



**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES**  
**Autarquia Associada à Universidade de São Paulo**

**Aplicação de Inteligência Artificial na Otimização e Análise de Incertezas em  
Materiais Compósitos Laminados**

**FELIPE BIERMANN KRUSCHE**

**Dissertação apresentada como parte dos  
requisitos para obtenção do Grau de  
Mestre em Ciências na Área  
de Tecnologia Nuclear - Reatores**

**Orientador:  
Prof. Dr. Roberto Navarro de Mesquita**

**São Paulo  
2023**



**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES**  
**Autarquia Associada à Universidade de São Paulo**

**Aplicação de Inteligência Artificial na Otimização e Análise de Incertezas em  
Materiais Compósitos Laminados**

**Versão Corrigida**

**Versão Original disponível no IPEN**

**FELIPE BIERMANN KRUSCHE**

**Dissertação apresentada como parte  
dos requisitos para obtenção do Grau de  
Mestre em Ciências na Área  
de Tecnologia Nuclear - Reatores**

**Orientador:  
Prof. Dr. Roberto Navarro de Mesquita**

**São Paulo  
2023**

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Como citar:

BIERMANN KRUSCHE, F. ***Aplicação de Inteligência Artificial na Otimização e Análise de Incertezas em Materiais Compósitos Laminados***. 2023. 124 f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia Nuclear), Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, IPEN-CNEN, São Paulo. Disponível em: <<http://repositorio.ipen.br/>> (data de consulta no formato: dd/mm/aaaa)

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de geração automática da Biblioteca IPEN,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biermann Krusche, Felipe

Aplicação de Inteligência Artificial na Otimização e Análise de Incertezas em Materiais Compósitos Laminados / Felipe Biermann Krusche; orientador Roberto Navarro de Mesquita. -- São Paulo, 2023.  
124 f.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Tecnologia Nuclear (Reatores) -- Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, 2023.

1. compósitos. 2. otimização. 3. incertezas. 4. algoritmos genéticos. 5. lógica fuzzy. I. Navarro de Mesquita, Roberto, orient. II. Título.

## Folha de Aprovação

**Autor:** Felipe Biermann Krusche

**Título:** Aplicação de Inteligência Artificial na Otimização e Análise de Incertezas em Materiais Compósitos Laminados

**Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Tecnologia Nuclear da Universidade de São Paulo para obtenção do Grau de Mestre em Ciências na Área de Tecnologia Nuclear - Reatores.**

**Data:** 02/08/2023

### Banca Examinadora

Prof. Dr. Roberto Navarro de Mesquita  
Instituição: Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares  
Julgamento: Aprovado

Prof Dr. Luiz Claudio Pardini  
Instituição: Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
Julgamento: Aprovado

Prof Dr. Paulo Roberto Barbosa  
Instituição: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
Julgamento: Aprovado



*Aos cientistas que vieram antes de nós,  
cuja curiosidade e dedicação abriram caminhos para novas descobertas.  
Que possamos continuar seu legado,  
explorando os limites do conhecimento e impulsionando a fronteira da ciência*



## AGRADECIMENTOS

Começo os agradecimentos à minha família, razão dos meus sonhos e da minha felicidade, sendo o pilar que dá significado e propósito à minha vida. À minha esposa, pelo apoio incondicional, motivação, compreensão e por estar sempre ao meu lado.

À Marinha do Brasil, pela inestimável oportunidade concedida, a qual me permitiu desenvolver e aprimorar meu conhecimento técnico-profissional.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Roberto Navarro de Mesquita, pela confiança depositada em mim, pelo apoio e pela constante motivação ao longo de todo o processo de desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores e funcionários da Pós-Graduação do IPEN, pelos valiosos ensinamentos, paciência, atenção e disponibilidade ao longo desta trajetória. Seu apoio e dedicação foram essenciais para o meu crescimento acadêmico.

Aos colegas da Marinha pela amizade sincera, apoio e incentivo, tanto antes como durante esta jornada. Sua camaradagem e encorajamento foram fundamentais para superar desafios e alcançar os objetivos estabelecidos.



*“A ciência é muito mais que um corpo de conhecimentos.  
É uma maneira de pensar.”  
(Carl Sagan)*



## RESUMO

O desenvolvimento de materiais com propriedades especiais para atender aos requisitos de projetos de alto desempenho tem impulsionado o uso de materiais compósitos devido às suas propriedades mecânicas superiores e baixo peso. Personalizar esses materiais para atender requisitos específicos do projeto apresenta desafios na busca pela combinação ideal de parâmetros. Além disso, a fabricação em larga escala dessas estruturas enfrenta variabilidades devido à imperfeições no processo. Para lidar com essas incertezas, há interesse em desenvolver métodos de otimização robustos que considerem as incertezas no projeto e nos parâmetros. Esse estudo desenvolveu uma metodologia e uma ferramenta computacional capazes de otimizar materiais compósitos laminados, levando em consideração as incertezas relacionadas às suas propriedades. O método permite reduzir o tempo e o custo em projetos de estruturas que utilizem esses materiais, além de fornecer informações sobre a resposta dessas estruturas diante de incertezas e demandas específicas da aplicação. A metodologia desenvolvida combina duas técnicas de inteligência artificial com um programa de análise estrutural. Essa abordagem busca identificar as estruturas mais adequadas entre uma ampla gama de possibilidades, considerando também a possível influência das incertezas nos parâmetros de projeto e na aplicação sobre as estruturas otimizadas. Algoritmo Genético e a Lógica Fuzzy são utilizados para otimizar e analisar as incertezas das estruturas, enquanto um Programa de Análise Estrutural (PAE), baseado em métodos de elementos finitos, fornece as respostas mecânicas das estruturas. Os resultados obtidos pelo PAE foram comparados com trabalhos já publicados e realizaram-se avaliações sobre os deslocamentos e tensões apresentados pelas estruturas quando submetidas a forças externas para casos lineares e não-linearidades, com grandes deslocamentos. Os resultados obtidos foram comparados com trabalhos publicados anteriormente, incluindo o método fechado de Navier baseado na Teoria da Deformação Cisalhante de Terceira Ordem (TSDT) e a Teoria de Deformação de Cisalhamento Hiperbólico Inverso (IHSdT), reconhecidos por sua precisão. Os deslocamentos calculados pelo programa apresentaram um desvio médio de apenas 1,22% em relação aos valores encontrados na literatura. Essa diferença tende a ser ainda menor em placas mais finas e com um maior número de camadas. Quanto às tensões, a diferença média foi inferior a 1%. Portanto, conclui-se que o modelo desenvolvido demonstra uma excelente precisão ao estimar os deslocamentos e as tensões nas estruturas, principalmente em placas finas compostas por um grande número de lâminas. A otimização utilizando Algoritmo Genético para encontrar as estruturas de menor peso e menor deslocamento vertical de uma placa composta por oito lâminas simétricas apresentou um alto desempenho computacional, com uma probabilidade superior a 95% de encontrar todas as combinações ótimas em uma única execução. O algoritmo analisou um espaço de busca com 65.536 combinações possíveis para o laminado e foram identificadas 251 estruturas ótimas, formando o conjunto conhecido como Ótimo de Pareto. Os resultados obtidos demonstram

que a metodologia desenvolvida é robusta e eficiente, especialmente em situações em que as informações sobre os materiais e sua aplicação são vagas ou imprecisas. Isso evidencia o potencial dessa abordagem para lidar com problemas complexos de projeto de estruturas compósitas.

**Palavras-chave:** compósitos laminados. otimização. incertezas. algoritmos genéticos. lógica *Fuzzy*.

## ABSTRACT

The demand for high-performance projects has led to the utilization of composite materials due to their exceptional mechanical properties and lightweight nature. However, customizing these materials to meet specific project requirements and dealing with manufacturing variability pose challenges in finding the optimal parameter combination. To address these uncertainties, there is a need to develop robust optimization methods that consider design and parameter uncertainties. In this study, a methodology and computational tool were developed to optimize laminated composite materials, considering uncertainties in their properties. This approach reduces design time and costs while providing insights into the response of structures to uncertainties and specific application demands. The methodology combines artificial intelligence techniques with a structural analysis program. Genetic Algorithm and Fuzzy Logic are employed to optimize and analyze uncertainties, while a Structural Analysis Program (PAE) based on finite element methods provides mechanical responses. The results obtained by the PAE were compared with previous studies, including Navier's closed method based on the Third Order Shear Deformation Theory (TSDT) and the Inverse Hyperbolic Shear Deformation Theory (IHSdT), known for their accuracy. The calculated displacements showed an average deviation of only 1.22% compared to literature values, with even smaller deviations on thinner plates and with more layers. Similarly, the average difference in stresses was less than 1%. These findings demonstrate the excellent precision of the developed model in estimating displacements and stresses, especially in thin plates composed of multiple layers. Using the Genetic Algorithm for optimization, the search space consisting of 65,536 possible combinations for the laminate was explored to find structures with lower weight and vertical displacement. The algorithm demonstrated high computational performance, with a probability greater than 95% of identifying all optimal combinations in a single run. Out of the search space, 251 optimal structures were identified, forming the Pareto Optimum set. The results highlight the robustness and efficiency of the developed methodology, particularly in situations where information about materials and their application is uncertain or imprecise. This approach has significant potential in addressing complex design problems for composite structures.

**Keywords:** optimization. uncertainties. genetic algorithms. Fuzzy logic.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Comparação de propriedades entre materiais monolíticos e compósitos. . . . .	27
Figura 2 – Tipos de materiais compósitos. Fonte [1] . . . . .	34
Figura 3 – Lâmina formada por fibras unidirecionais. . . . .	35
Figura 4 – Tipos de cargas aplicadas na determinação dos critérios de falhas. . . . .	38
Figura 5 – Sistema de coordenadas e numeração das lâminas . . . . .	40
Figura 6 – Sistemas de coordenadas de um material compósitos laminado. . . . .	41
Figura 7 – Elemento quadrilateral. . . . .	49
Figura 8 – Estrutura clássica de um algoritmo genético. . . . .	61
Figura 9 – Representação esquemática da estrutura básica de AG. . . . .	62
Figura 10 – Recombinação em um ponto. . . . .	63
Figura 11 – Exemplo de ranqueamento de acordo com o nível de dominância relativo e <i>crowding distance</i> . . . . .	66
Figura 12 – Ranqueamento dos indivíduos do NSGA-II. . . . .	66
Figura 13 – Resultados da otimização utilizando a análise de intervalos, o Método de Monte Carlo e a solução exata do problema. . . . .	69
Figura 14 – Conjuntos tradicionais e <i>Fuzzy</i> . . . . .	71
Figura 15 – Função de pertinência representando a imprecisão no valor de $E$ . . . . .	72
Figura 16 – Funções de pertinência triangular e trapezoidal. . . . .	73
Figura 17 – Conjuntos de cortes- $\alpha$ . . . . .	74
Figura 18 – Otimização de cortes- $\alpha$ . . . . .	75
Figura 19 – Fluxograma da metodologia do trabalho. . . . .	77
Figura 20 – Exemplo de laminado. . . . .	80
Figura 21 – Fonte: [2] . . . . .	82
Figura 22 – Representação de individuo para análise de incertezas combinadas. . . . .	83
Figura 23 – Condições de contorno para uma placa simplesmente apoiada. . . . .	86
Figura 24 – Curva pressão-deslocamento central para uma placa simplesmente apoiada. . . . .	87
Figura 25 – Deslocamento central normalizado para diversas configurações do lami- nado. . . . .	88
Figura 26 – Curva pressão-deslocamento central para uma placa simplesmente apoiada. . . . .	90
Figura 27 – Análise de tensões na face inferior do laminado. . . . .	92
Figura 28 – Análise de tensões na face superior do laminado. Fonte: Autor . . . . .	93
Figura 29 – Dimensões e condições de contorno da placa quadrada a ser otimizada. . . . .	94
Figura 30 – Curva peso-deslocamento para todas as estruturas possíveis. . . . .	95
Figura 31 – Confiabilidade aparente da otimização. . . . .	97
Figura 32 – Custo computacional da otimização. . . . .	98

