalescência dos modos indica o início do movimento instável do painel. Desta forma, o parâmetro de pressão dinâmica crítica (λ_{cr}) correspondente ao ponto onde ocorre a primeira coalescência dos modos representa a fronteira da estabilidade aeroelástica do painel.

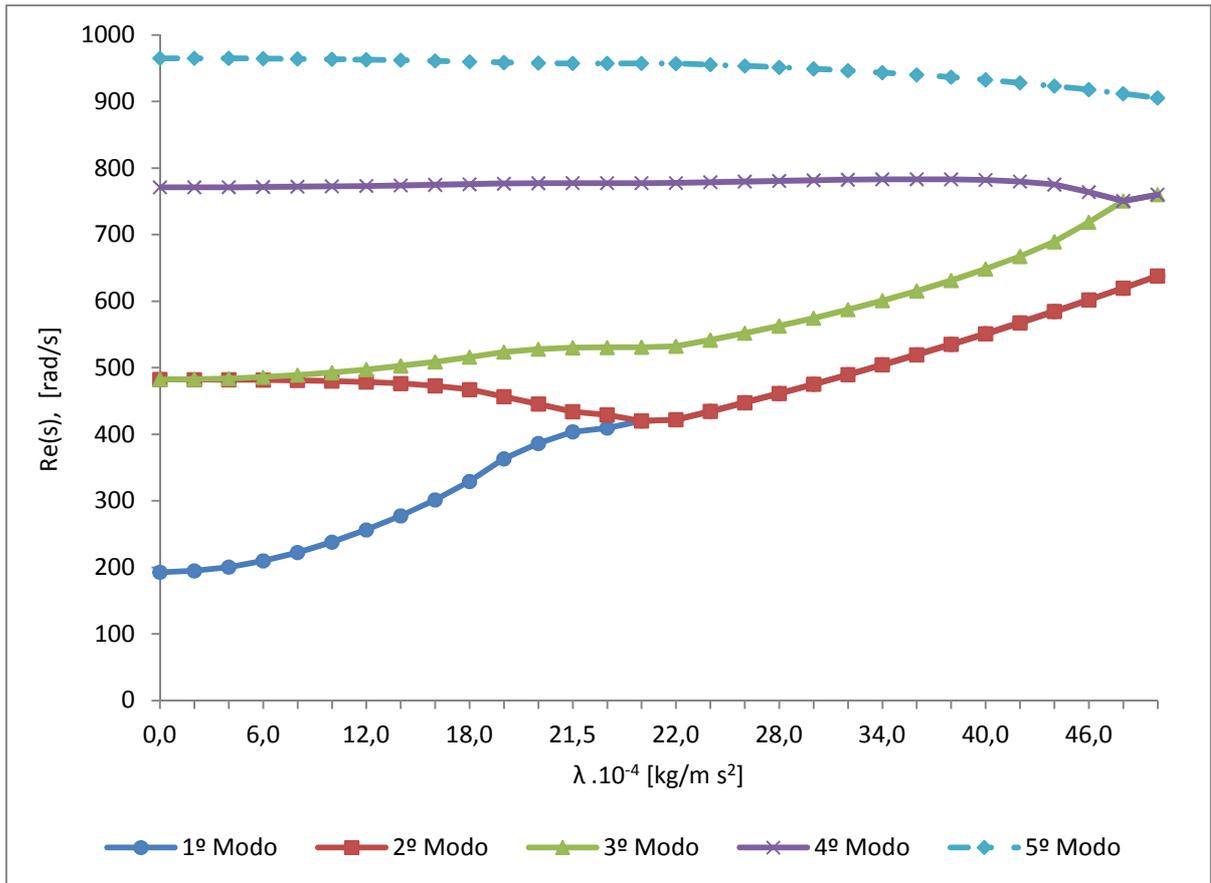


Figura 5.3 – Coalescência dos modos principais de vibração de uma placa.

A Figura 5.3 mostra a coalescência dos modos principais de vibração de uma placa, simplesmente apoiada, manufaturada em alumínio 2024-T3, com $a=b=0,4$ m e $a/h=100$.

Nota-se que, para esta configuração de painel, a coalescência do 1º e 2º modos de vibração ocorrerá quando parâmetro de pressão dinâmica alcançar o valor de $21,7 \cdot 10^4$ kg/(m²). Vale observar que o subsequente aumento da pressão dinâmica do escoamento também acarretará a coalescência dos 3º e 4º modos de vibração, porém, quando o parâmetro de pressão dinâmica for aproximadamente $46,5 \cdot 10^4$ kg/(m²). Desta forma, este segundo ponto de coalescência não tem significado prático, pois corresponde a um ponto onde a estrutura já entrou em *flutter*. Para efeito de estudo da estabilidade aeroelástica, apenas o primeiro ponto de coalescência é considerado.

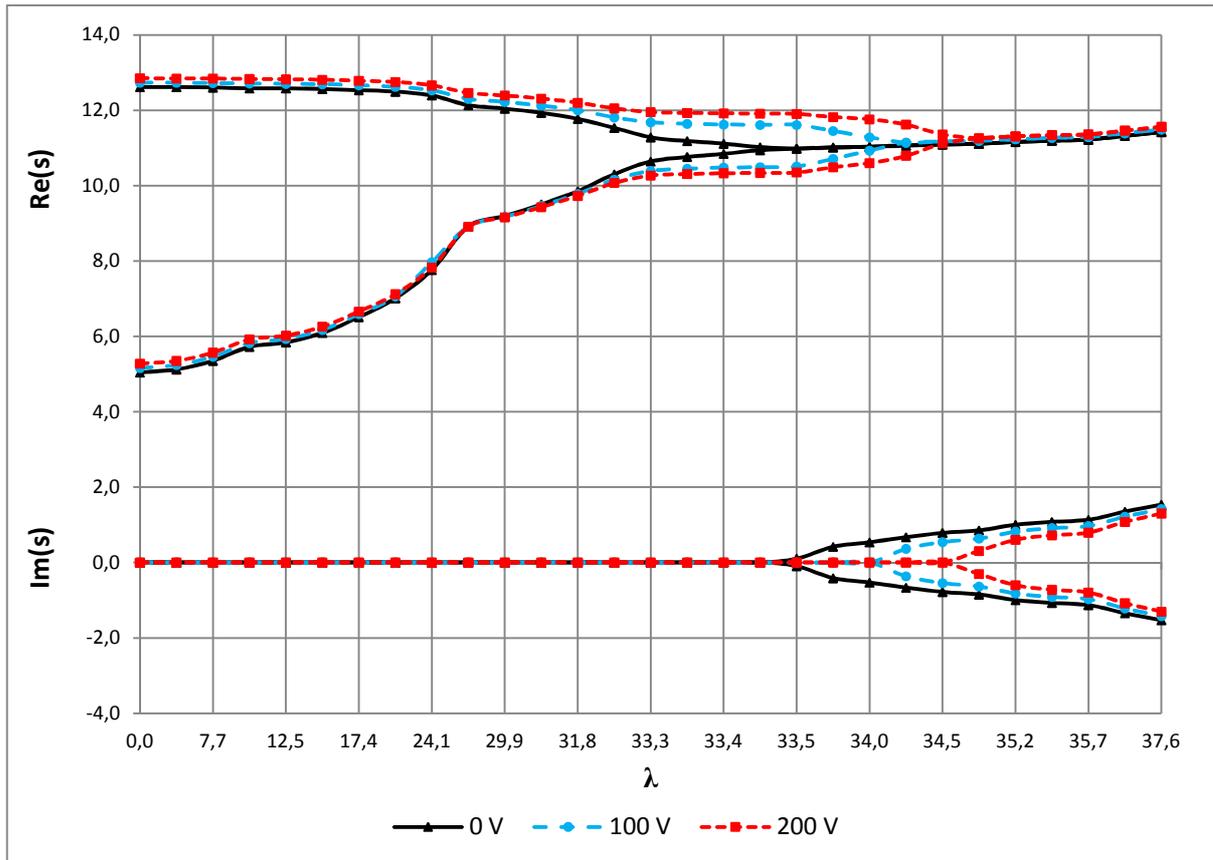


Figura 5.4 – Coalescência dos modos com a aplicação de tensão elétrica nos atuadores piezoelétricos.

A Figura 5.4 mostra o efeito da aplicação de tensão elétrica nos atuadores piezoelétricos na coalescência dos dois primeiros modos de vibração de uma placa quadrada plana, simplesmente apoiada, feita em alumínio 2024 T3, onde $a = b = 0,4$ m e $a/h = 100$. Nota-se que no ponto de ocorrência do *flutter*, os modos se coalescem e os autovalores se tornam complexos conjugados. A parte complexa dos autovalores provocará o aumento na amplitude do movimento do painel até a ruptura da estrutura. O efeito do enrijecimento devido à atuação piezoelétrica é aumentar o valor do parâmetro de pressão dinâmica crítica ao retardar a coalescência dos modos.

A Figura 5.5 mostra o efeito da aplicação de tensão elétrica nos atuadores piezoelétricos sobre o parâmetro de pressão dinâmica crítica do escoamento em uma placa

quadrada plana, simplesmente apoiada, manufaturada em alumínio 2024-T3, onde $a = b = 0,4$ m e $a/h = 100$.

O efeito da aplicação de tensão elétrica nos atuadores piezoelétricos é estabilizante, pois provoca o aumento da pressão dinâmica crítica do escoamento. A Tabela 5.7 e a Figura 5.5 mostram que a aplicação de uma tensão de 50 volts sobre as placas dos atuadores piezoelétricos provoca um aumento em 7,0% no valor do parâmetro de pressão dinâmica crítica. Além disso, uma tensão de 200 volts aumenta em 28,4% este parâmetro. Deve-se observar, porém, que este aumento na “rigidez aeroelástica” depende da relação entre a espessura da placa original (sem o atuador) e a espessura do atuador piezoelétrico.

Tabela 5.7 – Aumento percentual do parâmetro de pressão dinâmica crítica do escoamento sobre a placa com a aplicação de tensão sobre os atuadores piezoelétricos.

Tensão (volts)	$\Delta\lambda_{cr}$ (%)
0	-x-
50	7,0
100	14,0
150	21,2
200	28,4

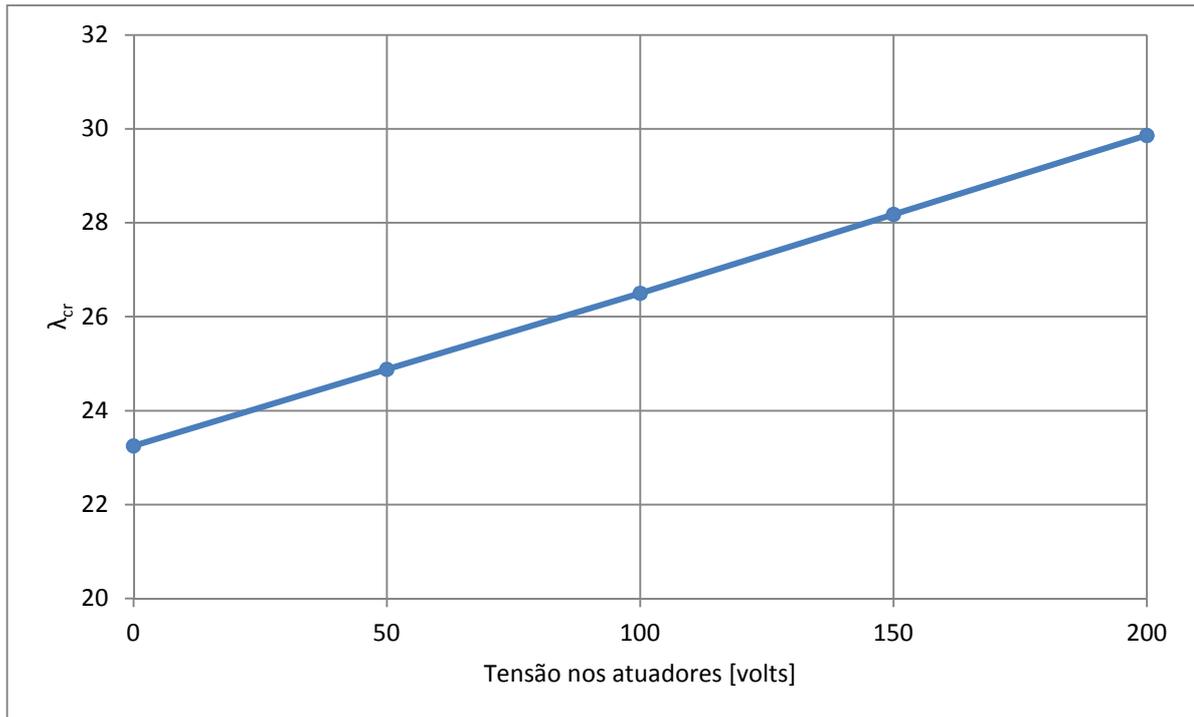


Figura 5.5 – Tensão elétrica versus λ_{cr} em uma placa quadrada, simplesmente apoiada, em alumínio 2024-T3, $a = b = 0,4$ m e $a/h = 100$.

5.3. Influência do Alongamento

A influência do alongamento de uma placa com carregamento piezoelétrico, sobre o parâmetro de pressão dinâmica do escoamento é investigada em um painel de alumínio 2024 T3. O propósito desta análise é verificar se a variação no alongamento da placa atenua ou aumenta o efeito do carregamento piezoelétrico na rigidez aeroelástica da placa.

Inicialmente investigou-se o efeito do alongamento em placas de alumínio com as camadas de PZT, sobre o parâmetro de pressão dinâmica crítica do escoamento, porém, sem o efeito piezoelétrico.

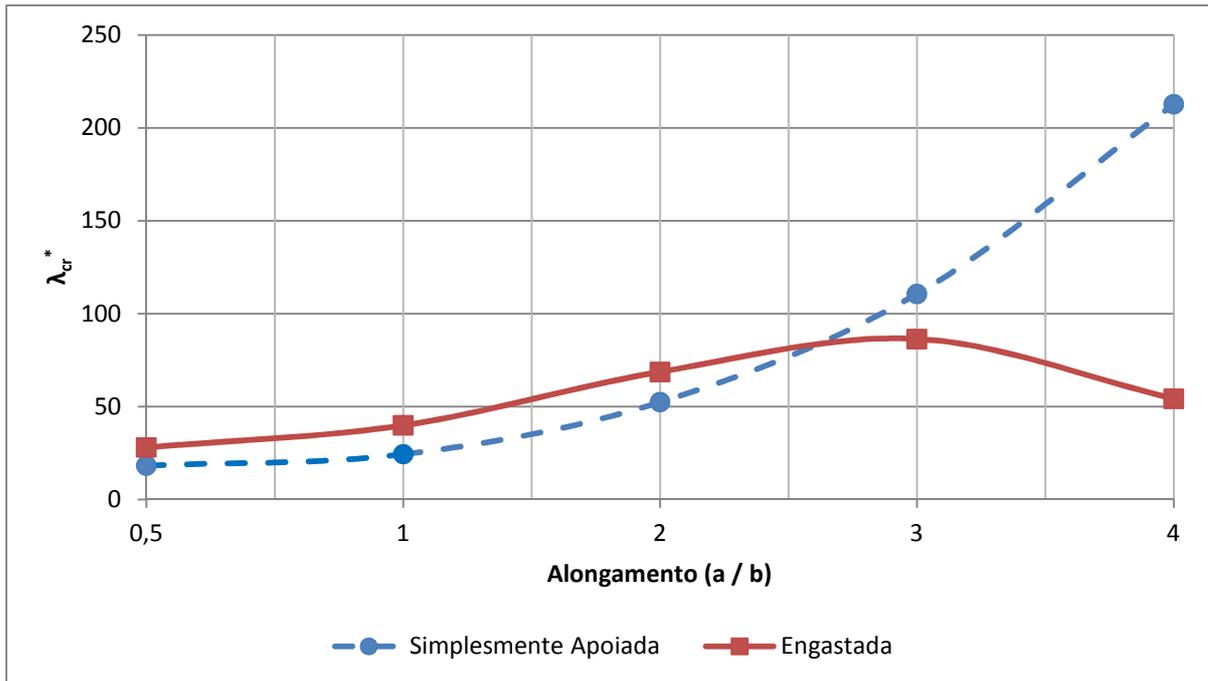


Figura 5.6 – Influência do alongamento e da condição de contorno de uma placa de Al 2024-T3 no parâmetro de pressão dinâmica crítica do escoamento, $a/h = 200$.

Em toda a análise subsequente, considerou-se o adimensional de pressão dinâmica crítica como sendo $\lambda_{cr}^* = \lambda_{cr} a^3 / (E \cdot h^3)$.

A Figura 5.6 mostra que para uma placa simplesmente apoiada, quanto maior o alongamento, maior será a sua rigidez aeroelástica, de forma que, o λ_{cr} de uma placa de alumínio 2024-T3 com $a/b=4$ é 11,6 vezes maior que o mesmo parâmetro quando $a/b=0,5$. Por outro lado, quando a placa é engastada, o aumento do alongamento de uma placa de Al 2024 T3 só aumenta o λ_{cr} até $a/b = 3$. A partir deste valor de alongamento, o parâmetro de pressão dinâmica diminui. Vale notar que a rigidez aeroelástica da placa simplesmente apoiada é maior que a da placa engastada a partir de $a/b = 2,5$. Outro ponto relevante nesta análise é que, para placas com alongamento entre 0,5 e 2,5 a condição de engastamento garante maior rigidez aeroelástica que a condição de simplesmente apoiada. Esta tendência se inverte para placas com alongamento maior que 2,5 para o Al 2024-T3.

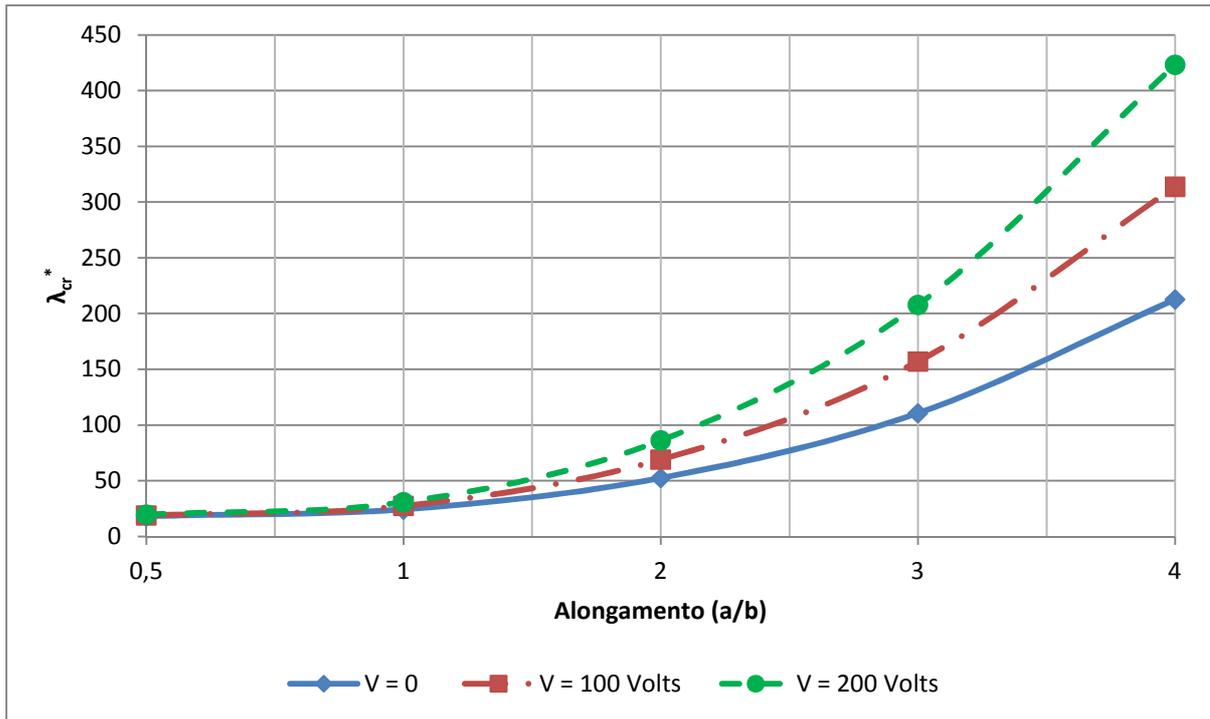


Figura 5.7 – Influência do alongamento de uma placa de alumínio 2024-T3, simplesmente apoiada, com carregamento elétrico no atuador, $a/h = 200$.

Quando se aplica tensão elétrica nos atuadores piezoelétricos e se analisa o efeito do alongamento da placa na condição de contorno simplesmente apoiada, nota-se que o efeito do enrijecimento da estrutura devido ao efeito piezoelétrico tem relação com o alongamento da placa, como pode ser visto na Figura 5.7. Nota-se que o enrijecimento da estrutura devido ao efeito piezoelétrico é maior quanto mais alongada for a placa. Por exemplo, quando $a/b = 4$, o aumento em λ_{cr} devido à aplicação de uma tensão elétrica de 100 volts no atuador é de aproximadamente 47% nas placas simplesmente apoiadas e, 72% nas placas engastadas. Por sua vez, quando $a/b = 1$, o aumento em λ_{cr} é de apenas 13% e 8% para as placas simplesmente apoiadas e engastadas respectivamente. A Figura 5.8 mostra a mesma tendência quando a placa é engastada. Nesta figura, observa-se que o efeito do enrijecimento da placa engastada, devido ao efeito piezoelétrico, é superposto à diminuição do parâmetro de pressão dinâmica crítica a partir de $a/b=3$.

Portanto, conclui-se que quanto maior o alongamento, mais evidente é o efeito piezoelétrico.

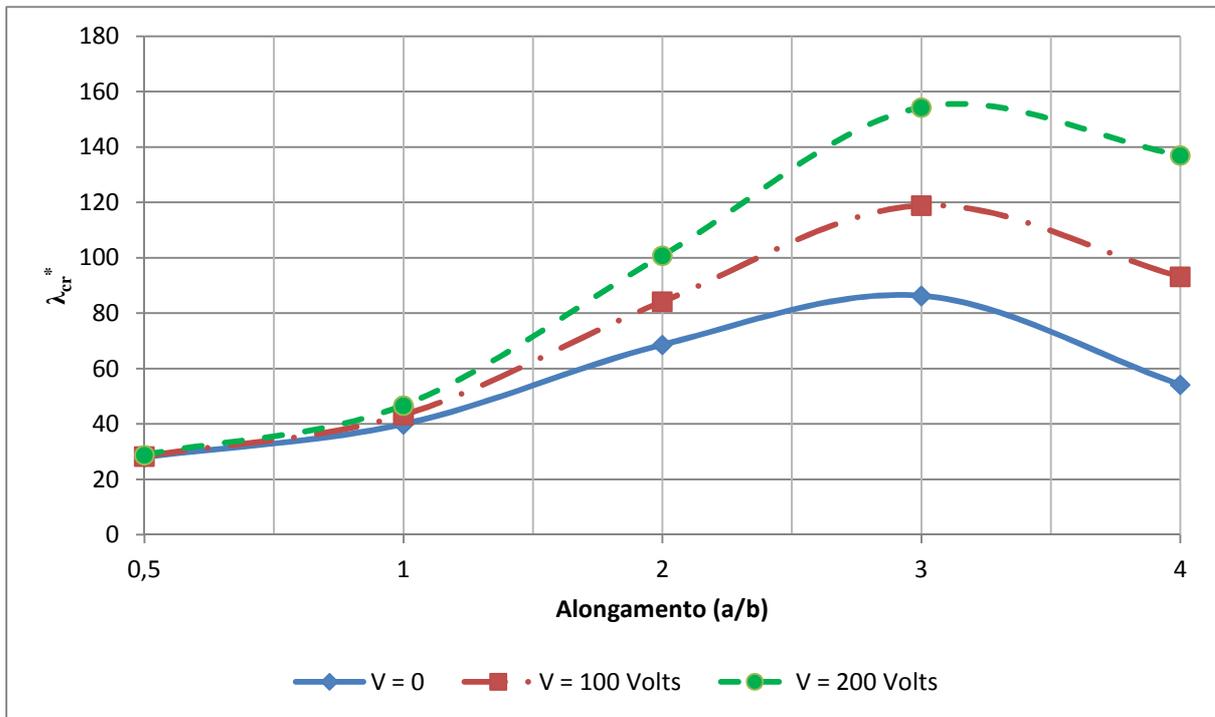


Figura 5.8 – Influência do alongamento de uma placa de alumínio 2024-T3, engastada, com carregamento elétrico no atuador, $a/h = 200$.

5.4. Influência da Curvatura

Neste estudo, investigou-se a influência do efeito piezoelétrico sobre a fronteira de estabilidade aeroelástica de painéis curvos. O objetivo desta análise é saber se a curvatura amplia ou atenua o efeito do aumento de rigidez aeroelástica do painel, quando este é carregado piezoeletricamente. Foram analisados painéis simplesmente apoiados e engastados, com alongamento 1,0 e 2,0. O parâmetro de curvatura empregado foi a razão H/h , onde as grandezas H e h podem ser visualizadas na Figura 3.4. Ressalta-se que $H=0$ corresponde à

placa e, $H/h=6$ equivale à máxima curvatura onde a teoria de casca achatada pode ser empregada, segundo REISSNER (1955).