Figura 33 – Função de pertinência para uma lâmina de 90° . . . . .	99
Figura 34 – Influência das incertezas sobre a deflexão da placa. . . . .	100
Figura 35 – Representação <i>Fuzzy</i> do deslocamento vertical do Ponto Q. . . . .	101
Figura 36 – Entradas <i>Fuzzy</i> para cada corte- $\alpha$ aplicado ao Ponto <b>Q</b> (1 <sup>o</sup> a 4 <sup>o</sup> camadas)	101
Figura 37 – Entradas <i>Fuzzy</i> para cada corte- $\alpha$ aplicado ao Ponto <b>Q</b> (5 <sup>o</sup> a 8 <sup>o</sup> camadas).	102
Figura 38 – Intervalo de resposta para diferentes orientação das fibras para a confi- guração do Ponto A. . . . .	102
Figura 39 – Indicação da estrutura a ser analisada. . . . .	103
Figura 40 – Malha de elementos finitos com indicação dos pontos de integração onde foram calculados as tensões. . . . .	104
Figura 41 – Tensões $\sigma_{XX}$ de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior. . . . .	104
Figura 42 – Tensões $\sigma_{YY}$ de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior. . . . .	105
Figura 43 – Tensões de cisalhamento de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior. . . . .	105
Figura 44 – Função de pertinência para as incertezas nas espessuras das lâminas. .	106
Figura 45 – Resposta da placa para variações nas espessuras das lâminas ( $\alpha = 0.00$ ).	107
Figura 46 – Função de pertinência de saída para diversas estruturas. . . . .	107
Figura 47 – Tensões $\sigma_{XX}$ de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior. . . . .	108
Figura 48 – Tensões $\sigma_{YY}$ de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior. . . . .	108
Figura 49 – Tensões de cisalhamento de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior. . . . .	109
Figura 50 – Função de pertinência para o módulo de elasticidade longitudinal. . . .	110
Figura 51 – Influência das incertezas sobre a deflexão da placa. . . . .	110
Figura 52 – Função de pertinência de saída para o Ponto <b>Q</b> . . . . .	111
Figura 53 – Tensões $\sigma_{XX}$ de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior. . . . .	111
Figura 54 – Tensões $\sigma_{YY}$ de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior. . . . .	112
Figura 55 – Tensões de cisalhamento de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior. . . . .	112
Figura 56 – Influência das incertezas sobre a deflexão da placa. . . . .	114
Figura 57 – Função de pertinência de saída para o Ponto <b>Q</b> . . . . .	114

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dicionário de codificação dos genes dos cromossomos “CA” e “CE”. . .	79
Tabela 2 – Dicionário de codificação dos genes dos cromossomos para quantificação de incertezas. . . . .	83
Tabela 3 – Efeito do número de camadas e da razão $a/h$ no deslocamento vertical do centro da placa. . . . .	89
Tabela 4 – Cálculo de tensões para diversos pontos de integração. . . . .	91
Tabela 5 – Propriedades elásticas do material . . . . .	94
Tabela 6 – Conjunto de pontos ótimos. . . . .	95
Tabela 7 – Parâmetros do algoritmo genético. . . . .	97
Tabela 8 – Extremos de respostas para as tensões $\sigma_{xx}$ para os diversos elementos da placa. . . . .	113
Tabela 9 – Extremos de resposta para as tensões $\sigma_{xx}$ para os diversos elementos da placa. . . . .	113



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AG	Algoritmos genéticos
AGMO	Algoritmos genéticos multiobjetivos
CA	Cromossomo de ângulos
CCCC-I	Engastada tipo I
CCCC-II	Engastada tipo II
CD	Crowding distance
CE	Cromossomo de espessuras
FPL	Falha da primeira lâmina
FSDT	Teoria de Placa Laminada por Deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem
FUL	Falha última do laminado
IHSdT	Teoria de Deformação de Cisalhamento Hiperbólico Inverso
MEF	Método de elementos finitos
MFA	Método do fator aleatório
MOAD	Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition
NSGA-II	Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II
PAN	Poliacrilonitrila
PRF	Polímeros reforçados por fibras
Pymoo	Multi-objective Optimization in Python
RRRR	Rotulada
SSSS-I	Simplesmente apoiada tipo I
SSSS-II	Simplesmente apoiada tipo II
SMC	Simulação de Monte Carlo
SPEA-2	Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2

TLC Teoria clássica dos laminados

TSDT Teoria da Deformação Cisalhante de Terceira Ordem

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\tilde{A}$	Número ou conjunto <i>Fuzzy</i>
$A_{\alpha k}$	Intervalo do corte- $\alpha$ do número <i>Fuzzy</i> $\tilde{A}$
$[A], [B], [D]$	Matrizes de relação tensão-deformação de membrana, flexão e acoplamento membrana-flexão para o elemento
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$\varepsilon_{ii}, \varepsilon_{jj}, \gamma_{ij}$	Componentes de deformação
$\varepsilon_{ii}^0, \varepsilon_{jj}^0, \gamma_{ij}^0$	Componentes de deformação da superfície média
$f_i, f_{ij}$	Componentes de resistência do tensor de <i>Tsai-Wu</i>
$\{F_{ext}\}$	Vetor de forças externas
$\{F_{int}\}$	Vetor de forças nodais equivalente devido a forças internas
$F_{1t}$	Resistência a tração na direção das fibras
$F_{1c}$	Resistência a compressão na direção das fibras
$F_{2t}$	Resistência a tração na direção transversal das fibras
$F_{2c}$	Resistência a compressão na direção transversal das fibras
$F_6$	Resistência ao cisalhamento no plano do laminado
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$J$	Operador Jacobiano
$\kappa_{ii}, \kappa_{jj}, \kappa_{ij}$	Componentes de curvaturas
$[K_L]$	Matriz de rigidez linear
$[K_{NL}]$	Matriz de rigidez não-linear
$\mu(x)$	Função de pertinência
$\{M\}$	Vetor de momentos
$\{N\}$	Vetor de forças normais
$N$	Pontos de Gauss

$[Q]^k$	Matriz de relação tensão-deformação da lâmina $k$
$[Q^*]^k$	Matriz de rigidez intralaminar da lâmina $k$
$[\bar{Q}]^k$	Matriz de relação tensão-deformação da lâmina $k$ segundo eixos do laminado
$\{R\}$	Vetor de forças residuais
$\{\sigma\}$	Vetor de tensões
$[T]$	Matriz de relação tensão-deformação da lâmina $k$ segundo eixos do laminado
$\theta_x, \theta_y$	Componentes de deslocamento de rotação da placa
$u, v, w$	Componentes do vetor deslocamento $[u]$
$u_0, v_0, w_0$	Deslocamentos dos pontos localizados na superfície média do laminado
$\nu$	Coefficiente de <i>Poisson</i>
$\{\Delta U\}$	Vetor de incremento de deslocamentos
$\xi, \eta$	Coordenadas naturais do elemento
$x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}$	Coordenadas principais da $k$ -ésima lâmina
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas
$\underline{X}_j, \overline{X}_j$	Limite inferior e superior do intervalo

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>27</b>
<b>1.1</b>	<b>Motivação</b>	<b>27</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>30</b>
<b>1.3</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>30</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>33</b>
<b>2.1</b>	<b>Materiais Compósitos</b>	<b>33</b>
2.1.1	Classificação dos Materiais Compósitos	33
2.1.2	Compósitos de matriz polimérica reforçados por fibras	34
2.1.3	Tipos de Laminados	36
2.1.4	Falha em materiais compósitos	36
<b>2.2</b>	<b>Mecânica das Placas de Compósitos Laminados</b>	<b>39</b>
2.2.1	Considerações iniciais	39
2.2.2	Deslocamentos e deformações	41
2.2.3	Matrizes constitutivas do laminado	43
2.2.4	Relação tensão-deformação	44
<b>2.3</b>	<b>Método de elementos finitos</b>	<b>47</b>
2.3.0.1	O elemento quadrilateral plano	48
2.3.0.2	Deformação e deslocamento	50
2.3.0.3	Matrizes de rigidez	51
2.3.0.4	Forças	53
2.3.0.5	Integração numérica	53
2.3.0.6	Formulação para análise de grandes deslocamentos	56
2.3.0.7	Método de solução iterativo	57
<b>2.4</b>	<b>Otimização</b>	<b>58</b>
2.4.1	Conceito matemático de otimização	59
2.4.2	Algoritmos Genéticos	60
2.4.2.1	Evolução genética	60
2.4.3	Algoritmos genéticos multiobjetivos	64
2.4.3.1	Algoritmos genéticos multiobjetivos baseados em Pareto	65
2.4.3.2	Algoritmos genéticos baseados em decomposição	65
2.4.4	Algoritmo Genético II de Seleção Não-dominada (do inglês Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II) (NSGA-II)	65
<b>2.5</b>	<b>Incertezas em Materiais Compósitos</b>	<b>67</b>
2.5.0.1	Simulação de Monte Carlo	67

2.5.1	Análise de Intervalos . . . . .	68
2.5.2	Lógica <i>Fuzzy</i> . . . . .	70
2.5.2.1	Conjuntos <i>Fuzzy</i> . . . . .	70
2.5.2.2	Fuzzyficação . . . . .	71
2.5.3	Propagação de Incertezas <i>Fuzzy</i> em materiais compósitos . . . . .	73
2.5.3.1	Discretização- $\alpha$ dos valores <i>Fuzzy</i> . . . . .	74
2.5.3.2	Otimização dos Cortes- $\alpha$ . . . . .	74
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>3.1</b>	<b>Algoritmo Genético para otimização das estruturas de materiais compósitos . . . . .</b>	<b>78</b>
3.1.1	Variáveis manipuladas . . . . .	78
3.1.2	Codificação das estruturas . . . . .	79
3.1.3	População inicial . . . . .	80
3.1.4	Seleção dos pais . . . . .	80
3.1.5	Avaliação da aptidão . . . . .	81
3.1.6	Recombinação . . . . .	81
3.1.7	Mutação . . . . .	81
3.1.8	Critério de parada . . . . .	82
<b>3.2</b>	<b>Algoritmo Genético para a quantificação de incertezas . . . . .</b>	<b>82</b>
3.2.1	Variáveis manipuladas . . . . .	82
3.2.2	Codificação das estruturas . . . . .	82
<b>3.3</b>	<b>Programa de Análise Estrutural . . . . .</b>	<b>84</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>85</b>
<b>4.1</b>	<b>Análise Estrutural . . . . .</b>	<b>85</b>
4.1.0.1	Condições de contorno . . . . .	85
4.1.0.2	Propriedades dos materiais . . . . .	86
4.1.1	Análise estática linear . . . . .	87
4.1.1.1	Placa quadrada simplesmente apoiada sobre uma carga uniformemente distribuída . . . . .	87
4.1.1.2	Placa quadrada simplesmente apoiada sobre uma carga distribuída sinusoidalmente . . . . .	88
4.1.2	Análise estática não-linear geométrica . . . . .	89
4.1.2.1	Placa quadrada submetida a um carregamento uniforme . . . . .	90
4.1.3	Análise de tensões . . . . .	90
4.1.3.1	Análise linear de tensões em uma placa <i>cross-ply</i> . . . . .	91
4.1.3.2	Análise não linear de tensões em uma placa simplesmente apoiada . . . . .	91
<b>4.2</b>	<b>Otimização e Análise de Incertezas . . . . .</b>	<b>92</b>

4.2.1	Descrição do problema . . . . .	92
4.2.2	Soluções . . . . .	94
4.2.3	Otimização . . . . .	96
4.2.4	Análise das Incertezas . . . . .	98
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>115</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>117</b>



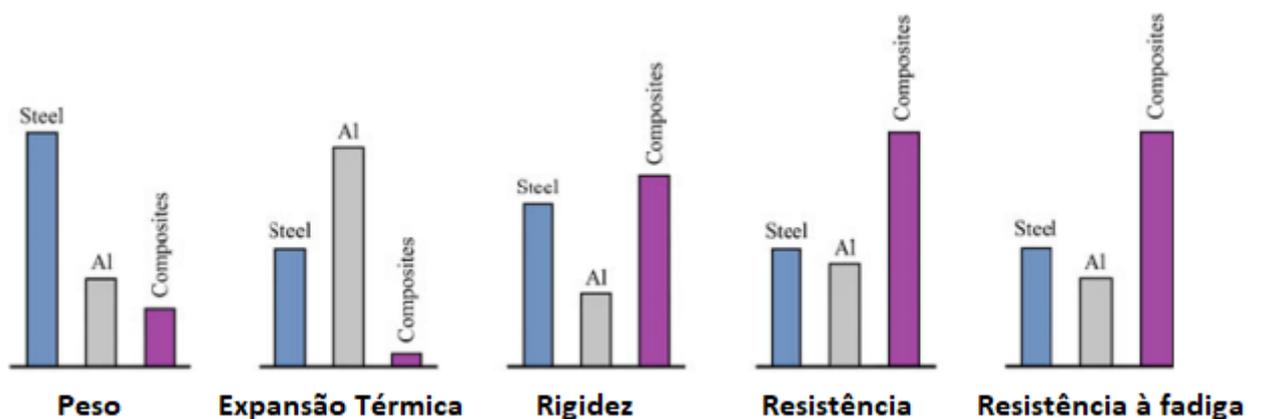
# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação

Em diversos campos da engenharia, a busca por um projeto de alto desempenho exige a criação de materiais com características únicas e adaptadas à aplicação pretendida. Geralmente, o objetivo é minimizar o peso (ou quantidade de material) e, ao mesmo tempo, aprimorar propriedades específicas, como a rigidez mecânica, resistência, isolamento térmico, isolamento acústico, entre outras.

Neste contexto, os materiais poliméricos despontam quando contrastados a outros materiais tipicamente utilizados na engenharia, como os metálicos e cerâmicos [3]. A utilização de materiais compósitos em aplicações de engenharia pode resultar em inúmeros benefícios em relação aos materiais convencionais, incluindo melhor resistência, rigidez, densidade, resistência à fadiga, corrosão e desgaste, bem como melhor isolamento, condutividade e estabilidade térmica [4]. A Fig. 1 fornece uma comparação das propriedades de materiais monolíticos e compostos. No entanto, estes não são os únicos fatores que tornam os materiais compósitos atraentes. Materiais compósitos possuem a característica de poderem ter suas propriedades manipuladas para atender a certas restrições do projeto ou para aprimorar algum atributo.

Figura 1 – Comparação de propriedades entre materiais monolíticos e compósitos.



Fonte: [3]

O profissional envolvido no desenvolvimento de um material compósito polimérico deve dominar um amplo campo de técnicas de cálculo estrutural e de fabricação, além daquelas necessárias para a caracterização mecânica do material fabricado. Todo o trabalho em busca do melhor material tem sido realizado ao longo dos anos com base,

principalmente, na experiência acumulada do projetista [5].

Tradicionalmente, o projeto de um material composto polimérico se inicia com a identificação dos requisitos de engenharia que devem ser atendidos. Posteriormente, o projetista produz protótipos com soluções prospectivas que atendam a esses requisitos e avalia suas características. A partir daí inicia um processo iterativo visando diminuir o consumo de material ou melhorar seu desempenho. Este é um processo caro e ineficiente, que depende fortemente da sensibilidade do projetista [5].

À medida que materiais compósitos continuam a substituir os materiais tradicionais e novas técnicas de fabricação são desenvolvidas, maiores são as variáveis com que o projetista deve se preocupar, o que aumenta drasticamente a dificuldade do trabalho. Essa complexidade pode ser tratada por meio do uso de técnicas de otimização matemática destinadas a maximizar ou minimizar propriedades específicas. A aplicação dessas técnicas a problemas estruturais oferece uma abordagem bem definida e estruturada para o projeto de materiais compósitos poliméricos, diminuindo, dessa forma, a dependência da experiência do projetista [5].

Por outro lado, a vantagem que os materiais compósitos oferecem em termos da capacidade de manipulação dos parâmetros de suas propriedades para alcançar os requisitos específicos da aplicação, traz consigo um desafio significativo em atender as especificações exatas do projeto para a produção em larga escala. Essa dificuldade origina-se nas imperfeições inerentes aos processos de fabricação, o que inclui o excesso de vazios intra-laminares, polimerização incompleta da resina, excesso de resina entre as camadas, porosidade, excesso de vazios na matriz, variações na espessura das lâminas, parâmetros da fibra e outros. Assim, é necessário contabilizar essas variabilidades, seja por meio de margens de segurança, técnicas de confiabilidade ou quantificação de incertezas, ainda na fase de projeto [6].

Para agravar essa situação, em problemas práticos de engenharia, especificações, objetivos e restrições frequentemente são vagos e subjetivos, valendo-se de expressões linguísticas como “mais leve”, “mais forte”, “mais durável” sem que se tenha uma definição clara do que isso representa em termos numéricos [7]. Esse grau de liberdade se justifica pois os objetivos normalmente são conflitantes. Assim, não existe uma solução ideal, mas aquela que atenda da melhor forma possível a aplicação pretendida.

A situação de desenvolvimento desses materiais descrita acima tem atraído inúmeros estudos e desenvolvimentos na área. Nos últimos anos, engenheiros e cientistas têm demonstrado grande interesse no desenvolvimento de otimizações robustas para o projeto de novas estruturas mecânicas. O objetivo dessas otimizações é considerar incertezas e variações no projeto, como dados de solicitação da aplicação, parâmetros e modelos, para produzir resultados mais precisos. Embora modelos determinísticos possam ser usados

como ponto de partida, eles são inadequados para a modelagem precisa do problema, pois não consideram essas incertezas [8].

Vários estudos relatam o uso de métodos intrusivos (ou perturbativos) para quantificar incertezas em materiais compósitos [9, 10]. No entanto, essa abordagem enfrenta a dificuldade em se obter dados probabilísticos abrangentes e confiáveis, o que requer um número suficiente de amostras em condições reprodutíveis. Além destes pontos, muitos dos resultados obtidos são válidos apenas para um baixo grau de estocasticidade nos parâmetros de entrada.

Para quantificar incertezas de forma não intrusiva, modelos estocásticos são tipicamente empregados. Esses modelos geram resultados simulando repetidamente um problema, cada vez com um conjunto diferente de parâmetros de entrada extraídos de uma distribuição de probabilidade. Uma técnica bastante comum desta abordagem é a Simulação de Monte Carlo (SMC), que realiza milhares ou dezenas de milhares de cálculos antes de convergir para um resultado que represente a distribuição de saídas possíveis. No entanto, para problemas que exigem avaliações de modelo computacionalmente intensivas (tal como o método de elementos finitos), a SMC tem praticidade limitada [11].

Devido a essas dificuldades, a quantificação de incertezas em projetos de engenharia exige o desenvolvimento de técnicas mais abrangentes [12]. Abordagens não-probabilísticas estão ganhando cada vez mais atenção, especialmente quando os dados são insuficientes, em que a análise determinística se torna inadequada [13].

Do exposto, o cerne deste trabalho reside na utilização de uma abordagem não-probabilística de quantificação de incertezas, o método de cortes- $\alpha$ , aplicada em conjunto com o algoritmo evolucionário NSGA-II. Essa abordagem demonstra a aplicação inteligente de ferramentas computacionais de última geração para resolver desafios complexos. A integração do método de elementos finitos para o cálculo estrutural aprimora ainda mais a solução proposta, possibilitando uma análise mais realista e precisa das propriedades mecânicas dos materiais compósitos em condições de incerteza.

A otimização por AG foi escolhida tendo em vista sua capacidade em realizar buscas em espaços de respostas complexos e que fazem o uso preponderante de variáveis discretas, como é o caso encontrado em problemas envolvendo materiais compósitos laminados e na propagação de incertezas pelo método de cortes- $\alpha$ .

O uso da lógica *Fuzzy*, por meio do método de cortes- $\alpha$ , foi utilizada para a quantificação de incertezas devido a sua aptidão em caracterizar as incertezas quando não há informações suficientes sobre as incertezas relativas ao material. Em aplicações reais de projeto estruturais, diversas vezes não se dispõem de uma amostra adequada para o estudo e muitas vezes as condições de reprodutibilidade de uma amostra variam. Dessa forma, o uso de abordagens não-probabilísticas, como é o caso, se torna mais apropriado.

O método empregado para calcular as respostas estruturais envolveu o uso de elementos finitos. Essa abordagem foi considerada adequada tendo em vista a sua capacidade em simular respostas estruturais complexas, como no caso de grandes deslocamentos e geometrias irregulares. A adoção desse método abre caminho para a utilização da técnica desenvolvida em aplicações industriais.

## 1.2 Objetivos

O objetivo deste estudo é desenvolver um método para otimizar e analisar os efeitos das incertezas nos parâmetros de entrada de uma placa de material compósito, por meio de técnicas de inteligência artificial, nomeadamente algoritmos genéticos (AG) e lógica difusa (*Fuzzy*), nas estruturas otimizadas. Para consecução desse objetivo, será desenvolvido um método computacional capaz de realizar a otimização de materiais compósitos e posteriormente será aplicado o método de otimização de cortes- $\alpha$  para quantificar as incertezas inerentes a esse tipo de material. Espera-se com isso reduzir o tempo e o custo no projeto de estruturas que utilizem materiais compósitos, ao mesmo tempo em que proporciona uma compreensão minuciosa e precisa de como essas estruturas reagem diante de incertezas e variações nos valores das variáveis de entrada.

## 1.3 Revisão Bibliográfica

Nesta seção será apresentada uma visão geral da quantificação de incertezas e uma revisão geral da literatura relacionada à quantificação de incertezas em estruturas formadas por materiais compósitos.

Venini e Mariani [14] usaram o método Rayleigh-Ritz para vibração livre dinâmica para a análise de placas compostas considerando as incertezas nas propriedades do material, densidade de massa e rigidez da fundação Winker. Oh e Librescu [15] usaram o método de elementos finitos (MEF) estocástico para análise de vibração e confiabilidade de vigas de placas de materiais compósitos com propriedades incertas do material, espessura e ângulo de orientação das camadas. Singh et al. [16] analisaram os efeitos das propriedades variáveis do material na vibração livre de painéis compostos usando a abordagem baseada em perturbação. O trabalho de Wang e Zhao [17] combinou a SMC e o modelo *shear-lag* modificado para desenvolvimento de uma estrutura analítica para investigar o comportamento mecânico de compósitos em relação à resistência à tração, rigidez e processo de falha em ambiente a baixas temperaturas. Onkar e Yadav [18] analisaram a vibração forçada de um laminado *cross-ply* formado por placas usando métodos analíticos tendo como entrada valores randômicos dos parâmetros dos materiais. O trabalho de Allegri et al. [19] empregou MEF juntamente com SMC para análise de vibração estocástica de treliça formada por materiais compósitos para aplicações espaciais

e comparou os resultados obtidos com os resultados alcançados pelo método perturbações aproximadas. Por fim, Gao et al. [20] utilizou o Método do Fator Aleatório (MTA) para caracterizar a análise dinâmica estocástica de treliça formada por compósitos, em que os modos e frequência de vibração foram determinadas.

A revisão bibliográfica apresentada até agora mostra que duas abordagens proeminentes para a quantificação de incertezas em estruturas formadas por materiais compósitos: abordagens baseadas em perturbação e abordagens baseadas em simulações de Monte Carlo. A principal desvantagem em abordagens baseadas em perturbação pode ser identificada como a exigência de derivação analítica intensiva e a falta de capacidade em se obter a descrição probabilística completa das quantidades de resposta. Além disso, esta abordagem é válida apenas para um baixo grau de estocasticidade dos parâmetros de entrada. Abordagens baseadas em simulações de Monte Carlo conseguem contornar essas lacunas. Porém, simulações de Monte Carlos são computacionalmente caras devido à exigência de realização de grande número de simulações, além de se necessitar uma correta caracterização probabilística das incertezas, o que nem sempre é o caso, especialmente no desenvolvimento de novos materiais.

Diante das limitações apresentadas acima, uma abordagem não probabilística se torna muito mais realista. Dessa forma, uma revisão da literatura relacionada a abordagem não probabilística de propagação de incertezas (*Fuzzy*) para materiais compósitos é apresentada a seguir.