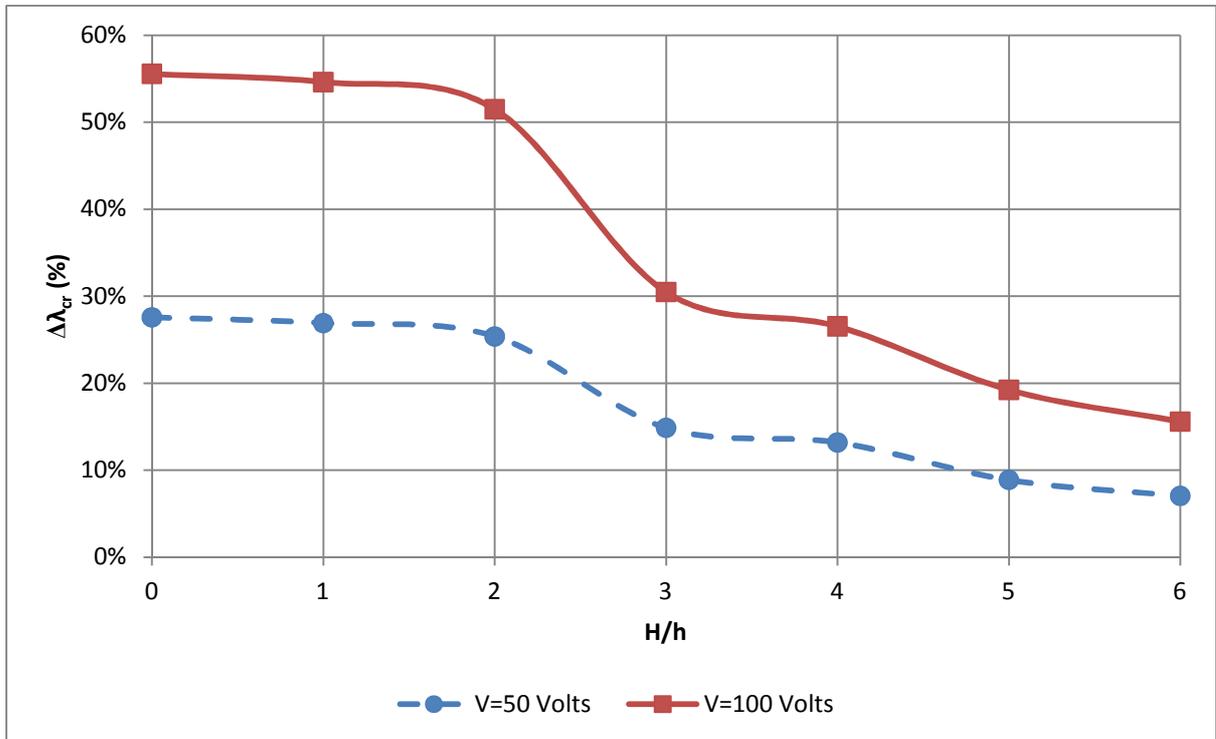


Figura 5.9 – Influência da curvatura de um painel de alumínio 2024-T3, simplesmente apoiada, $a/b=1$, com carregamento elétrico no atuador.

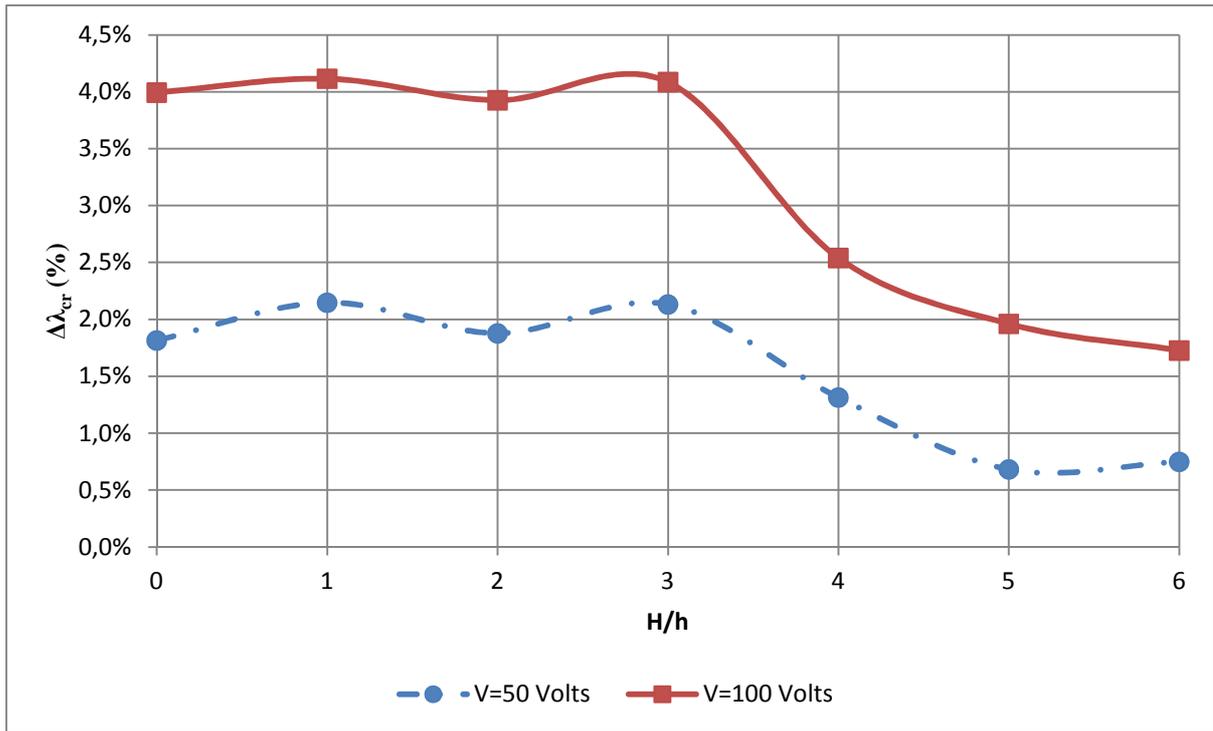


Figura 5.10 – Influência da curvatura de um painel de alumínio 2024-T3, engastado, $a/b=1$, com carregamento elétrico no atuador.

As Figuras 5.9 e 5.10 mostram que a curvatura na direção do escoamento, em um painel quadrado simplesmente apoiado ou engastado, influencia no aumento de rigidez aeroelástica do painel devido ao efeito piezoelétrico. A curvatura associada ao efeito piezoelétrico produz maior variação em λ_{cr} em um painel simplesmente apoiado, comparativamente ao painel engastado. Nota-se que, na condição de simplesmente apoiada, quanto menor a curvatura, maior é a variação em λ_{cr} devido ao efeito piezoelétrico, visto que, para $H/h \leq 2.0$ o $\Delta\lambda_{cr}$ é maior que 50%, e, quando $H/h = 6.0$, o $\Delta\lambda_{cr}$ é de apenas 15%. Importante salientar que, o $\Delta\lambda_{cr}$ é em relação ao valor de λ_{cr} da placa com a camada de PZT, porém, sem voltagem no atuador. Por outro lado, o painel engastado sofre pequena variação em λ_{cr} , devido ao efeito piezoelétrico. Esta variação é menor que 4,5%, e apresenta valor aproximadamente constante quando $H/h \leq 3.0$, e $\Delta\lambda_{cr}$ é de apenas 1,7% quando $H/h = 6$.

Portanto, a condição de simplesmente apoiado é muito mais sensível ao efeito da curvatura associado ao efeito piezoelétrico, comparativamente à condição de engastamento.

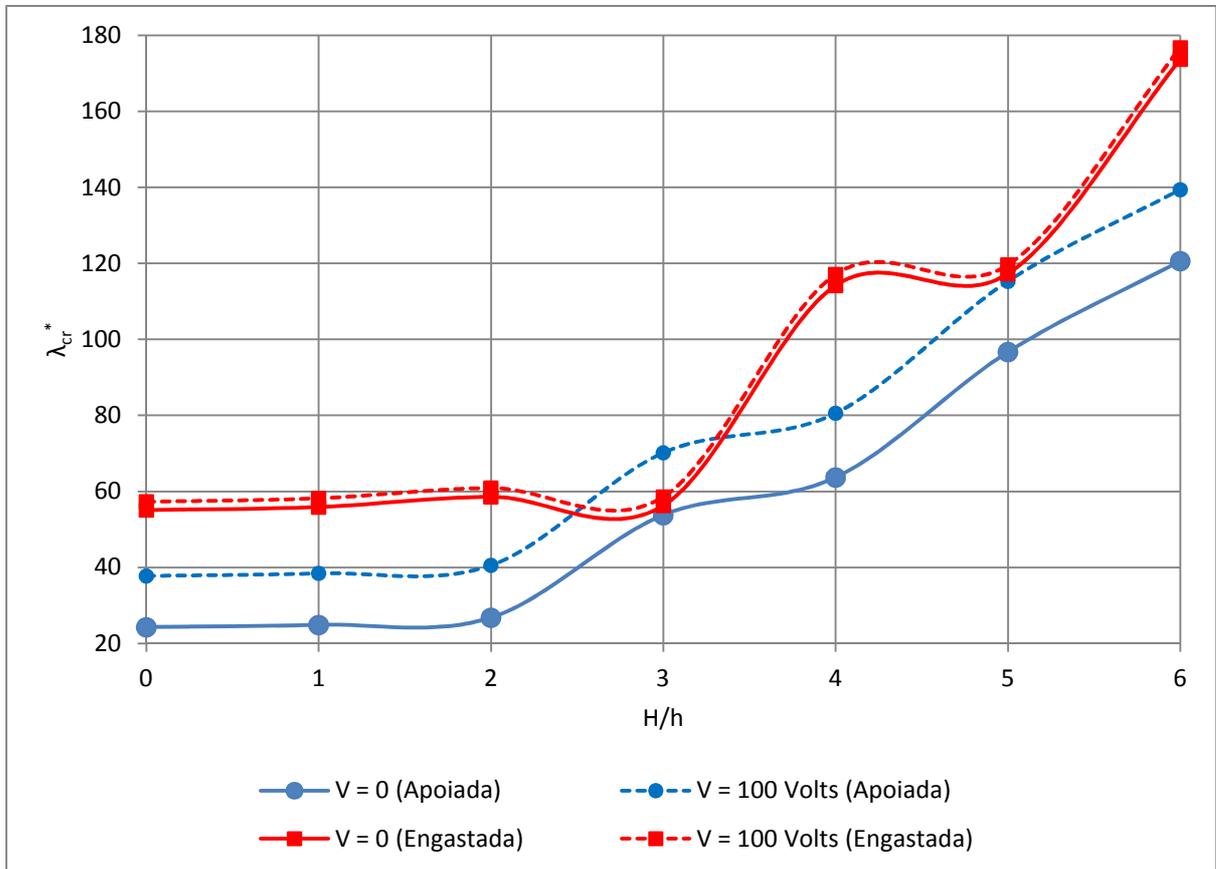


Figura 5.11 – Influência da curvatura na direção do escoamento, em um painel de alumínio 2024-T3, com carregamento elétrico no atuador, $a/b=1$, $a/h = 200$.

A Figura 5.11 mostra que, o aumento da curvatura não altera significativamente o parâmetro de pressão dinâmica crítica do escoamento sobre o painel até $H/h=2$, para o painel simplesmente apoiado, e $H/h=3$ para o painel engastado. A partir destes respectivos valores, o aumento da curvatura provoca o enrijecimento da estrutura, de modo que, o parâmetro de pressão dinâmica crítica do escoamento num painel curvo simplesmente apoiado, com $H/h=6$, é 396% do correspondente parâmetro para o painel plano e, na condição de engastamento o aumento é de 215%. Em ambas as condições de contorno e em toda a faixa de curvatura analisada, o efeito piezoelétrico apenas incrementou o valor de λ_{cr} . A formulação matemática

utilizada neste trabalho não permite a análise para $H/h > 6.0$, haja vista o emprego das aproximações oriundas da teoria de casca achatada.

As Tabelas 5.8 e 5.9 mostram o valor da variação percentual do parâmetro com a aplicação da tensão nos atuadores piezoelétricos, para os valores de curvatura estudados, em painéis de alumínio 2024-T3 com alongamentos 1,0 e 2,0 respectivamente.

Tabela 5.8 – Variação em λ_{cr} com a curvatura, $a/b = 1$.

H/h	Simplesmente		Engastado	
	Apoiado			
	50 volts	100 volts	50 volts	100 volts
0	27,6	55,6	1,8	4,0
1	26,9	54,6	2,1	4,1
2	25,4	51,5	1,9	3,9
3	14,9	30,5	2,1	4,1
4	13,2	26,5	1,3	2,5
5	8,9	19,2	0,7	2,0
6	7,0	15,6	0,7	1,7

Tabela 5.9 – Variação em λ_{cr} com a curvatura, $a/b = 2$.