O método de análise de intervalos é apresentado por Möller et al. [21], onde variáveis *Fuzzy* são discretizadas em intervalos definidos ao longo da função de pertinência. Hanss [22], propôs o método da transformação para sistemas com variáveis *Fuzzy*, onde foi feita uma adaptação da aritmética *Fuzzy* para se evitar a superestimação dos intervalos resultantes, sendo sugerida uma abordagem na forma geral e reduzida. Posteriormente, Hanss [23], propôs a forma estendida dessa metodologia. O trabalho de Qiu e Hu [24] empregou o método não probabilístico de análise de intervalos para a análise de vibrações transitórias de placas de materiais compósitos cruzados considerando diferentes fontes de incertezas. Moens e Hanss [25], apresentaram uma revisão das metodologias existentes para análises não probabilísticas aplicadas a elementos finitos. Pawar et al. [26] utilizaram a lógica difusa (*Fuzzy*) para analisar paredes finas de vigas construídas com materiais compósitos. No trabalho de Serafinska et al. [27], foram utilizadas incertezas modeladas como números *Fuzzy* em uma otimização multiobjetivo que visava reduzir a variabilidade resultando em robustez da resposta. Secgin et al. [28] empregaram o modelo de valor extremo para a análise estocástica dinâmica (vibração livre e forçada) de placas laminadas simétricas considerando diferentes ângulos de orientação, taxa de amortecimento e condições de contorno. Lara-Molina et al. [29], utilizaram a otimização de cortes- $\alpha$  e aplicaram em três exemplos distintos: massa-mola-amortecedor, suspensão automotiva com dois graus

de liberdade e um rotor flexível modelado por elementos finitos. No trabalho de Awruch e Gomes [30], a metodologia de análise de intervalos por otimização foi aplicada para avaliar o comportamento de uma estrutura inteligente frente a incertezas das propriedades e parâmetros do material compósito.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Materiais Compósitos

De acordo com a definição tradicional, materiais compósitos ou, simplesmente, compósitos, são materiais sólidos que resultam da combinação de dois ou mais materiais distintos em nível macroscópico [31], sendo normalmente compostos por uma matriz polimérica reforçada por outro material. O objetivo de juntar vários materiais distintos dessa forma é obter propriedades mecânicas superiores que nenhum dos componentes poderiam atingir individualmente.

#### 2.1.1 Classificação dos Materiais Compósitos

Atualmente, há uma vasta gama de materiais compósitos disponíveis. Em geral, os componentes de um compósito podem ser categorizados como matriz e reforço. Em compósitos destinados a fins estruturais, o reforço, tipicamente descontínuo, exibe rigidez e resistência superior quando comparado ao componente da matriz, que geralmente é contínua. A matriz, por sua vez, protege o reforço contra danos mecânicos e de ataques químicos em ambientes agressivos. Embora a contribuição da matriz para a resistência e rigidez longitudinal do compósito seja insignificante, ela desempenha um papel crucial no aumento da resistência transversal ou ao cisalhamento, auxiliando na transmissão de carga de maneira mais eficiente [1].

Os materiais compósitos podem ser classificados em diferentes categorias segundo o tipo, geometria e orientação do reforço, bem como pela matriz empregada. A Fig. 2 apresenta alguns tipos de materiais compósitos:

- Fibrosos: compostos por fibras suspensas na matriz;
- Particulados: compostos por partículas suspensas na matriz;
- Floculados: compostos por flocos caracterizados pela alta razão entre área da seção transversal e espessura;
- Reticulados: compostos por uma matriz reticuladas com vazios preenchidos por outro material; e
- Laminados: compostos por várias lâminas ligadas umas às outras.

Os reforços em forma de fibras são normalmente compostos por um conjunto de finos filamentos, caracterizados por uma alta razão entre seu comprimento e outras



Figura 2 – Tipos de materiais compósitos. Fonte [1]

dimensões [32]. Vários materiais, incluindo fibras de vidro, de carbono e de aramida, podem servir como reforços para um compósito. As propriedades mecânicas de um material compósito são, portanto, determinadas pelas propriedades de seus materiais constituintes, bem como pela geometria e distribuição de cada fase [33].

Para se chegar a uma estrutura eficiente formada de compósitos e que atenda a todos os requisitos de uma aplicação específica, é necessária uma seleção criteriosa de vários fatores, incluindo a orientação das fibras, a fração volumétrica das fibras na matriz, o número de lâminas e a sequência de empilhamento, além da geometria. A capacidade de ajustar esses fatores oferece amplas possibilidades de adaptação dos materiais compósitos à aplicação, a fim de alcançar as propriedades mecânicas desejadas. Essa flexibilidade distingue os compósitos de outros materiais comumente usados na engenharia.

### 2.1.2 Compósitos de matriz polimérica reforçados por fibras

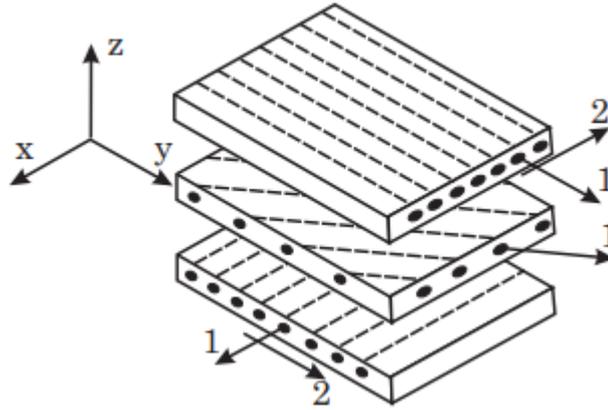
Neste trabalho serão abordados especificamente estruturas formadas por finas lâminas de material compósito sobrepostas e unidas umas às outras (Fig. 3), as quais são denominadas de placas de compósitos laminados e serão tratados no restante deste trabalho simplesmente como compósitos. O reforço é constituído de fibras contínuas e unidirecionais, alinhadas paralelamente em cada lâmina segundo uma orientação específica.

A construção de materiais compósitos dessa maneira garante que o material resultante pode resistir a forças que atuam em diferentes sentidos, devido à natureza ortotrópica das lâminas. De outra forma, a resistência e a rigidez do material são consideravelmente maiores na direção paralela à orientação das fibras do que na direção perpendicular a ela.

As lâminas desse tipo de estrutura são denominadas de Polímeros Reforçados por Fibras (PRF), que possuem espessuras típicas da ordem de 0.1-1mm. As fibras mais usadas como reforço nos compósitos de matriz polimérica são fabricadas com vidro, carbono ou aramida. Milhares de fibras formam um feixe que pode ser usado dessa forma ou em formas de tecidos.

A fibra de vidro é um material compósito composto por filamentos de vidro

Figura 3 – Lâmina formada por fibras unidirecionais.



Fonte: [4].

entrelaçados, que apresenta diâmetro entre 5 e  $25\mu\text{m}$ . A fibra de vidro apresenta propriedades únicas, tal como elevada resistência à tração, flexibilidade, baixo custo, alta resistência química e boas propriedades isolantes. Contudo, é importante destacar que a fibra de vidro apresenta algumas desvantagens como baixo módulo de elasticidade, pouca adesão a polímeros, alta densidade, sensibilidade à abrasão e baixa resistência à fadiga. A fibra de vidro é a mais utilizada em aplicações industriais de baixo custo [34].

A fibra de carbono apresenta elevada resistência e rigidez específicas, baixo coeficiente de expansão térmica, boa resistência química, resistência à fadiga e fluência, e alta condutividade elétrica. Suas desvantagens incluem o alto custo e pouca resistência ao impacto devido à sua fragilidade. Seus filamentos apresentam diâmetro entre 5 e  $10\mu\text{m}$  e são compostos por 80-95% de carbono, com os restantes 5-20% sendo constituídos por hidrogênio, nitrogênio ou oxigênio, que visam melhorar a interação fibra-matriz. Entre os precursores da fibra de carbono o mais utilizado é a fibra acrílica de poliacrilonitrila (PAN) [32]. Conforme Rahamann et al. [35] a produção da fibra de carbono a partir da PAN é mais econômica.

As fibras de aramida, também conhecidas como poliamidas aromáticas, são uma classe de fibras sintéticas poliméricas compostas por carbono, hidrogênio, oxigênio e nitrogênio, podendo apresentar diâmetros entre 10 e  $100\mu\text{m}$ . Esses materiais são caracterizados pela orientação das cadeias moleculares ao longo do eixo da fibra, o que proporciona uma maior força da ligação química. A fibra mais conhecida desta família é o Kevlar. Entre as suas principais vantagens destacam-se a baixa densidade, alta resistência à tração e grande capacidade de absorção de energia durante a falha, o que a torna ideal para proteção balística e contra impacto. Contudo, a sua rigidez é consideravelmente menor quando comparada com a fibra de carbono baseada em poliacrilonitrila [36].

### 2.1.3 Tipos de Laminados

A notação utilizada para descrever laminados tem sua origem na descrição empregada para especificar a sequência de empilhamento usando uma laminação manual [4]. No processo de laminação manual, o laminado é construído começando pela parte inferior do laminado, adicionando as lâminas subsequentes por cima. Portanto, as lâminas são numeradas começando na parte inferior e os ângulos são dados de baixo para cima. Por exemplo, um laminado formado por duas lâminas pode ser escrito como  $[30^\circ / -30^\circ]$ , um de três lâminas  $[45^\circ / -45^\circ / 0^\circ]$  e assim por diante.

Uma notação abreviada é usada para casos em que a sequência de laminação é simétrica. Um laminado simétrico, como  $[30^\circ / 0^\circ / 0^\circ / 30^\circ]$ , pode ser representado por apenas metade da sequência de empilhamento adicionando-se o subscrito (S). Dessa forma, o exemplo torna-se  $[30^\circ / 0^\circ]_s$ .

Se as espessuras das lâminas forem diferentes, elas são especificadas para cada uma individualmente, por exemplo  $[\theta_{t1} / -\theta_{t2}]$ . Caso as diferentes espessuras forem múltiplas umas das outras, a notação pode ser simplificada para  $[\theta / -\theta_2]$ , que indica que a espessura da lâmina de ângulo  $-\theta$  é duas vezes a espessura da lâmina  $\theta$ . Laminados com ângulos  $[\theta / -\theta]$  podem ser representados por  $[\pm\theta]$ . Esse tipo de laminado é chamado de *regular*.

### 2.1.4 Falha em materiais compósitos

A falha de um material qualquer pode ser definida quando este deixa de executar a função a qual foi destinado. Portanto, a falha de um material pode ser a fratura do elemento, um excesso de deflexão ou ainda quando o material perde sua estética original (quando este for um fator preponderante).

Neste trabalho, falha será entendido como danos ou fraturas do material decorrente de um excesso de carga aplicada ao mesmo. Uma variedade de modos de falha pode ocasionar danos ou fratura em um material compósito, incluindo:

- Quebra da fibra: ocorre principalmente em função de um excesso de tensão aplicada. Pode ter seu início bem antes do atingimento da resistência máxima a tração do material;
- Trinca na matriz: indica a presença de trincas microscópicas na matriz polimérica do material. Pode ser ocasionada por excesso de tensão aplicada, tensão residual excessiva após o processo de cura, tensões térmicas devido a diferenças de temperaturas, absorção de umidade e envelhecimento da matriz;
- Rachadura da matriz: é a situação em que as trincas sofrem um aumento da ordem de magnitude;

- Descolamento das fibras: ocorre quando há o descolamento entre fibras e a matriz polimérica; e
- Delaminação: quando ocorre a separação entre lâminas do laminado.

A incorporação de todos os modos de falha de material polimérico em seu projeto é uma tarefa difícil de ser realizada. Na prática, uma alternativa é usar modelos empíricos de falha das lâminas, similar aos que são utilizados em metais, porém modificados para materiais compósitos [4].

Existem basicamente três tipos de critérios de falha aplicáveis a materiais compósitos: (1) falha inicial ou Falha da Primeira Lâmina (FPL); (2) Falha Última do Laminado (FUL) e (3) falha interlaminar ou falha por delaminação. Estes três modos existem, pois, a ocorrência de falha em uma lâmina ou a delaminação entre as lâminas não implica necessariamente na falha de todo o laminado, podendo ser apenas o início de um processo progressivo e iterativo [5].

O modo FPL considera que o laminado falha juntamente quando a primeira lâmina falha. Já o modo FUL considera que o laminado falha somente após todas as lâminas terem falhado. No terceiro caso, o critério considera que a falha acontece quando ocorre a primeira delaminação entre lâminas, mesmo que o laminado continue intacto. É possível verificar, portanto, que o modo FPL é, em geral, muito conservativo, enquanto o modo FUL é o mais avançado, requerendo conhecimento mais preciso dos carregamentos e estado de tensões. Neste último caso, utilizam-se fatores de segurança maiores em relação ao modo FPL. Neste trabalho será utilizado o critério mais conservativo, ou seja, o FPL.

Da mesma forma que para se chegar ao comportamento mecânico do laminado é necessário saber o comportamento de cada lâmina, é necessária realizar a análise de falha de cada uma de suas lâminas. Existem vários critérios de falha para lâminas propostos na literatura, sendo que neste trabalho será utilizado o critério de falha de *Tsai-Wu* [37].

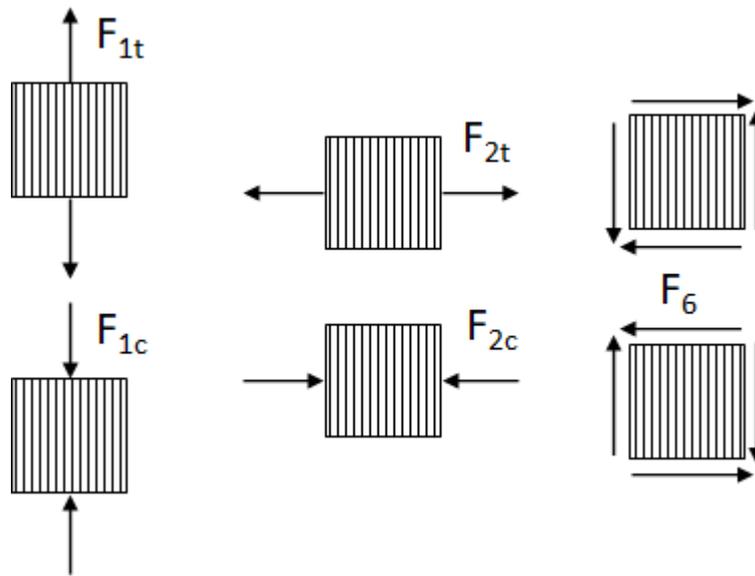
Critérios de falha de lâminas são equações contendo parâmetros ajustados a dados experimentais oriundos de testes de falhas (Fig. 4) em uma única lâmina de um material composto. Dessa forma, de acordo com o teste, os seguintes parâmetros são aplicáveis na análise da falha de um material:

- Resistência a tração na direção das fibras  $F_{1t}$ ;
- Resistência a compressão na direção das fibras  $F_{1c}$ ;
- Resistência a tração na direção transversal das fibras  $F_{2t}$ ;
- Resistência a compressão na direção transversal das fibras  $F_{2c}$ ; e

- Cisalhamento no plano do laminado  $F_6$ .

A falha é atingida quando a parcela à esquerda da Equação 2.1 é igual ou superior a 1, representando um ponto sobre ou fora da superfície de falha definida pelo critério no espaço de tensões.

Figura 4 – Tipos de cargas aplicadas na determinação dos critérios de falhas.



A teoria polinomial tensorial de *Tsai-Wu*, é expressa por:

$$f_1\sigma_{11} + f_2\sigma_{22} + f_6\tau_{12} + f_{11}\sigma_{11}^2 + f_{22}\sigma_{12}^2 + f_{66}\tau_{12}^2 + 2f_{12}\sigma_{11}\sigma_{21} + 2f_{16}\sigma_{11}\tau_{12} + 2f_{26}\sigma_{22}\tau_{12} = 1 \quad (2.1)$$

sendo  $f_i$  e  $f_{ij}$ , onde  $i, j = 1, 2, 6$ , são as componentes de resistência do tensor de *Tsai-Wu*.

Uma vez que a resistência da lâmina sob cisalhamento puro, segundo seus eixos principais, é independente do sinal de tensão de cisalhamento, os termos lineares de  $\tau_{12}$  tornam-se zeros, ou seja:

$$f_6 = f_{16} = f_{26} = 0 \quad (2.2)$$

Os demais termos do critério de *Tsai-Wu* são obtidos aplicando as condições

de carga elementares ao laminado [37], resultando em:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{F_{1t}} - \frac{1}{F_{1c}}, & f_{11} &= \frac{1}{F_{1t}F_{1c}}, \\ f_2 &= \frac{1}{F_{2t}} - \frac{1}{F_{2c}}, & f_{22} &= \frac{1}{F_{2t}F_{2c}}, \\ f_{66} &= \frac{1}{F_6^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Em muitos casos, o coeficiente de interação entre  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ,  $f_{12}$ , não é crítico e seu valor pode ser aproximado analiticamente. A seguinte equação é considerada uma boa aproximação [37]:

$$f_{12} = -\frac{1}{2}(f_{11}f_{22})^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

Aplicando as considerações e aproximações acima, a equação do critério de Tsai-Wu toma a forma reduzida abaixo:

$$f_1\sigma_{11} + f_2\sigma_{22} + f_{11}\sigma_{11}^2 + f_{22}\sigma_{22}^2 + f_{66}\tau_{12}^2 + 2f_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} = 1 \quad (2.5)$$

## 2.2 Mecânica das Placas de Compósitos Laminados

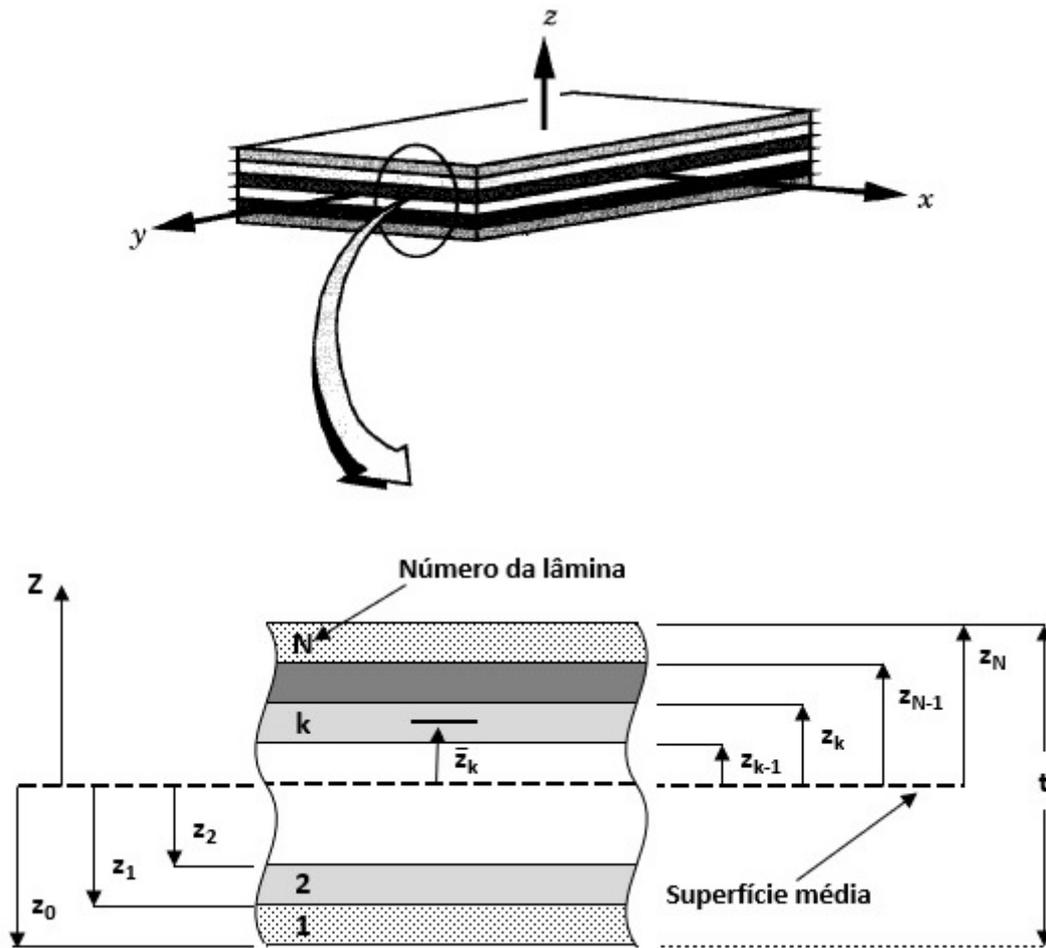
Para analisar o comportamento estrutural de materiais compósitos utilizam-se algumas teorias desenvolvidas especificamente para esse tipo de material. Entre as mais utilizadas encontram-se a Teoria Clássica dos Laminados (TLC) e a Teoria de Placa Laminada por Deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem (FSDT), do inglês *first-order shear deformation laminated plate theory*. Neste trabalho, as estruturas formadas serão analisadas utilizando a FSDT pelo método de elementos finitos (MEF). Dessa forma, o objetivo desse capítulo é detalhar a fundamentação teórica do método utilizado.

### 2.2.1 Considerações iniciais

Primeiramente é necessário estabelecer o sistema de coordenadas e o modo de numeração das lâminas que compõem a placa a ser estudada. Assim, considere uma placa com espessura total  $t$ , composta por  $N$  lâminas, tendo suas coordenadas principais  $(x_1^k, x_2^k, x_3^k)$  da  $k$ -ésima lâmina orientada em um ângulo  $\theta_k$  em relação ao sistema de coordenadas do laminado  $(x, y)$ . O plano  $(x, y)$  se localiza no plano médio não deformado  $\Omega_0$ , conforme mostrado na Fig. 5. O eixo  $z$  é tomado normal ao plano médio, direcionado para cima. A  $k$ -ésima lâmina está localizada entre os pontos  $z = z_k$  e  $z = z_{k-1}$ .

Existem dois sistemas de coordenadas que são empregados em materiais compósitos [4]. O primeiro sistema é aquele que relaciona os ângulos de orientação das fibras,

Figura 5 – Sistema de coordenadas e numeração das lâminas

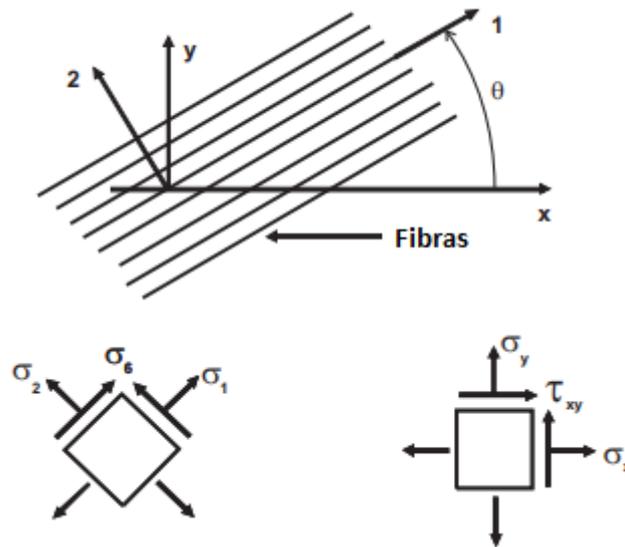


Fonte: Reddy/Bardero [38, 4] modificada pelo autor.

denominados pelos eixos 1, 2 e 3. O segundo sistema relaciona o ângulo de orientação do laminado, denominado por  $x$ ,  $y$  e  $z$ . O eixo 1 é aquele alinhado à direção da fibra. O eixo 2, localizado na superfície da lâmina, está orientado perpendicularmente ao eixo 1, enquanto o eixo 3 encontra-se perpendicular à superfície da lâmina e perpendicular aos eixos 1 e 2. Cada lâmina tem seu próprio sistema de coordenadas orientadas de acordo com a direção das fibras.

O sistema de coordenadas do laminado é comum a todas as lâminas e sua orientação é escolhida de acordo com a conveniência para realizar a análise estrutural. Assim, ela pode estar orientada pela maior dimensão, na direção da maior carga etc. A Fig. 6 apresenta os dois sistemas de coordenadas citados.

Figura 6 – Sistemas de coordenadas de um material compósito laminado.



Fonte:[36]

### 2.2.2 Deslocamentos e deformações

As propriedades mecânicas dos laminados são resultado das propriedades mecânicas das lâminas que o compõem. Assim, conhecendo o comportamento individual das lâminas é possível prever o comportamento do laminado [39].

Na TLC, assumem-se algumas hipóteses na sua formulação, as quais são chamadas de hipóteses de *Kirchhoff* [38]:

1. Linhas retas perpendiculares ao meio da superfície (ou seja, normais transversais) antes da deformação permanecem retas após a deformação.
2. As normais transversais não sofrem alongamento (ou seja, são inextensíveis).
3. As normais transversais giram de modo que permaneçam perpendiculares a superfície média após a deformação.

Na FSDT, a terceira hipótese é removida, ou seja, as normais transversais não permanecem perpendiculares à superfície média após a deformação. Essa alteração equivale a incluir deformações de cisalhamento transversais à TLC.