H/h	Simplesmente		Engastado	
	Apoiado			
	50 volts	100 volts	50 volts	100 volts
0	7,8	15,5	5,5	11,2
1	6,8	14,3	4,9	10,4
2	12,1	14,8	1,6	2,7
3	2,2	3,2	2,0	2,5

4	1,2	1,7	1,2	2,5
5	0,7	1,5	0,9	2,0
6	0,6	1,4	0,8	1,5

A Tabela 5.9 e as Figuras 5.12 e 5.13 mostram que, quando $a/b=2$, a maior variação de $\Delta\lambda_{cr}$ ocorre quando $H/h \leq 2,0$, e $\Delta\lambda_{cr}$ é desprezível para $H/h \geq 3,0$, em ambas as condições de contorno. Portanto, um painel curvo com $H/h \geq 3,0$, independentemente da condição de contorno, é insensível ao efeito piezoelétrico, quando $a/b=2$.

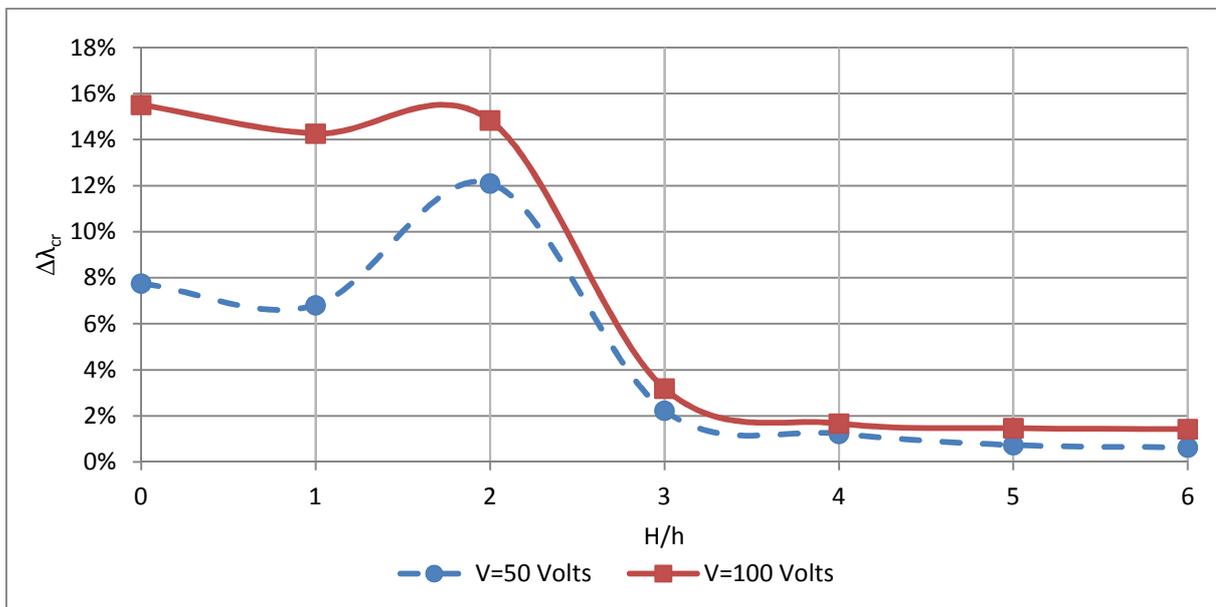


Figura 5.12 – Influência da curvatura de um painel de alumínio 2024-T3, simplesmente apoiada, $a/b=2$, com carregamento elétrico no atuador.

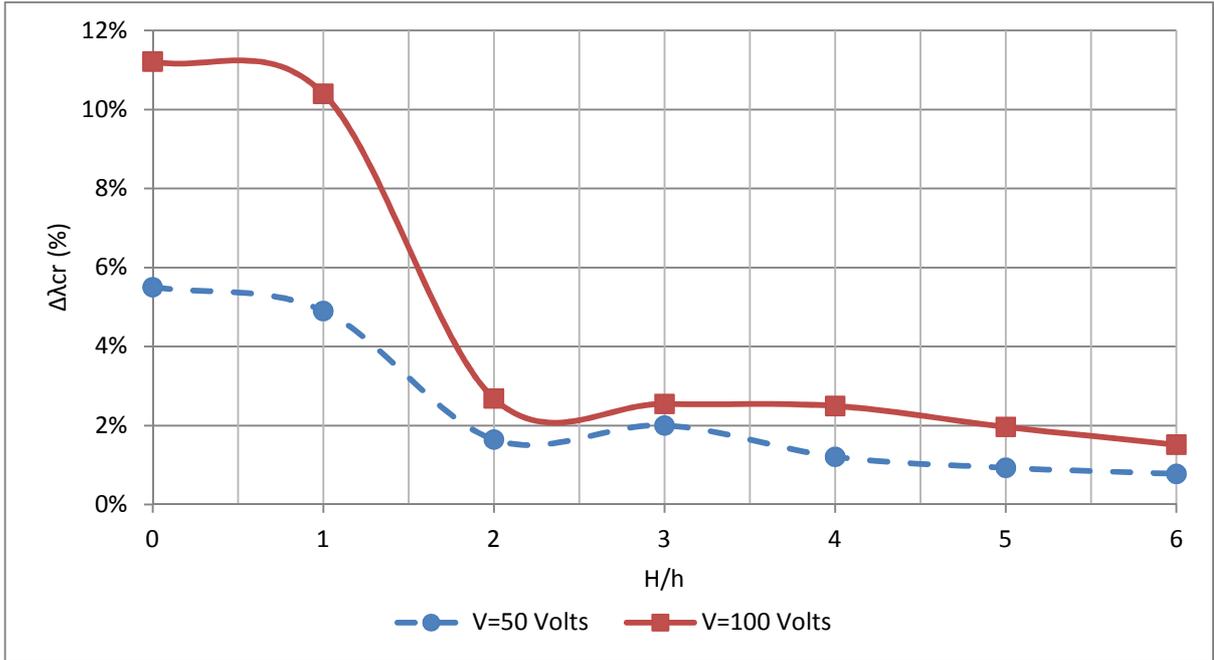


Figura 5.13 – Influência da curvatura de um painel de alumínio 2024-T3, engastada, $a/b=2$, com carregamento elétrico no atuador.

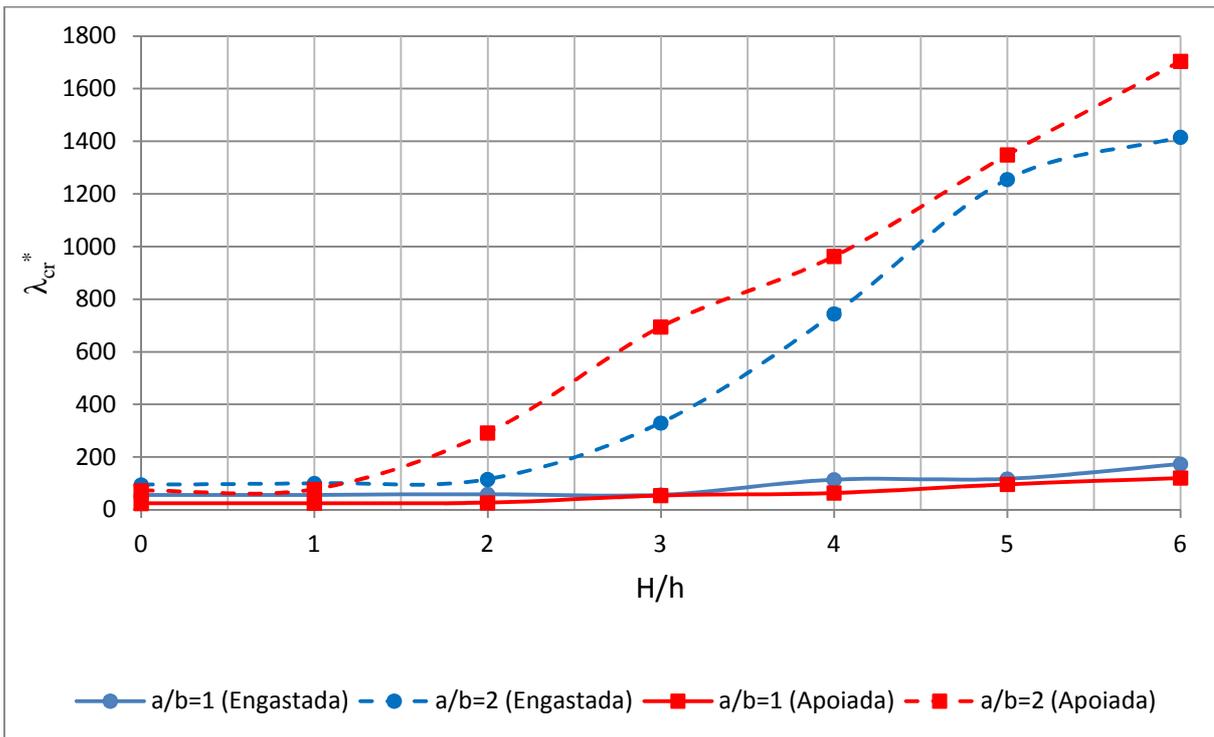


Figura 5.14 – Influência da curvatura de um painel de alumínio 2024-T3, sem carregamento elétrico no atuador.

A Figura 5.14 mostra o efeito do alongamento associado à curvatura e à condição de contorno de uma placa, no parâmetro de pressão dinâmica crítica do escoamento. É evidente

que o alongamento é o parâmetro que mais influencia em λ_{cr} , pois, fixando-se a condição de contorno e a curvatura e, variando-se o alongamento de $a/b=1$ para $a/b=2$, verifica-se a grande variação em λ_{cr} . A curvatura apenas exerce influência quando $H/h > 2.0$, embora, quando $H/h < 2$ ocorra a maior variação em λ_{cr} quando se aplica tensão elétrica sobre os atuadores piezoelétricos. Relativamente à condição de contorno, por si só ela não define qual condição confere maior rigidez aeroelástica ao painel. É preciso fixar outros parâmetros geométrico tais como: alongamento, curvatura e espessura; de forma a se obter precisamente a influência da condição de borda da placa.

5.5. Influência do Ângulo de Laminação

Inicialmente, o estudo da influência do ângulo de laminação consistiu em considerar um laminado com apenas uma camada, variando-se o ângulo de laminação em relação à direção do escoamento aerodinâmico sobre a placa. Em seguida, analisou-se a influência do ângulo de laminação no aumento da rigidez aeroelástica da placa devido ao efeito piezoelétrico. O objetivo desta análise é saber se existe algum acoplamento entre o efeito piezoelétrico e o ângulo de laminação da placa.

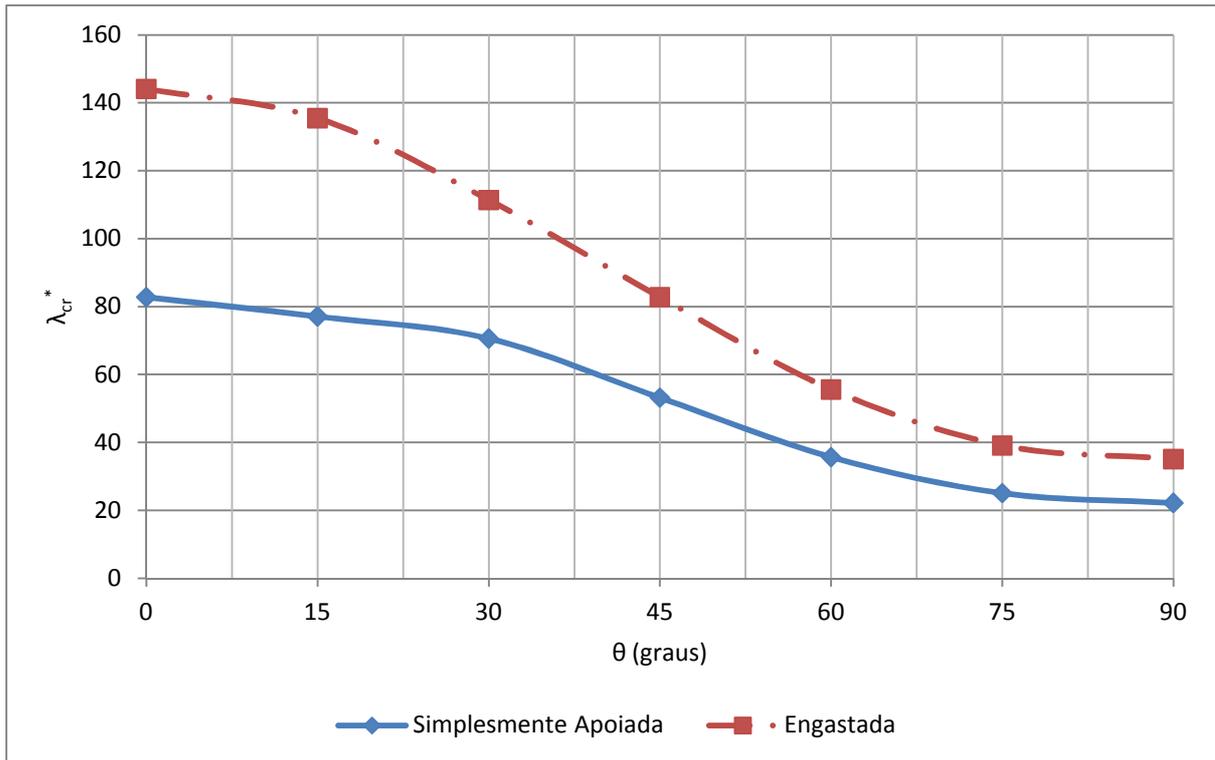


Figura 5.15 – λ_{cr}^* versus θ , em uma placa de boro-epóxi, $a/b=1$.