Algumas restrições e considerações são feitas no desenvolvimento das teorias, tanto na TLC quanto na FSDT. São elas [38]:

1. As lâminas são perfeitamente unidas entre si;
2. O material de cada camada é linearmente elástico;

3. As camadas possuem espessuras uniformes;
4. Os deslocamentos e as deformações são pequenos (casos em que haja grandes deslocamentos terão um método de resolução próprio); e
5. As tensões de cisalhamento transversais nas superfícies superior e inferior do laminado são nulas.

Assim, pelas hipóteses de *Kirschhoff* um ponto do material não deformado, ocupando a posição  $(x, y, z)$ , passa a ocupar a posição  $(x+u, y+v, z+w)$  após a deformação. Em que  $(u, v, w)$  são as componentes do vetor deslocamento  $\{u\}$ . Os deslocamentos são dados pelas equações [38]:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y, z) + z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (2.6)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y, z) + z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (2.7)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y). \quad (2.8)$$

em que  $(u_0, v_0, w_0)$  são os deslocamentos dos pontos localizados na superfície média do laminado, conforme apresentado na Fig. 5.

As deformações associadas aos deslocamentos de um corpo  $\epsilon$  em um determinado ponto, usando as relações de *Green-Lagrange*, são expressas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Considerando a hipótese de que os deslocamentos e as deformações são pequenos (linearidade geométrica) e as rotações  $\frac{\partial W_0}{\partial x}$  e  $\frac{\partial W_0}{\partial y}$  são moderadas, as deformações podem ser

escritas na forma abaixo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \\
\gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right), \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Os primeiros três termos das deformações acima podem ser reescritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \\
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix}. \tag{2.12}$$

onde  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$  e  $\gamma_{xy}^0$  são chamadas de deformações da superfície média e representam o alongamento e o cisalhamento da placa. Os termos multiplicados por  $z$  representam as curvaturas da placa devido à flexão ( $\kappa_{xx}$  e  $\kappa_{yy}$ ) e à torção ( $\kappa_{xy}$ ) e por isso são chamados de curvaturas [4].

### 2.2.3 Matrizes constitutivas do laminado

As matrizes constitutivas de um compósito laminado são formadas pela integração das matrizes constitutivas de cada uma das suas lâminas ao longo da espessura do laminado [5]. Dessa forma, inicialmente são definidas as matrizes constitutivas das lâminas, segundo as direções das fibras  $\theta$  em relação ao eixo  $x$  do laminado:

$$[Q]^k = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

$$[Q^*]^k = \begin{bmatrix} Q_{44}^{*k} & Q_{45}^{*k} \\ Q_{45}^{*k} & Q_{55}^{*k} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

A matriz  $[Q]$  é chamada de matriz de rigidez reduzida e a matriz  $[Q^*]$  de matriz de rigidez intralaminar. Os termos das matrizes são dados pelas equações abaixo:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{66} &= G_{12}, \\ Q_{44}^* &= G_{23}, \\ Q_{55}^* &= G_{13} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Na Equação 2.15, os termos  $E_1$  e  $E_2$  são os módulos de elasticidade do material segundo o sistema de eixos 1 e 2, conforme ilustrado pela Fig. 6.  $G_{12}$  representa o módulo de corte e  $\nu_{12}$  o coeficiente de Poisson 1-2, ou seja, a carga aplicada na direção 1 e o efeito de Poisson na direção perpendicular 2. O coeficiente  $\nu_{21}$  é dado pela equação 2.16:

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12} \quad (2.16)$$

#### 2.2.4 Relação tensão-deformação

A relação tensão-deformação para uma lâmina, segundo o sistema de eixos 1-2, é dado pelas Equações 2.17 [4]:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^k &= [Q]^k \{\varepsilon\}^k, \\ \{\tau\}^k &= [Q^*]^k \{\gamma\}^k. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Na Equações 2.17,  $\{\sigma\}$  e  $\{\tau\}$  são os vetores de tensão no plano e intralaminar, respectivamente. As componentes das deformações  $\{\varepsilon\}$  e  $\{\gamma\}$  referem-se as coordenadas da lâmina, ou seja, no sistema de eixos 1 – 2.

A análise estrutural é bastante simplificada ao utilizar os vetores de deformação e tensões nas coordenadas do laminado. Isso pode ser realizado por meio das expressões:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^k &= [\bar{Q}]^k \{\varepsilon\}^k, \\ \{\tau\}^k &= [\bar{Q}^*]^k \{\gamma\}^k, \end{aligned} \quad (2.18)$$

sendo que neste caso os vetores de tensão e deformação referem-se ao sistema de eixos  $x - y$  e são calculados conforme as equações 2.11 e 2.12. As matrizes de rigidez transformada  $[\bar{Q}]^k$  e  $[\bar{Q}^*]^k$  são calculadas por meio da expressão [4]:

$$\begin{aligned} [\bar{Q}^*]^k &= [T^{-1}][Q^k][T_e] \\ [\bar{Q}]^k &= [T^{-1}][Q^{*k}][T_e] \end{aligned} \quad (2.19)$$

sendo  $[T]$  dado por:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2nm \\ n^2 & m^2 & -2nm \\ -nm & nm & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \text{ com } m = \cos \theta \text{ e } n = \sin \theta \quad (2.20)$$

Ainda é necessário realizar uma multiplicação da matriz de transformação  $[T]$  pela matriz  $[R]$  e pela sua inversa. Essa multiplicação transforma as deformações em unidades de engenharia, conforme utilizado neste trabalho. A matriz  $[R]$  é obtida por:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Dessa forma, a matriz transformação, em unidades de engenharia  $[T_e]$ , fica:

$$[T_e] = [R][T][R^{-1}] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & nm \\ n^2 & m^2 & -nm \\ -2nm & 2nm & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Do exposto acima, as componentes das matrizes transformadas de rigidez podem ser escritas explicitamente como [38]:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta, \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta, \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{12} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ \bar{Q}_{44^*} &= Q_{44^*} \cos^2 \theta + Q_{55^*} \sin^2 \theta, \\ \bar{Q}_{55^*} &= Q_{44^*} \sin^2 \theta + Q_{55^*} \cos^2 \theta, \\ \bar{Q}_{45^*} &= (Q_{55^*} - Q_{44^*}) \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Substituindo as equações 2.11 e 2.12 nas equações 2.18 definem-se as tensões de uma lâmina  $k$  em função das deformações do plano médio e das curvaturas do laminado, como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k = [\bar{Q}]^k \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right), \quad (2.24)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^k = [\bar{Q}^*]^k \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (2.25)$$

As resultantes das tensões em um determinado ponto do material são obtidas pela integração das tensões ao longo da espessura do laminado. Uma vez que as tensões foram obtidas para cada laminado, conforme as equações 2.24 e 2.25, a integração sobre a espessura total torna-se um somatório de integrações sobre a espessura de cada lâmina, conforme definido pelas equações 2.26 e 2.28 abaixo [4]:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz, \quad (2.26)$$

$$\begin{Bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{Bmatrix} = \alpha \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_{(k)} dz = \alpha \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_{(k)} dz, \quad (2.27)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz. \quad (2.28)$$

Nas equações acima,  $z_k$  é a posição da face superior da lâmina  $k$  ao longo da espessura total  $t$  do laminado e  $n$  é a quantidade de lâminas existentes no laminado. O parâmetro  $\alpha$  é chamado de fator de correção de cisalhamento, e seu valor é considerado constante neste trabalho como  $\frac{5}{6}$  [40].

Desta forma, ao substituir as equações 2.10 nas equações 2.24 e 2.24 e, o

resultado, nas equações 2.26, 2.27 e 2.28, chega-se em:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{xy} \\ \kappa_{yy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{44} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

As componentes da matriz acima são dadas por [4]:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k t_k, \quad \text{onde } i, j = 1, 2, 6, \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k t_k \bar{z}_k, \quad \text{onde } i, j = 1, 2, 6, \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k \left( t_k \bar{z}_k^2 + \frac{t_k^3}{12} \right), \quad \text{onde } i, j = 1, 2, 6, \\ H_{ij} &= \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k \left[ t_k - \frac{4}{t^2} \left( t_k \bar{z}_k^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \right], \quad \text{onde } i, j = 4, 5. \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde  $\bar{z}_k$  é a distância do meio da k-ésima lâmina à superfície média do laminado (ver Fig. 5).

A matriz 6x6 da equação 2.29 é formada por três submatrizes,  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[D]$ , sendo chamadas de matrizes constitutivas de membrana, flexão e acoplamento membrana-flexão. Assim, a Equação 2.29 pode ser escrita nas formas compactas abaixo:

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{\kappa\}, \quad (2.31)$$

$$\{V\} = [H]\{\gamma\}, \quad (2.32)$$

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{\kappa\}. \quad (2.33)$$

### 2.3 Método de elementos finitos

Neste trabalho, as estruturas das placas de compósitos serão analisadas pelo método de elementos finitos (MEF). O MEF é uma técnica que pode ser explicada a partir de duas propriedades [41]:

1. O domínio do problema é entendido como uma coleção de subdomínios, chamados de *elementos finitos*. A palavra domínio denota o sistema físico em que as equações de governo serão solucionadas. A divisão do domínio em elementos é chamada de discretização. A coleção dos elementos é chamada de malha de elementos finitos do domínio.
2. Em cada elemento finito, a solução para as equações de governo é aproximada por uma combinação linear de parâmetros e funções, sendo estas muitas vezes polinomiais.

Como cada elemento possui uma solução representada por polinômios, uma aproximação contínua da solução global só pode ser obtida ao se impor a continuidade da solução dos elementos da malha. A este procedimento dá-se o nome de *montagem*.

Neste capítulo serão apresentados os procedimentos do método de elementos finitos aplicado para o problema de placas formadas por material compósito, apresentando-se o tipo de elemento finito utilizado e o modelo de placas e cascas aplicado ao problema de um material compósito laminado.

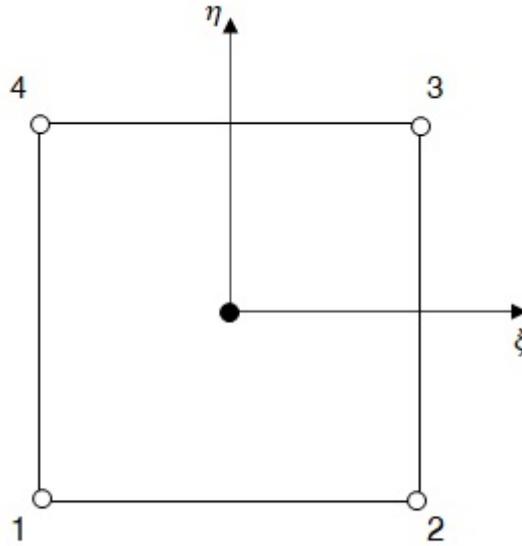
### 2.3.0.1 O elemento quadrilateral plano

A seguir, descreve-se o elemento quadrilateral, ilustrado na Fig. 7, empregado na discretização do domínio empregado neste trabalho. Sua formulação segue a Teoria Clássica dos Laminados e adota as seguintes considerações [37]:

1. As lâminas são quase-homogêneas e ortotrópicas;
2. A espessura do laminado é muito menor do que suas dimensões laterais e suas lâminas estão sob o estado plano de tensões;
3. Os deslocamentos são pequenos se comparados com a espessura do laminado (apenas para os casos lineares geometricamente);
4. Os deslocamentos são contínuos pelo laminado; e
5. Deslocamentos no plano variam linearmente pela espessura do laminado.

O elemento quadrilateral possui quatro nós, localizados em seus vértices. Cada nó possui cinco graus de liberdade (gdl), totalizando 20 gdl por elemento. Os gdl são formados por dois deslocamentos no plano (membrana) e pelos gdl de flexão, formados por um deslocamento perpendicular e duas rotações no plano.

Figura 7 – Elemento quadrilateral.