A Figura 5.15 mostra a variação do parâmetro de pressão dinâmica crítica de uma placa quadrada de boro-epóxi, quando se varia o ângulo de laminação em relação à direção do escoamento, onde $a/b = 1$, $a/h = 200$, $E_1 = 93.1$ GPa, $E_2 = 18.6$ GPa, $\nu_{12} = 0.3$, $\nu_{21} = 0.06$, $G_{12} = 6.5$ GPa e $\rho = 2051.7$ kg/m³.

Nota-se que a placa plana quadrada, simplesmente apoiada ou engastada, o laminado alinhado ao escoamento fornece a maior rigidez aeroelástica. O parâmetro de pressão dinâmica crítica se reduz à medida que o ângulo de laminação vai de 0° a 90°, se reduzindo a aproximadamente 25% do valor máximo, quando a placa está simplesmente apoiada ou engastada. A placa quadrada engastada possui maior rigidez aeroelástica, em todos os ângulos de laminação, comparativamente à placa simplesmente apoiada.

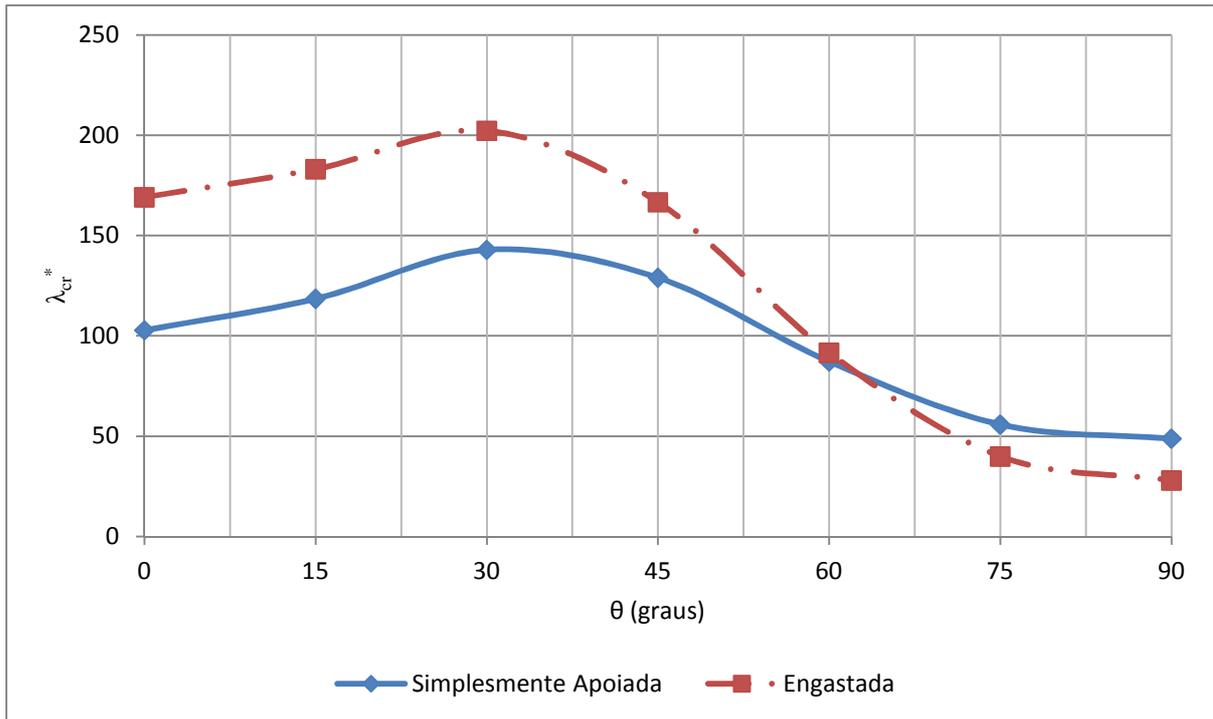


Figura 5.16 – λ_{cr}^* versus θ , em uma placa de boro-epóxi, $a/b=2$.

A placa com $a/b=2$, em ambas as condições de contorno, apresenta o λ_{cr}^* máximo quando o ângulo de laminação vale 30° , como pode ser visto na Figura 5.16. Para ângulos entre 30° e 90° , λ_{cr}^* se reduz até o seu valor mínimo, correspondente respectivamente a 32% do valor máximo para a placa simplesmente apoiada, e 13% para a placa engastada. Portanto, a placa quando está simplesmente apoiada sofre menor variação em λ_{cr}^* quando se varia o ângulo de laminação. Vale ressaltar que, a partir de $\theta = 65^\circ$ aproximadamente, o laminado simplesmente apoiado é mais rígido que o laminado engastado.

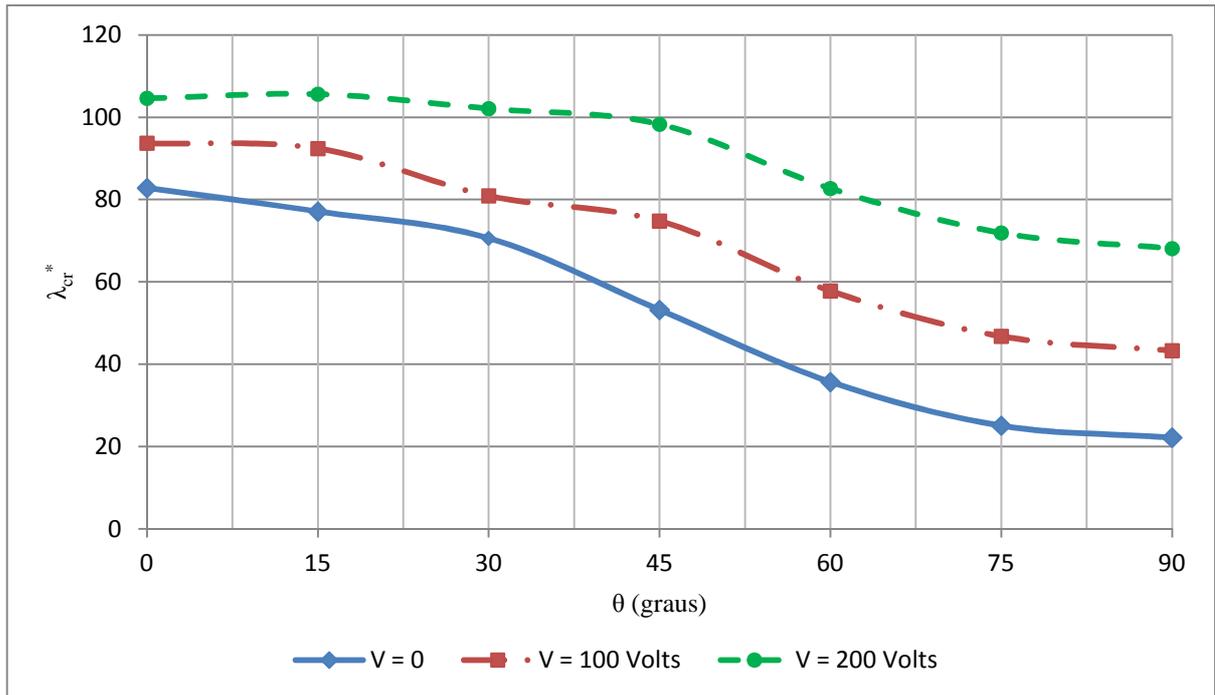


Figura 5.17 – Influência do ângulo de laminação em uma placa de boro-epóxi, simplesmente apoiada, onde $a/b = 1$, $a/h = 200$, sujeito ao carregamento piezoelétrico.

A Figura 5.17 mostra que o enrijecimento da placa quadrada devido ao efeito piezoelétrico é mais acentuado quando o ângulo varia entre 45° e 90° . Nesta faixa de ângulo de laminação, a variação em λ_{cr} chega a 93% quando $\theta = 90^\circ$. Embora a variação seja menor, o mesmo comportamento pode ser visto nas Figuras 5.17, 5.18 e 5.19, onde a análise foi estendida para placa quadrada engastada e placa com $a/b = 2$, simplesmente apoiada e engastada, respectivamente. Portanto, o enrijecimento da placa devido ao efeito piezoelétrico tem relação com o ângulo de laminação da placa.

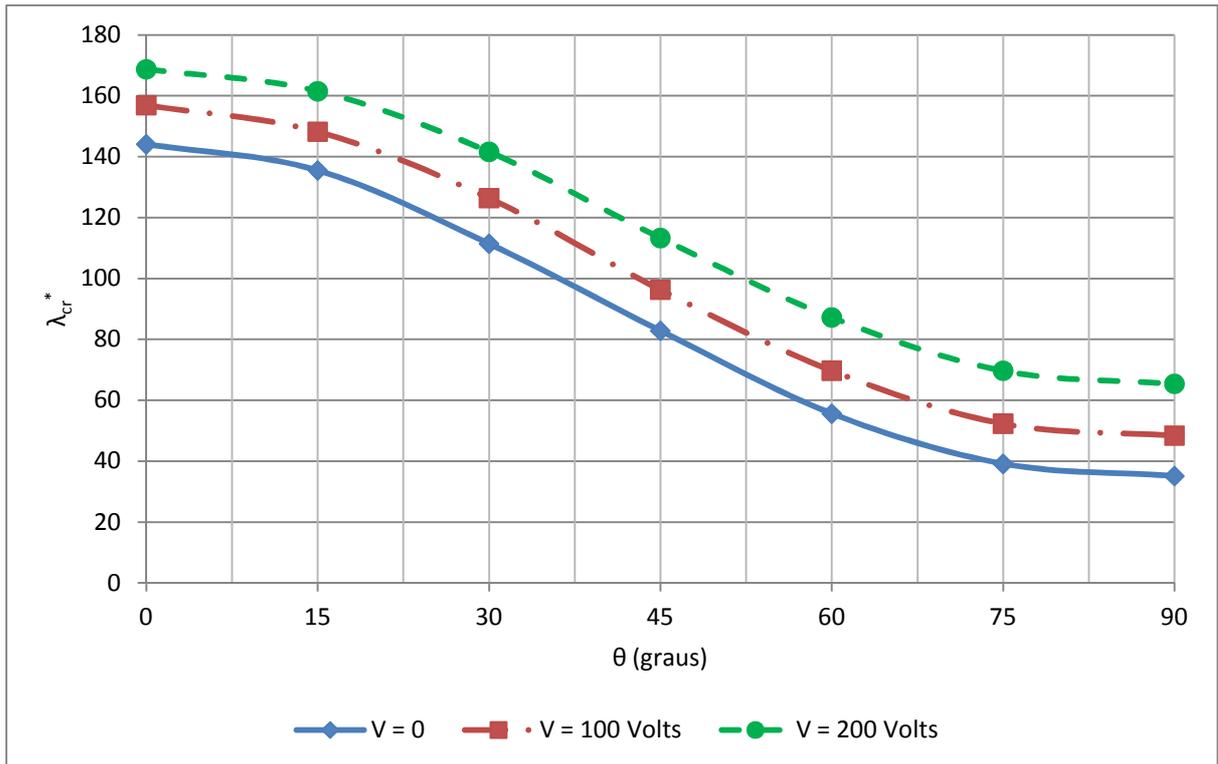


Figura 5.18 – Influência do ângulo de laminação, placa de boro-epóxi, engastada, $a/b = 1$, sujeito ao carregamento piezoelétrico.

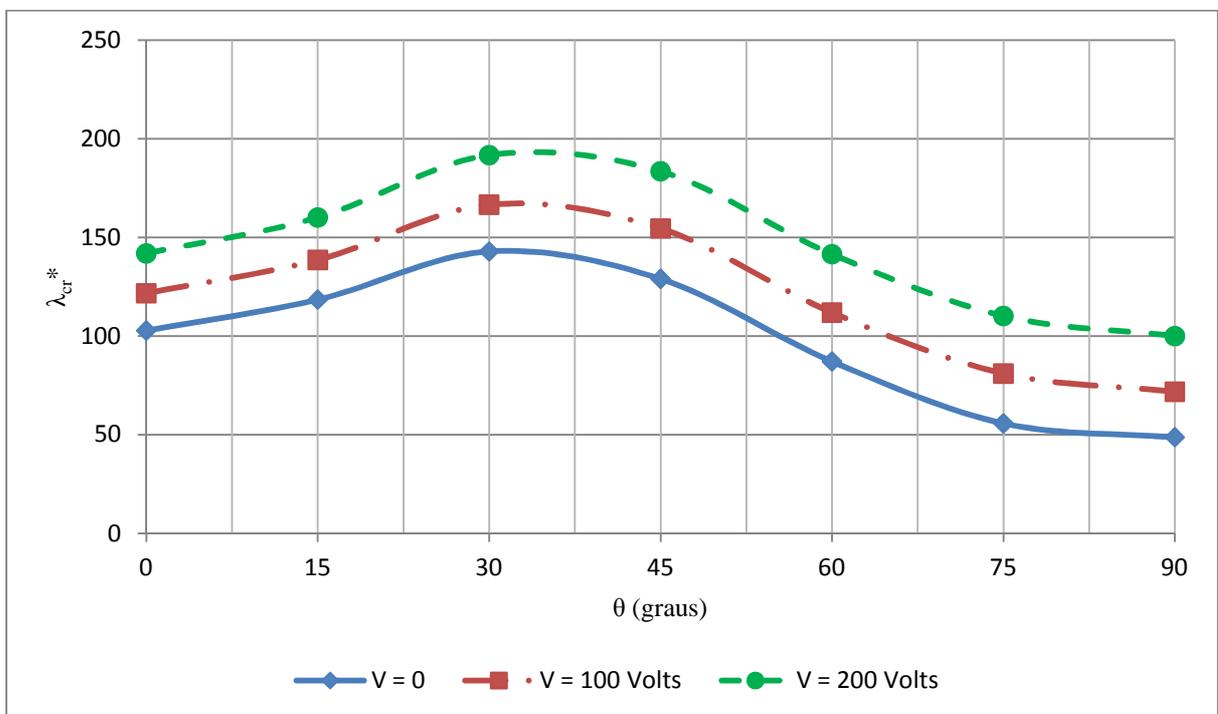


Figura 5.19 – Influência do ângulo de laminação, placa de boro-epóxi, simplesmente apoiada, $a/b = 2$, sujeito ao carregamento piezoelétrico.

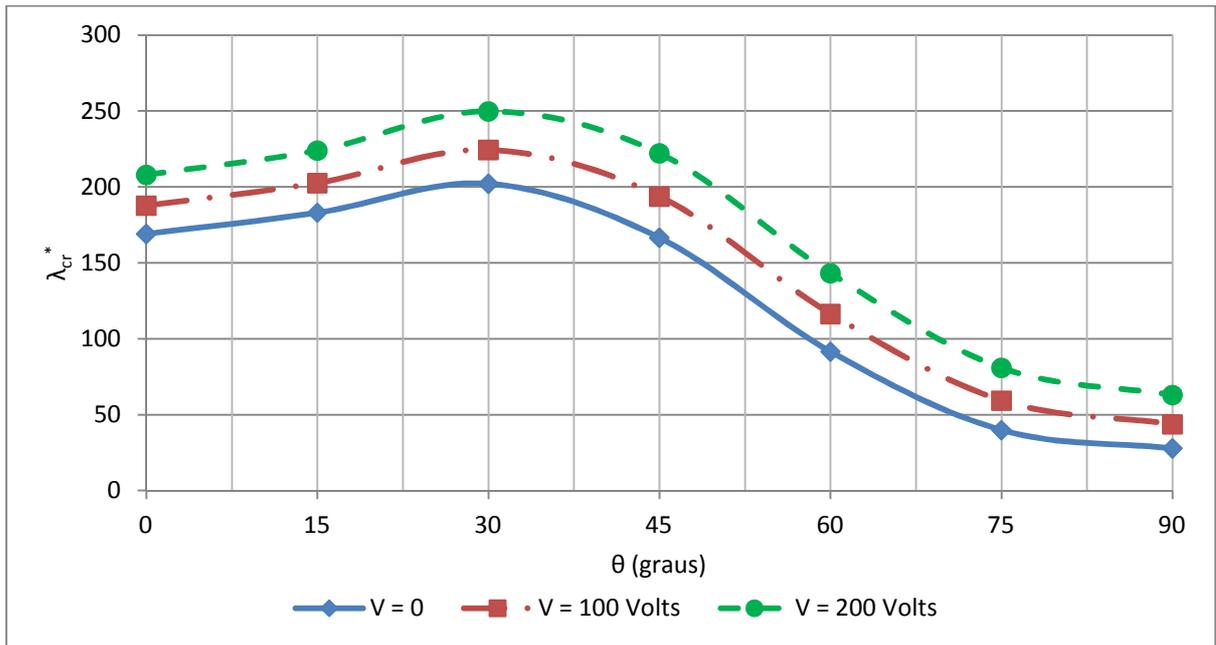


Figura 5.20 – Influência do ângulo de laminação, placa de boro-epóxi, engastada, $a/b = 2$, sujeito ao carregamento piezoelétrico.

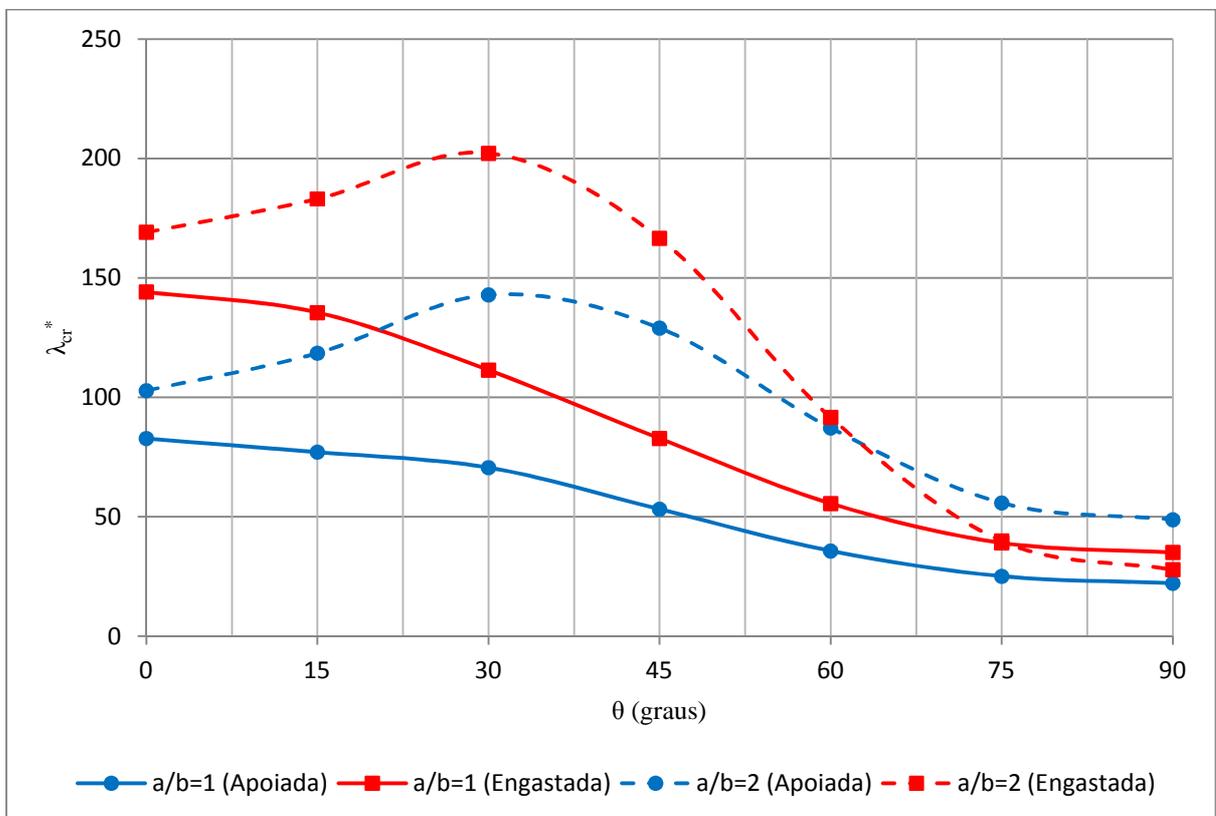


Figura 5.21 – Influência do ângulo de laminação, placa de boro-epóxi.

A Figura 5.21 mostra de forma compacta o efeito do alongamento, da condição de contorno e do ângulo de laminação em um laminado de boro-epóxi no parâmetro de pressão dinâmica de instabilidade aeroelástica da estrutura. Como pode ser visto, o laminado com alongamento 2 apresenta maior rigidez que o laminado quadrado, em ambas as condições de contorno. Quanto à condição de contorno, o laminado quadrado engastado é sempre mais rígido que o laminado simplesmente apoiado. Porém, quando $a/b=2$, o laminado simplesmente apoiado é mais rígido que o engastado a partir de $\theta=70^\circ$.

5.6. Efeito da Tensão Elétrica Inversa no Atuador

A principal aplicação prática do atuador piezoelétrico em painéis aeronáuticos é a possibilidade de se controlar a velocidade de *flutter* da estrutura. Este controle é exercido através da variação da tensão elétrica aplicada ao atuador, que por sua vez, irá alterar a rigidez da placa e conseqüentemente, a velocidade de instabilidade aeroelástica da estrutura.

Neste estudo será observado o efeito na rigidez aeroelástica da placa quando se inverte a polarização no atuador piezoelétrico. As análises anteriores nesta tese mostraram que a aplicação de tensão elétrica “positiva” no atuador enrijece a placa. Agora, a questão é: O que acontecerá à placa se for aplicada uma tensão elétrica “negativa” no atuador?

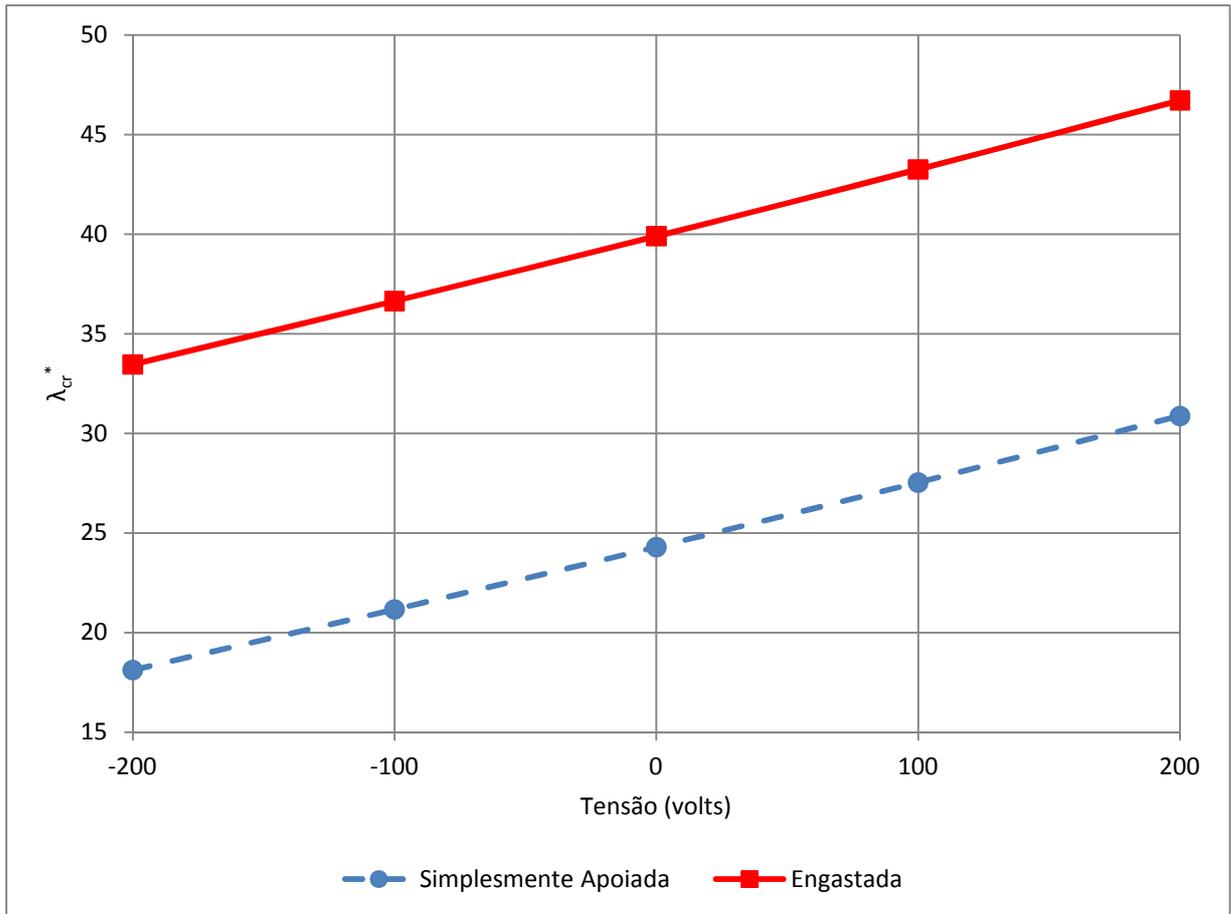


Figura 5.22 – Efeito da tensão elétrica inversa no atuador piezoelétrico, placa de alumínio 2024-T3, $a/b = 1$, $a/h = 200$.