Fonte: [40]

Os quatro vértices do elemento possuem as coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ . As coordenadas naturais são interpoladas de acordo com as seguintes equações [38]:

$$x = \sum_{i=1}^4 \psi_i(\xi, \eta)x_i; \quad y = \sum_{j=1}^4 \psi_j(\xi, \eta)y_j \quad , \quad (2.34)$$

onde  $\psi_i(\xi, \eta)$  são as funções de interpolação de Lagrange, dadas por [40]:

$$\psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad , \quad (2.35)$$

$$\psi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad , \quad (2.36)$$

$$\psi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad , \quad (2.37)$$

$$\psi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad . \quad (2.38)$$

Os deslocamentos são interpolados por:

$$u = \sum_{i=1}^4 \psi_i(\xi, \eta)u_i; \quad v = \sum_{i=1}^4 \psi_i(\xi, \eta)v_i; \quad w = \sum_{i=1}^4 \psi_i(\xi, \eta)w_i; \quad (2.39)$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^4 \psi_i(\xi, \eta)\theta_{xi}; \quad \theta_y = \sum_{i=1}^4 \psi_i(\xi, \eta)\theta_{yi}.$$

onde,  $u, v, w, \theta_x$  e  $\theta_y$  são os deslocamentos de qualquer ponto pertencente ao elemento, e  $u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}$  e  $\theta_{yi}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , os deslocamentos nodais.

### 2.3.0.2 Deformação e deslocamento

Conforme a Equação 2.9, a relação deformação-deslocamento de um corpo é dada pela relação de *Green-Lagrange*, a qual será repetida aqui por conveniência:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{array} \right\}. \quad (2.40)$$

Pode-se então definir as deformações na seguinte forma [40]:

$$\varepsilon_m = B_m d^e \quad \varepsilon_f = z B_f d^e \quad \gamma^0 = B_c d^e \quad , \quad (2.41)$$

onde  $B_m$ ,  $B_f$  e  $B_c$  são as matrizes de deformação-deslocamento de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente. O termo  $d^e$  é o vetor deslocamento do elemento para os quatro vértices, expresso por:

$$d^{eT} = \left\{ u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1}, \dots, u_4 \quad v_4 \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \quad \dots \right\} \quad (2.42)$$

A relação deformação-deslocamento linear é definida por  $B_L = B_L^0 + B_L^1$ . Assim, as matrizes de deformação-deslocamento de membrana, flexão e cisalhamento são obtidas pela derivação das funções de interpolação. Para o elemento, a matriz de membrana é expressa por [40]:

$$B_m^0 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right\} \quad , \quad (2.43)$$

e a matriz de flexão é expressa por:

$$B_f^0 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (2.44)$$

e a matriz deformação-deslocamento de cisalhamento, por:

$$B_c^0 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} & 0 & \psi_i \end{Bmatrix}. \quad (2.45)$$

Em relação à parte não-linear das deformações de *Green-Lagrange*, a matriz de deformação-deslocamento é escrita na forma da expressão abaixo [42]:

$$B_L^1 = \begin{Bmatrix} l_{11} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & l_{21} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & l_{31} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ l_{12} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} & l_{22} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} & l_{32} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ (l_{11} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + l_{12} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}) & (l_{21} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + l_{22} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}) & (l_{31} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + l_{32} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}) & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.46)$$

onde:

$$l_{11} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial x} u_i; \quad l_{21} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial x} v_i; \quad l_{31} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial x} w_i;$$

$$l_{12} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial y} u_i; \quad l_{22} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial y} v_i; \quad l_{32} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial y} w_i.$$

### 2.3.0.3 Matrizes de rigidez

Nesta parte do trabalho, será detalhada a obtenção das matrizes de rigidez linear e não-linear para o elemento. Sua determinação é necessária para a resolução da equação abaixo:

$$[K_L + K_{NL}]\{\Delta U_i\} = \{F_{int}^{t+\delta t}\} - \{F_{ext(i-1)}^{t+\delta t}\}, \quad (2.47)$$

em que  $[K_L]$  é a matriz de rigidez linear,  $[K_{NL}]$  é a matriz de rigidez não-linear (casos em que haja grandes deslocamentos),  $\{\Delta U\}$  é o vetor de incremento dos deslocamentos,

$\{F_{int}\}$  é o vetor de forças nodais equivalente devido a forças internas no instante  $t + \delta t$  e  $\{F_{ext}\}$  o vetor de forças externas.

A matriz de rigidez linear é obtida pela sobreposição das matrizes de membrana  $[K_{mm}]$ , de flexão  $[K_{ff}]$ , de acoplamento membrana-flexão  $[K_{mf}]$  e  $[K_{fm}]$ , e de cisalhamento  $[K_{cc}]$  [5], ou seja:

$$[K^{(e)}] = [K_{mm}^{(e)}] + [K_{mf}^{(e)}] + [K_{fm}^{(e)}] + [K_{ff}^{(e)}] + [K_{cc}^{(e)}] \quad . \quad (2.48)$$

As componentes da matriz de rigidez do elemento são expressas por [40]:

$$[K_{mm}^{(e)}] = \int_{\Omega_e} [B_m^0 + B_L^1]^T [D_m] [B_m^0 + B_L^1] dV \quad , \quad (2.49)$$

$$[K_{mf}^{(e)}] = \int_{\Omega_e} [B_m^0 + B_L^1]^T [D_{mb}] [B_f^0] dV \quad , \quad (2.50)$$

$$[K_{fm}^{(e)}] = \int_{\Omega_e} [B_f^0]^T [D_{mb}] [B_m^0 + B_L^1] dV \quad , \quad (2.51)$$

$$[K_{ff}^{(e)}] = \int_{\Omega_e} [B_f^0]^T [D_b] [B_f^0] dV \quad , \quad (2.52)$$

$$[K_{cc}^{(e)}] = \int_{\Omega_e} [B_c^0]^T [D_s] [B_c^0] dV \quad , \quad (2.53)$$

A matriz de rigidez não-linear é obtida pela equação abaixo [42]:

$$[K_{NL}^e] = \int_{\Omega_e} [B_{NL}^{(e)}]^T [S] [B_{NL}^{(e)}] dV \quad , \quad (2.54)$$

em que  $[B_{NL}]$  é a matriz de transformação da relação deformação-deslocamento não linear e  $[S]$  é a matriz contendo os segundos componentes de tensão de Piola-Kirschhoff, expressos pelas seguintes equações [42]:

$$B_{NL}^{(e)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \end{array} \right\} \quad , \quad (2.55)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} N^* & 0 & 0 \\ 0 & N^* & 0 \\ 0 & 0 & N^* \end{bmatrix}, \quad [N^*] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

#### 2.3.0.4 Forças

O vetor Forças Internas  $\{F_{int}\}$  é formado pelas forças internas de membrana, flexão e de cisalhamento:

$$\{F_{int}\} = \{F_{int}^m\} + \{F_{int}^f\} + \{F_{int}^c\} \quad (2.57)$$

As forças internas de membrana são calculadas de acordo com a seguinte expressão:

$$\{F_{int}^m\} = \int_{\Omega_e} [B_L]^T \{N\} dV, \quad (2.58)$$

sendo  $\{N\}$  o vetor associado às componentes de tensão no plano. Estes, por sua vez, são calculados de acordo com a equação 2.31. As forças de flexão:

$$\{F_{int}^f\} = \int_{\Omega_e} [B_f^0]^T \{M\} dV, \quad (2.59)$$

sendo  $\{M\}$  o vetor de momento, calculados de acordo com a equação 2.33. Por fim, as forças internas associadas ao cisalhamento, calculadas por:

$$\{F_{int}^c\} = \int_{\Omega_e} [B_c^0]^T \{V\} dV, \quad (2.60)$$

sendo  $\{v\}$  o vetor de momento.

#### 2.3.0.5 Integração numérica

A resolução das integrais, conforme apresentado nas equações acima, utiliza métodos numéricos de integração, chamados de *quadraturas*. Neste trabalho, é empregado o método de quadratura de *Gauss-Legendre*, sendo este um método amplamente utilizado, tendo em vista sua boa precisão e seu baixo consumo computacional [41], quando comparados com outros métodos. Este método será brevemente detalhado a seguir. Considerando a expressão abaixo:

$$\int_a^b G(x) dx, \quad (2.61)$$

em que  $G(x)$  é uma função definida em  $a \leq x \leq b$ . O cálculo dessa integral determina a área sob a curva definida por  $G(x)$ , podendo ser aproximada pelo somatório abaixo:

$$\int_a^b G(x) dx = w_1 G(x_1) + w_2 G(x_2) + \dots + w_N G(x_N) = \sum_{i=1}^N w_i G(x_i), \quad (2.62)$$

onde  $w_i (i = 1, 2, \dots, N)$ , é chamado de *pesos* e  $x_i$  de pontos de integração.

A forma de aproximação acima é válida para todos os métodos numéricos de integração. Para o método de *Gauss*, os pontos de integração e os pesos são escolhidos de tal forma que o somatório de aproximação resulta no mesmo valor da integral quando  $G(x)$  é um polinômio de grau  $p = (2N - 1)$  ou menor. Assim, a quadratura de *Gauss* é definida por:

$$\int_a^b G(x) dx = \int_{-1}^1 \hat{G}(r) dr = w_1 \hat{G}(r_1) + w_2 \hat{G}(r_2) + \dots + w_N \hat{G}(r_N) = \sum_{i=1}^N w_i \hat{G}(r_i) \quad , \quad (2.63)$$

sendo  $\hat{G}(r)$  definido abaixo:

$$\hat{G}(r) = G(x(r))J(r) \quad , \quad (2.64)$$

em que  $J$  é o operador Jacobiano, conforme será definido pela Equação 2.67 adiante. Na quadratura de *Gauss*,  $N$  recebe o nome de pontos de *Gauss*. A transformações de coordenadas entre  $x$  e  $r$  é realizada de tal forma que o intervalo  $(a, b)$  corresponda ao intervalo  $(-1, 1)$ . Assim,  $r$  é chamado de coordenadas naturais, sendo definida localmente para o elemento.

De forma a integrar uma função polinomial de grau  $p$ , o número de pontos de *Gauss* deve ser igual ao menor número inteiro maior que  $(p + 1)/2$ . Para ilustrar a aplicação da metodologia em duas dimensões, considere-se a expressão abaixo:

$$K_{ij}^e = \int_{\omega_e} [a(x, y) \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + b(x, y) \left( \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \right) + c(x, y) \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} + d(x, y) \psi_i^e \psi_j^e] dx dy \quad . \quad (2.65)$$

Para a utilização da quadratura de *Gauss*, primeiramente deve-se transformar a integral do domínio  $\omega_e$  para o domínio  $\hat{\omega}$ , ou seja, das coordenadas globais  $(x, y)$  para as coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ . Essa transformação é realizada por meio da Equação 2.66. As derivadas parciais  $\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \psi_i^e}{\partial y}$  são transformadas em  $\frac{\partial \psi_i^e}{\partial \xi}$  e  $\frac{\partial \psi_i^e}{\partial \eta}$  utilizando a regra da cadeia, obtendo a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.66)$$

A equação acima relaciona as derivadas das coordenadas naturais e globais. A

matriz dos coeficientes da equação acima é chamada de matriz Jacobiana:

$$[J]^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^e, \quad (2.67)$$

sendo sua determinante chamada apenas de Jacobiano, sendo calculado por:

$$|J| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \quad . \quad (2.68)$$

As derivadas naturais em relação às coordenadas globais são expressas por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

podendo ser escrita na forma alternativa:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} \equiv [J^*] \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

onde os termos da matriz  $[J^*]$  são:

$$J_{11}^* = \frac{J_{22}}{|J|}, \quad J_{12}^* = -\frac{J_{12}}{|J|}, \quad J_{21}^* = \frac{J_{11}}{|J|}, \quad J_{22}^* = -\frac{J_{21}}{|J|}. \quad (2.71)$$

Assim, realizando as operações necessários à equação 2.65 em termos das coordenadas naturais, tem-se que:

$$\begin{aligned} K_{ij}^e = \int_{\hat{\Omega}} \left\{ a(\xi, \eta) \left( J_{11}^* \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \eta} \right) \left( J_{11}^* \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \eta} \right) \right. \\ + b(\xi, \eta) \left[ \left( J_{11}^* \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \eta} \right) \left( J_{21}^* \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \eta} \right) \right. \\ + \left. \left( J_{21}^* \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \eta} \right) \left( J_{11}^* \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \eta} \right) \right] \\ + c(\xi, \eta) \left( J_{21}^* \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \eta} \right) \left( J_{21}^* \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \eta} \right) \\ \left. + d(\xi, \eta) \psi_i^e \psi_j^e \right\} |J| d\xi d\eta \equiv \int_{\hat{\Omega}} F_{ij}^e(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \quad . \end{aligned} \quad (2.72)$$

Assim, aplicando o método de quadratura na resolução da integral acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}} F_{ij}^e(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 F_{ij}^e(\xi, \eta) d\eta \right] d\xi \approx \int_{-1}^1 \left[ \sum_{J=1}^N F_{ij}^e(\xi, \eta_J) W_J \right] d\xi \\ &\approx \sum_{I=1}^M \sum_{J=1}^N F_{ij}^e(\xi_I, \eta_J) W_I W_J \quad , \end{aligned} \quad (2.73)$$

em que  $M$  e  $N$  denotam o número de pontos de *Gauss*,  $(\xi_I, \eta_J)$  as coordenadas dos pontos de integração e  $W_I$  e  $W_J$  os pesos. As coordenadas e respectivos pesos podem ser consultados em diversas referências, tal como em Reddy [38].