A Figura 5.22 mostra uma linearidade na resposta da placa a uma tensão elétrica negativa no atuador. Desta forma, assim como uma tensão “positiva” enrijece a placa, aumentando o parâmetro de pressão dinâmica crítica, por outro lado, a aplicação da tensão “negativa” diminui a rigidez da mesma, fazendo com que a placa entre *flutter* em uma velocidade menor que a correspondente velocidade da estrutura sem a atuação piezoelétrica. Esta resposta da estrutura foi verificada nas duas condições de borda estudadas: simplesmente apoiada e engastada.

5.7. Influência da Espessura Relativa da Placa

Nesta análise será investigada a influência que a razão entre as espessuras da placa e atuador exercem no parâmetro de pressão dinâmica crítica.

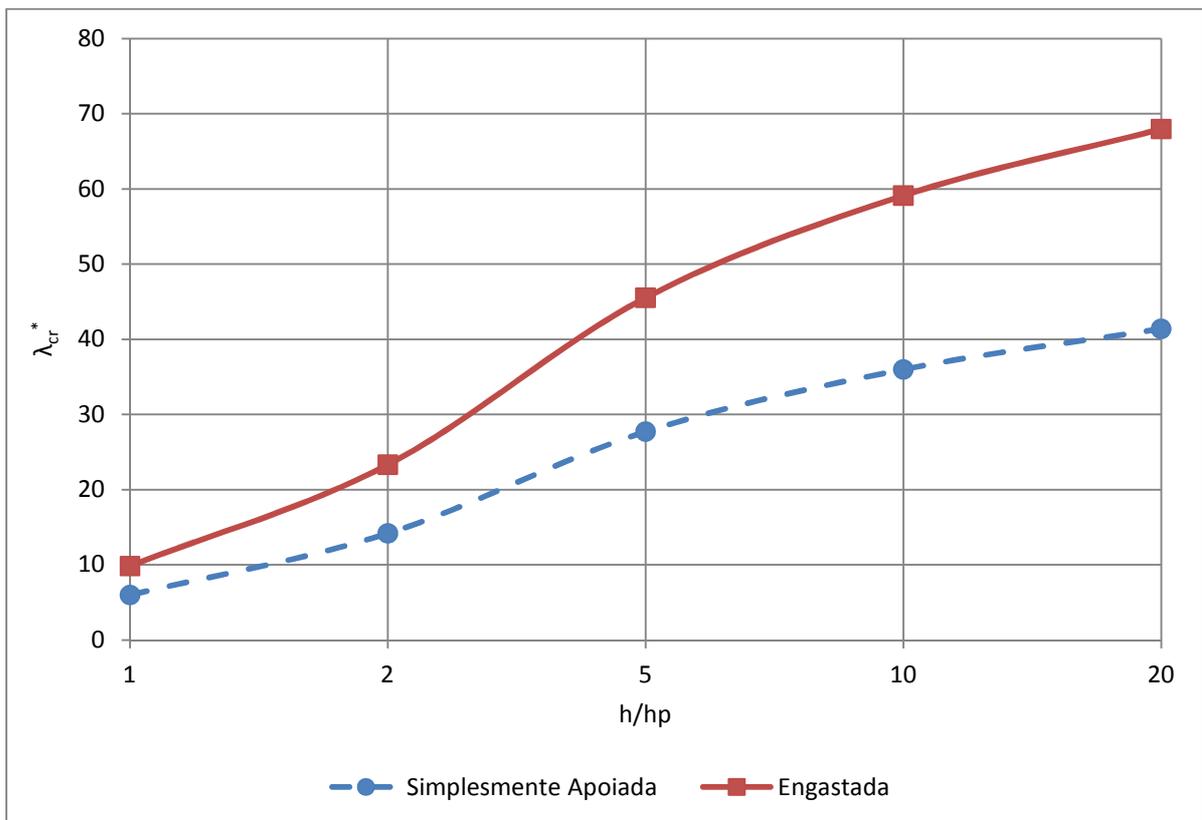


Figura 5.23 – Influência da razão de espessuras da placa e atuador. Placa de alumínio 2024-T3, $a/b = 1$, $a/h = 200$.

O gráfico mostrado na Figura 5.23 não contempla a atuação piezoelétrica. Esta análise mostra apenas o efeito do aumento da razão de espessuras entre a placa e o atuador, mantendo-se constante a razão a/h . O enrijecimento da estrutura com o aumento da espessura da placa, relativamente à espessura do atuador, mostra que o material da placa (alumínio 2024-T3), por si só, confere mais rigidez à estrutura que o material do atuador.

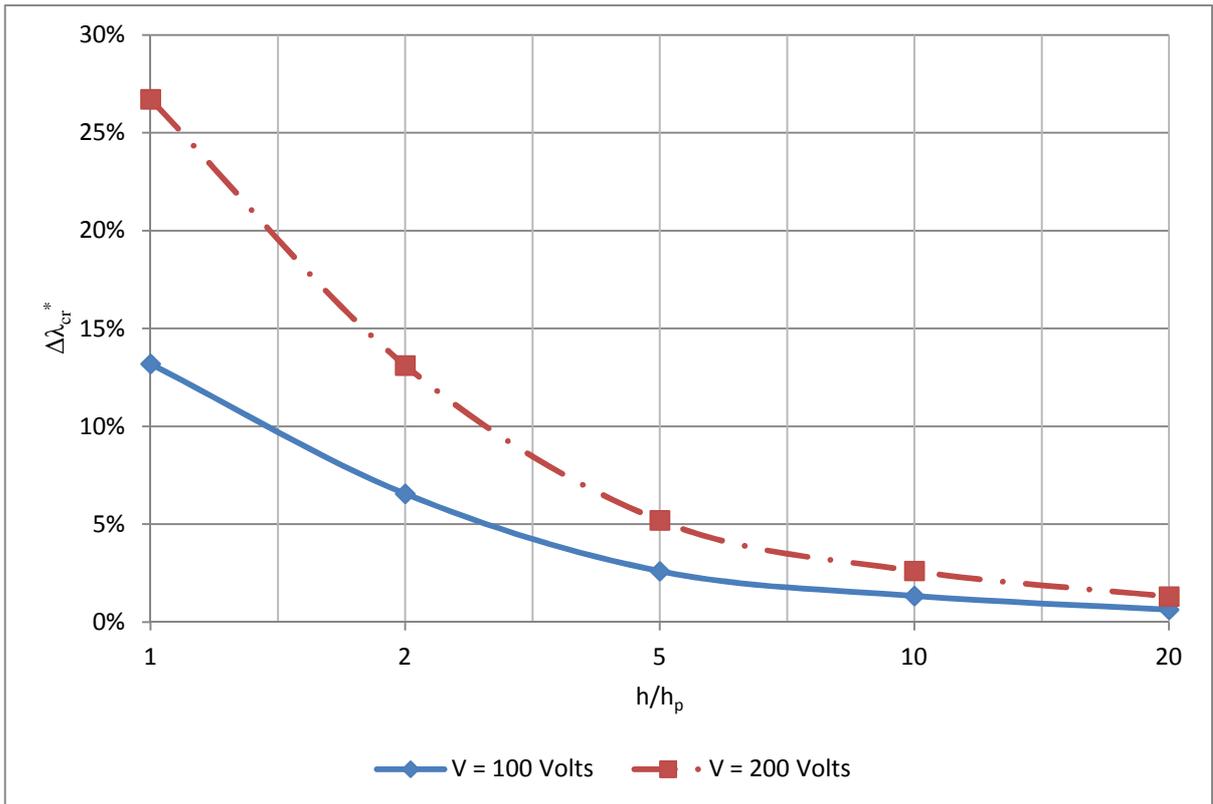


Figura 5.24 – Influência da razão de espessuras da placa e atuador. Placa de alumínio 2024-T3, simplesmente apoiada, $a/b = 1$, $a/h = 200$.

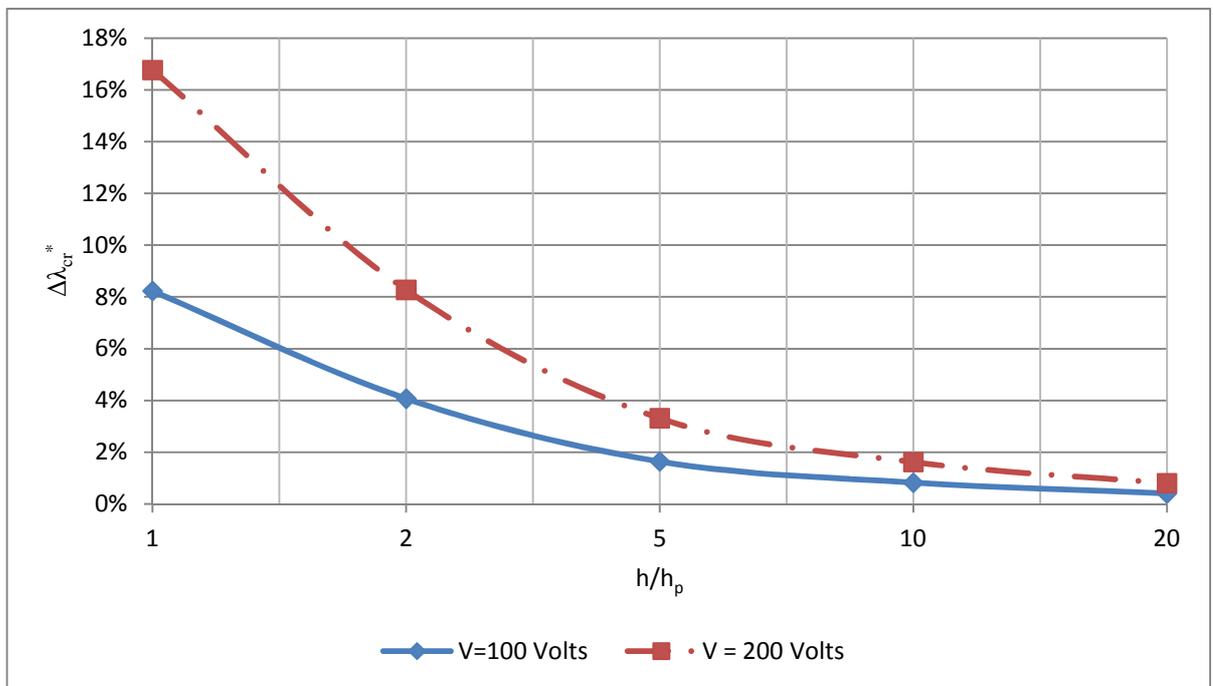


Figura 5.25 – Influência da razão de espessuras da placa e atuador. Placa de alumínio 2024-T3, engastada, $a/b = 1$, $a/h = 200$.

As Figuras 5.24 e 5.25 mostram que, quanto menor a espessura relativa do atuador piezoelétrico em relação à espessura da placa, menor é o incremento percentual em λ_{cr} , em ambas as condições de contorno. Desta forma, quanto mais próxima de 1 (um) for a razão de espessuras, mais efetiva será a atuação piezoelétrica.

Em um projeto de um sistema de controle de *flutter* por atuação piezoelétrica, deve-se encontrar a razão de espessuras ótima entre a placa e o atuador. Visto que, como mostram as análises anteriores, quando não houver atuação piezoelétrica, uma grande espessura do atuador implica em velocidade de ocorrência de *flutter* relativamente baixa. Porém, quando houver a atuação piezoelétrica, uma pequena espessura do atuador implica em pequeno aumento de rigidez aeroelástica, tornando-a pouco efetiva.

A Tabela 5.10 mostra os resultados de uma análise onde se investigou a variação no número de *Mach* de voo ao nível do mar, em uma placa quadrada de alumínio 2024-T3, simplesmente apoiada, onde $a/h = 200$ e $h/h_p = 10$.

Tabela 5.10 – Variação no M_{cr} para $h/h_p = 10$.

V	100 volts	200 volts
a/h	200	200
h/h _p	10	10
M_{cr} (sem atuação PZT)	2.84	2.84
M_{cr} (com atuação PZT)	3.01	3.18
ΔM	6,1%	12,2%

A primeira observação importante neste estudo é que, o número de *Mach* em que o *flutter* ocorre, $M_{cr} = 2.84$, corresponde a um escoamento supersônico onde a teoria do pistão é

aplicável, resultado este que valida o modelo aerodinâmico empregado na formulação do problema.

Quanto à influência da razão h/h_p na variação do número de *Mach* crítico, pode-se inferir que: Considerando um painel aeronáutico típico para voo supersônico, onde $h=4mm$, e duas camadas de lâminas de material piezoelétrico típico, onde $h_p=0,2mm$ (cada uma), de forma que $h/h_p=10$, um aumento em 12,2% no M_{cr} é substancial e não-desprezível, como sugerem as Figuras 5.24 para o incremento percentual em λ_{cr} em aproximadamente 3%, nas mesmas condições.

6. Conclusões e Perspectivas Futuras

O aumento da rigidez aeroelástica em *flutter* pode ser obtido por meio do emprego de atuadores piezoelétricos fixados à estrutura original de um painel aeronáutico. Este dispositivo permite o controle da velocidade e da frequência de ocorrência de *flutter*, em um intervalo cujos valores centrais de velocidade e frequência correspondem aos valores do painel original (sem os atuadores). Este estudo mostrou que é possível aumentar o parâmetro de pressão dinâmica de ocorrência de *flutter*, portanto a velocidade, em até aproximadamente 72 % em condições específicas de configuração do painel ($a/b=4$, engastada).

Neste trabalho, analisou-se a influência de parâmetros geométricos e do material no efeito de enrijecimento da estrutura devido ao efeito piezoelétrico. Empregaram-se na análise dois materiais: um material isotrópico característico de estruturas aeronáuticas, o alumínio 2024-T3; e outro fortemente ortotrópico de material composto, o boro-epóxi.

Embora no mercado não sejam encontrados atuadores piezoelétricos em forma de grandes placas, que possam cobrir integralmente um painel aeronáutico, e sim, pequenas peças que são dispostas em locais específicos da estrutura, neste trabalho considerou-se grandes placas de material piezoelétrico para fins acadêmicos, visando apenas ao entendimento da influência de grandezas geométricas (alongamento, curvatura, ângulo de laminação, espessura e condições de contorno) no parâmetro de pressão dinâmica de instabilidade aeroelástica do painel.

O estudo da influência do alongamento, em estruturas sob carregamento piezoelétrico, mostrou que painéis planos, simplesmente apoiados, com $a/b=4$, possuem o parâmetro de pressão dinâmica de instabilidade aeroelástica cerca de 9 vezes maior que o de

uma placa quadrada simplesmente apoiada. Além disso, esta razão aumenta quando uma tensão de até 200 volts é aplicada nos atuadores piezoelétricos. Portanto, o efeito do enrijecimento da estrutura devido ao efeito piezoelétrico tem forte relação com o alongamento do painel. Em outras palavras, o efeito piezoelétrico é amplificado quando o alongamento do painel aumenta.

O estudo da curvatura em estruturas sob carregamento piezoelétrico mostrou que a curvatura, na direção do escoamento de um painel, exerce grande influência quando o painel é quadrado e simplesmente apoiado, porém, quando o painel é engastado ou com alongamento maior que um, o efeito piezoelétrico é desprezível. Além disso, a maior variação em λ_{cr} ocorre quando $H/h \leq 2.0$. O efeito da curvatura é praticamente nulo quando $a/b = 2$, independentemente da condição de contorno.

O estudo da influência do ângulo de laminação mostra que o enrijecimento da estrutura devido ao efeito piezoelétrico ocorre em todos os ângulos de laminação. O enrijecimento do painel devido ao efeito piezoelétrico é maior quanto maior for o ângulo de laminação do painel, principalmente se o painel for simplesmente apoiado e $a/b=1$.

O estudo da aplicação de tensão elétrica inversa no atuador piezoelétrico mostrou que a estrutura responde linearmente a este sinal. Portanto, uma tensão “positiva” enrijece a placa, aumentando o parâmetro de pressão dinâmica crítica, e, a aplicação da tensão “negativa” diminui a rigidez da mesma, fazendo com que a placa entre *flutter* em uma velocidade menor que a correspondente velocidade da estrutura sem a atuação piezoelétrica.

A análise da razão entre as espessuras do painel e do atuador mostrou que quanto menor a espessura relativa do atuador piezoelétrico em relação à espessura do painel, menor é a efetividade da atuação piezoelétrica, em ambas as condições de contorno. Portanto, quanto mais próxima de 1 (um) for a razão de espessuras, mais efetiva será a atuação piezoelétrica.

O estudo sobre o uso de atuadores piezoelétricos mostrou que é possível controlar a velocidade de ocorrência de *flutter* em painéis aeronáuticos. A análise paramétrica conduzida neste trabalho apontou uma ampla gama de combinações de configuração que podem fornecer melhores condições de controle da instabilidade aeroelástica de *flutter* em painéis aeronáuticos.

Como sugestão para trabalhos futuros, propõe-se o desenvolvimento de um estudo de otimização para o cálculo da dimensão ótima dos atuadores, bem como o posicionamento dos mesmos sobre o painel, de forma a aumentar a estabilidade aeroelástica da estrutura com o mínimo de incremento em massa da estrutura, visto que, na prática, não existem atuadores piezoelétricos com as dimensões de painéis aeronáuticos.

Referências Bibliográficas

- ALLIK, H.; HUGHES, T. J. R. **Finite Element Method for Piezoelectric vibration.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.2, no.2, p.151-157, 1970.
- BATRA, R. C., LIANG, X. Q., YANG, J. S. **Shape control of vibrating simply supported rectangular plates,** AIAA Journal, v. 34, no. 1, p. 116-122, 1996.
- BISMARCK-NARS, M. N. **Finite Element Method Applied to the Flutter of Two Parallel Elastically Coupled Flat Plates.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 11, n. 7, pp. 1188-1193, 1977.
- BISMARCK-NARS, M. N. **Finite Element Analysis of Aeroelasticity of Plates and Shells.** Applied Mechanics Reviews, v. 45, n. 12, part 1, pp. 461-482, 1992.
- BISMARCK-NARS, M. N. **Structural Dynamics in Aeronautical Engineering.** Reston. AIAA Education Series, 1999.
- BISPLINGHOFF, Raymond L; ASHLEY, Holt. **Principles of Aeroelasticity.** Mineola. Dover Publications Inc, 2002.
- CRAWLEY, E. F.; ANDERSON, E. H. **Detailed Models of Piezoceramic Actuation of Beams.** Journal of Intelligent Material Systems and Structures, v. 1, no. 1, p. 4-25, 1990.
- CRAWLEY, E. F.; LUIS, J. **Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures,** AIAA Journal, v.25, no.10, p. 1373-1385, 1987.
- DE MARQUI JUNIOR, C., ERTURK, A., INMAN, D. **An electromechanical finite element model for piezoelectric energy harvester plates.** Journal of Sound and Vibration, v. 327, n. 1-2, pp. 9-25, 2009.
- DONADON, Maurício Vicente. **Vibração de Placas Laminadas na Presença de Tensões Induzidas Piezoeletricamente.** Tese (Mestrado em Ciências). Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2000.
- DOWELL, E. H. **Aeroelasticity of plates and shells.** Princeton. Princeton University, 1975.
- FARIA, A. R. **Simulação de vigas flexíveis contendo atuadores piezoelétricos.** Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos, 1995.
- FARIA, A. R.; ALMEIDA, S. F. M. **Modeling of Actively Damped Beams with Piezoelectric Actuators with Finite Stiffness Bond.** Journal of Intelligent Material Systems and Structures, v. 7., n. 6, p. 677-688, 1996.
- GHOSH, K.; BATRA, R. C. **Shape control of plates using piezoceramic elements.** AIAA Journal, v. 33, n. 7, p. 1354-1357, 1995.

GIRKMAN, K. **Flachentragwerke**. Springer-Verlag. Viena, 1956.

HERNANDES, J. A.; ALMEIDA, S.F.M; NABARRETE, A. **Stiffening effects on the free vibration behavior of composite plates with PZT actuators**. *Composite Structures*, v. 49, n. 1, p. 55-63, 2000.

HWANG, W. S.; PARK, H. C. **Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators**. *AIAA Journal*, v. 31, n.5, p. 930-937, 1993.

IEEE Standard on Piezoelectricity (American National Standards Institute, Washington, DC, 1976).

KARI-APPA, V., SOMASHEKAR, B. R., SHAH, C. G. **Discrete Element Approach to the Flutter of Skew Panels with Inplane Forces Under Yawed Supersonic Flow**. *AIAA Journal*, v. 8, n. 11, p. 2017-2022, 1970.

LEE, I. N., CHO, M. H. **Flutter Analysis of Composite Panels in Supersonic Flow**. *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 31 st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Long Beach, CA, 1990 (AIAA paper 90-1180).

LIMA JR., J. J. **Modelagem de Sensores e Atuadores Piezoelétricos com Aplicações em Controle Ativo de Estruturas**, Tese de Doutorado, Departamento de Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 243p., 1999.

LUCENA NETO, Eliseu. **Teoria de Placas e Cascas**. Apostila do curso AE-207. São José dos Campos: ITA, 2005.

MELIM, R. T. **Otimização de atuadores piezoelétricos em placas e cascas de material composto**. Tese (Mestrado em Ciências), Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 1996.

MACHADO, M. A. M. **Soluções analíticas para placas laminadas piezoelétricas**. Tese (Mestrado em Ciências). Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2004.

OLSON, M. D. **Some Flutter Solution Using Finite Elements**. *AIAA Journal*, v. 8, n. 4, p. 747-752, 1970.

PERRONI, Júlio César Buzar. **Uso de Atuadores Piezoelétricos para a Mudança da Carga de Flambagem de Placas Laminadas**. Tese (Mestrado em Ciências). Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2009.

PIDAPARTI, R. M. V., YANG, H. T. Y. **Supersonic Flutter Analysis of Composite Plates and Shells**. *AIAA Journal*, v. 31, n. 6, pp. 1109-1117, 1993.

PIEFORT, V. **Finite Element Modeling of Piezoelectric Active Structures**. Thesis (Doctor in Applied Sciences) – Faculty of Applied Sciences of Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, 2001.

REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis**. Boca Raton. CRC Press, 1997.

REISSNER, Eric. “**On Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells**”. J. Boston Soc. Civil Engineers, v. XLII, n. 2, pp. 100-133, Abril, 1955.

SANDER, G., BON, C., GERADIN, M. **Finite Element Analysis of Supersonic Panel Flutter**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 7, n. 3, pp. 379-394, 1973.

SRINIVASAN, R. S., BABU, B. J. **Free Vibration and Flutter of Laminated Quadrilateral Plates**. Computers and Structures, v. 27, n. 2, pp. 297-304, 1987.

TRINDADE, M. A., GODOY, T. C. **Modeling and analysis of laminate composite plates with embedded active–passive piezoelectric networks**. Journal of Sound and Vibration, v. 330, n. 2, pp. 194–216, 2011.

WANG, C.T. **Applied Elasticity**. McGraw-Hill Book Company. New York, 1953.

WASHIZU, K. **Some Considerations on Shell Theory**. Aeroelastic and Structures Research Laboratory Report 1001. MIT. October, 1960.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 06 de janeiro de 2012	3. REGISTRO N° DCTA/ITA/DM-079/2011	4. N° DE PÁGINAS 100
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: O efeito de enrijecimento por tensão piezoelectricamente induzida na estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos			
6. AUTOR: Alex Evangelista de Almeida			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Efeito piezoeletrico; Estabilidade aeroelástica; Flutter, Paineel aeronáutico; Método dos elementos finitos			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Estruturas de aeronaves; Atuadores piezoeletricos; Placas (membros estruturais); Análise de estabilidade; Vibração aeroelástica; Método de elementos finitos; Análise estrutural; Engenharia de materiais; Engenharia aeronáutica			
10. APRESENTAÇÃO: ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeronáutica e Mecânica. Área de Mecânica dos Sólidos e Estruturas. Orientador: Prof. Dr. Mauricio Vicente Donadon. Defesa em 06/12/2011. Publicada em 2011			
11. RESUMO: Este trabalho tem como objetivo o estudo da fronteira de estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos, curvos ou planos, sujeitos ao efeito de enrijecimento provocado pelo atuador piezoeletrico (PZT). Empregou-se o Princípio de Hamilton para a obtenção das equações de equilíbrio e das condições de contorno do problema. O método dos elementos finitos foi empregado para a solução das equações. Consideraram-se painéis manufaturados em material composto (boro-epóxi) ou em material convencional (alumínio 2024-T3) e duas camadas de material piezoeletrico (PZT-5A), uma na face superior e outra na face inferior da placa. Aplicou-se voltagem no atuador piezoeletrico e determinou-se a pressão dinâmica correspondente à condição de ocorrência de flutter da estrutura. A análise foi estendida para várias configurações do paineel, onde foram investigados: a variação do alongamento da placa, o efeito da curvatura, a influência do ângulo de laminação da placa, a influência das condições de contorno, o efeito da voltagem inversa e o efeito da variação de espessura do paineel. O estudo mostrou que a tensão mecânica induzida pelo efeito piezoeletrico aumenta a velocidade de ocorrência do flutter, estabilizando a placa. Este enrijecimento da estrutura está relacionado à voltagem aplicada nos atuadores e aos parâmetros geométricos da placa. Desta forma, pode-se controlar a velocidade de ocorrência de flutter através do controle da voltagem aplicada e no projeto adequado das propriedades geométricas do paineel.			
12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () CONFIDENCIAL () SECRETO			