### 2.3.0.6 Formulação para análise de grandes deslocamentos

Na análise linear de estruturas, os deslocamentos e as rotações foram considerados pequenos (4ª consideração no desenvolvimento da FSDT), o que permitiu considerar o material como linearmente elástico, ou seja, a deformação desaparece ao cessar o carregamento. Em casos em que haja grandes deslocamentos e/ou grandes rotações esse não é o caso. Assim, nesses casos (não-linearidade geométrica), o carregamento deve ser aplicado incrementalmente e a geometria da estrutura deve ser atualizada e levada em consideração antes da nova carga ser aplicada [41].

Existem duas formas tradicionais para a resolução de problemas incrementais: (1) Formulação Langragiana Total e (2) Formulação Langragiana Atualizada. Em ambas as formulações a geometria da estrutura é atualizada a partir de uma geometria anterior conhecida, diferenciando-se pelo modo em que a estrutura (geometria) anterior é determinada. Neste trabalho será utilizada a Formulação Langragiana Total, em que a geometria anterior se refere a uma configuração fixa, onde as alterações da geometria são sempre referenciadas e esse referencial fixo [38].

A matriz de rigidez do elemento, obtida pela Equação 2.48, é não-linear e não-simétrica, o que torna as equações de governo do problema não lineares e assimétricas. A equação de governo típica para problemas estruturais não-lineares, em ambas as formulações, tem a forma geral [41]:

$$[K_L + K_{NL}](\{\Delta\})\{\Delta\} = \{R\} - \{F\} \quad , \quad (2.74)$$

onde  $[K_L]$  e  $[K_{NL}]$  são as matrizes de rigidez linear e não-linear respectivamente,  $\{R\}$  é o vetor de forças residuais, e  $\{F\}$  o vetor de forças externas. Na Formulação Langragiana Total, as equações abaixo são aplicáveis:

$$\begin{aligned} [K_L] &= \int_{\Omega^e} = [B_L]^T [C] [B_L] dv \quad , \\ [K_{NL}] &= \int_{\Omega^e} = [B_{NL}]^T [S] [B_{NL}] dv \quad , \\ [F] &= \int_{\Omega^e} = [B_L]^T S dv \quad , \end{aligned} \quad (2.75)$$

em que  $[B_L]$  é a matriz de transformação deformação-deslocamento linear,  $[B_{NL}]$  a matriz de transformação deformação-deslocamento não-linear,  $[C]$  a matriz constitutiva elástica do elemento,  $[S]$  a matriz contento os segundos componentes de tensão de Piola-Kirschhoff, e  $\{S\}$  o vetor dessas tensões.

### 2.3.0.7 Método de solução iterativo

A solução da Equação 2.74 não pode ser encontrada diretamente, uma vez que as matrizes de rigidez ( $[K]$ ) dependem de uma solução desconhecida ( $\{\Delta\}$ ). Portanto, um método iterativo que busque uma solução aproximada por meio da linearização das equações deve ser utilizado. Neste trabalho será utilizado o método de Raphson-Newton, o qual será detalhado a seguir.

O método de Raphson-Newton é um método de solução iterativo baseado na expansão de equações algébricas em séries de Taylor em relação a uma solução conhecida  $\{\Delta^\tau\}$  [41]. Assim, primeiramente a equação 2.74 é reescrita como:

$$\{R\} \equiv [K]\{\Delta\} - \{F\} \quad , \quad (2.76)$$

onde  $\{R\}$  é chamado de residual. Assim, expandindo  $\{R\}$  em relação a  $\{\Delta^\tau\}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \{0\} = \{R\} = \{R\}^\tau + \left[ \frac{\partial\{R\}}{\partial\{\Delta\}} \right]^\tau (\{\Delta\}^{\tau+1} - \{\Delta\}^\tau) \\ + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2\{R\}}{\partial\{\Delta\}^2} \right] (\{\Delta\}^{\tau+1} - \{\Delta\}^\tau)^2 + \dots \quad , \end{aligned} \quad (2.77)$$

da mesma forma:

$$0 \approx \{R\}^\tau + [K^T]^\tau \{\delta\Delta\} + 0(\{\delta\Delta\})^2 \quad , \quad (2.78)$$

sendo

$$\{\delta\Delta\} = \{\Delta\}^{\tau+1} - \{\Delta\}^\tau \quad , \quad (2.79)$$

e  $[K^T]$ , chamada de matriz de rigidez tangencial ou de matriz de rigidez geométrica, definida por:

$$[K^T]^\tau \equiv \left[ \frac{\partial\{R\}}{\partial\{\Delta\}^\tau} \right] \quad . \quad (2.80)$$

Assim, substituindo as equações 2.79 e 2.80 na equação 2.77, chega-se em:

$$\begin{aligned} \{\delta\Delta\} &= -[K^T]^{-1}\{R\}^\tau \\ &= [K^T(\{\Delta\}^\tau)]^{-1}(\{F\} - [K(\{\Delta\}^\tau)]\{\Delta\}^\tau) \quad , \end{aligned} \quad (2.81)$$

e assim a solução final, em  $(\tau + 1)$ -ésima iteração, é dada por:

$$\{\Delta\}^{\tau+1} = \{\Delta\}^\tau + \{\delta\Delta\} \quad . \quad (2.82)$$

A resolução da Equação 2.81 é realizada iterativamente até que um critério de convergência seja atingido. Neste trabalho, o critério de convergência adotado é dado pela expressão:

$$\frac{\|\{R\}\|}{\|\{F\}\|} \leq \varepsilon \quad , \quad (2.83)$$

sendo  $\varepsilon$  um valor de tolerância pré-determinado.

## 2.4 Otimização

A otimização é um campo de estudo e uma prática que visa selecionar a melhor solução possível dentro de um conjunto amplo de soluções, tendo restrições e objetivos predefinidos. Seu objetivo fundamental é maximizar benefícios ou minimizar custos, esforços ou recursos empregados em determinada situação. A otimização abrange uma ampla gama de aplicações em diversos setores, como engenharia, ciência, economia, logística e finanças. Não há um método único disponível que permita solucionar de forma eficiente todos os problemas de otimização. Como resultado, são utilizadas técnicas e algoritmos específicos, que buscam explorar e analisar o espaço de soluções possíveis de forma eficiente. Essas técnicas incluem métodos analíticos, heurísticas, algoritmos evolutivos e algoritmos baseados em inteligência artificial. O estudo da otimização desempenha um papel crucial na tomada de decisões estratégicas e na melhoria contínua de processos e sistemas, contribuindo para o avanço e a eficiência em diversos domínios.

Métodos tradicionais de otimização, também conhecidos como técnicas de programação matemática, têm desempenhado um papel fundamental na resolução de problemas complexos ao longo dos anos. Segundo [43], a programação linear é um dos métodos mais amplamente utilizados, permitindo a maximização ou minimização de uma função linear sujeita a restrições lineares. Outra técnica bastante difundida é a programação dinâmica, em que o problema é dividido em subproblemas menores e que são então resolvidos de forma recursiva, obtendo-se uma solução globalmente ótima [44]. Os métodos baseados em gradiente são utilizados principalmente na resolução de problemas que se apresentam como funções contínuas e, por isso, têm limitações no caso de estruturas fabricadas em materiais compósitos [36]. A existência de inúmeros ótimos locais, no caso de compósitos, é outro fator limitante do uso de métodos de otimização baseados em gradientes. Esses métodos tradicionais têm sido amplamente utilizados e provaram sua eficácia em várias áreas de aplicação [45]. No entanto, é importante mencionar que, com os avanços nas técnicas de otimização, como algoritmos evolutivos e algoritmos baseados em inteligência artificial, a gama de possibilidades e a eficiência da otimização têm sido ampliadas [46]. Dentre essas técnicas, destacam-se os Algoritmos Genéticos, o Recozimento

Simulado, a Otimização de Enxame de Partículas, a Otimização de Colônia de Formigas, a otimização baseada em Rede Neural e a Otimização Difusa (*Fuzzy*).

### 2.4.1 Conceito matemático de otimização

Genericamente, uma otimização ou um problema de programação matemática, pode ser definido como:

$$\text{Encontrar } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ que minimiza } f(\mathbf{X}) \quad , \quad (2.84)$$

sujeita as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{X}) &\leq 0, & \text{para } j = 1, 2, \dots, m & \quad , \\ l_j(\mathbf{X}) &= 0, & \text{para } j = 1, 2, \dots, p & \quad , \end{aligned} \quad (2.85)$$

onde  $\mathbf{X}$  é um vetor  $n$ -dimensional e representa as variáveis de otimização,  $f(\mathbf{X})$  é denominada função objetivo e  $g_j(\mathbf{X})$  e  $l_j(\mathbf{X})$  são conhecidas como restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente. O número de variáveis  $n$  e o número de restrições  $m$  e/ou  $p$  não precisam estar relacionados necessariamente.

No contexto dos materiais compósitos, a otimização envolve a seleção e ajuste de variáveis que um projetista tem a capacidade de modificar. Essas variáveis podem abranger uma ampla gama de aspectos, como o material utilizado nos componentes da estrutura, sua quantidade, a geometria e disposição no espaço, os parâmetros das fibras, entre outros. Ao adequar essas variáveis de maneira apropriada, é possível obter uma estrutura otimizada de acordo com os critérios definidos pelo projetista.

Em um processo de otimização é comum haver múltiplas soluções aceitáveis. O objetivo é selecionar a melhor opção dentre as diversas alternativas viáveis. Para isso, é necessário estabelecer um critério capaz de comparar e selecionar entre as diferentes soluções consideradas aceitáveis. Esse critério, expresso em termos das variáveis de projeto, é conhecido como função objetivo ou simplesmente objetivo.

Em alguns casos, pode haver a necessidade de atingir dois ou mais objetivos simultaneamente. Esses problemas, que envolvem mais de uma função objetivo, são denominados problemas de programação multiobjetivos ou problemas de otimização multiobjetivos. Quando os objetivos são conflitantes, ou seja, a melhoria de um tende a prejudicar o outro, surgem várias soluções ótimas para o problema. Esse estado é conhecido como o Ótimo de Pareto.

## 2.4.2 Algoritmos Genéticos

Muitos problemas de otimização de ordem prática apresentam características mistas de variáveis contínuas e discretas, bem como espaços de busca descontínuos e não convexos. Se técnicas de otimização convencionais fossem empregadas para esses tipos de problemas, elas seriam ineficazes e computacionalmente custosas, resultando, na maioria das vezes, em um ótimo local próximo ao ponto de partida. Por outro lado, Algoritmos Genéticos (AG) têm se mostrado uma abordagem apropriada para resolver tais problemas, e em grande parte dos casos, demonstram ter a capacidade de encontrar uma solução global ótima com alta probabilidade [47].

AG são algoritmos computacionais, inspirados nas leis de seleção natural, que utilizam uma população de indivíduos como representação de possíveis soluções para um problema. A ideia principal de um AG é implementar uma competição entre soluções baseada no conceito de sobrevivência do mais apto [48], em que os indivíduos são submetidos a sucessivas gerações. Dessa forma, as características mais adaptadas tendem a se concentrar ao longo do tempo. Isso ocorre devido à “seleção natural”, em que os indivíduos mais aptos são mais propensos a “sobreviver” e a se “reproduzir”, transmitindo suas características vantajosas para a próxima geração, enquanto aqueles menos aptos são eliminados. Desta forma, um AG evolui soluções aplicando procedimentos matemáticos que replicam os processos evolutivos da natureza. Ao final, o AG fornece a melhor solução encontrada para o problema em questão. Os AG foram originalmente formulados por John Holland [49] na Universidade de Michigan na década de 1970. Esses sistemas artificiais têm sido aplicados em diversas disciplinas, com ênfase no projeto, otimização e aprendizado de máquina [50].

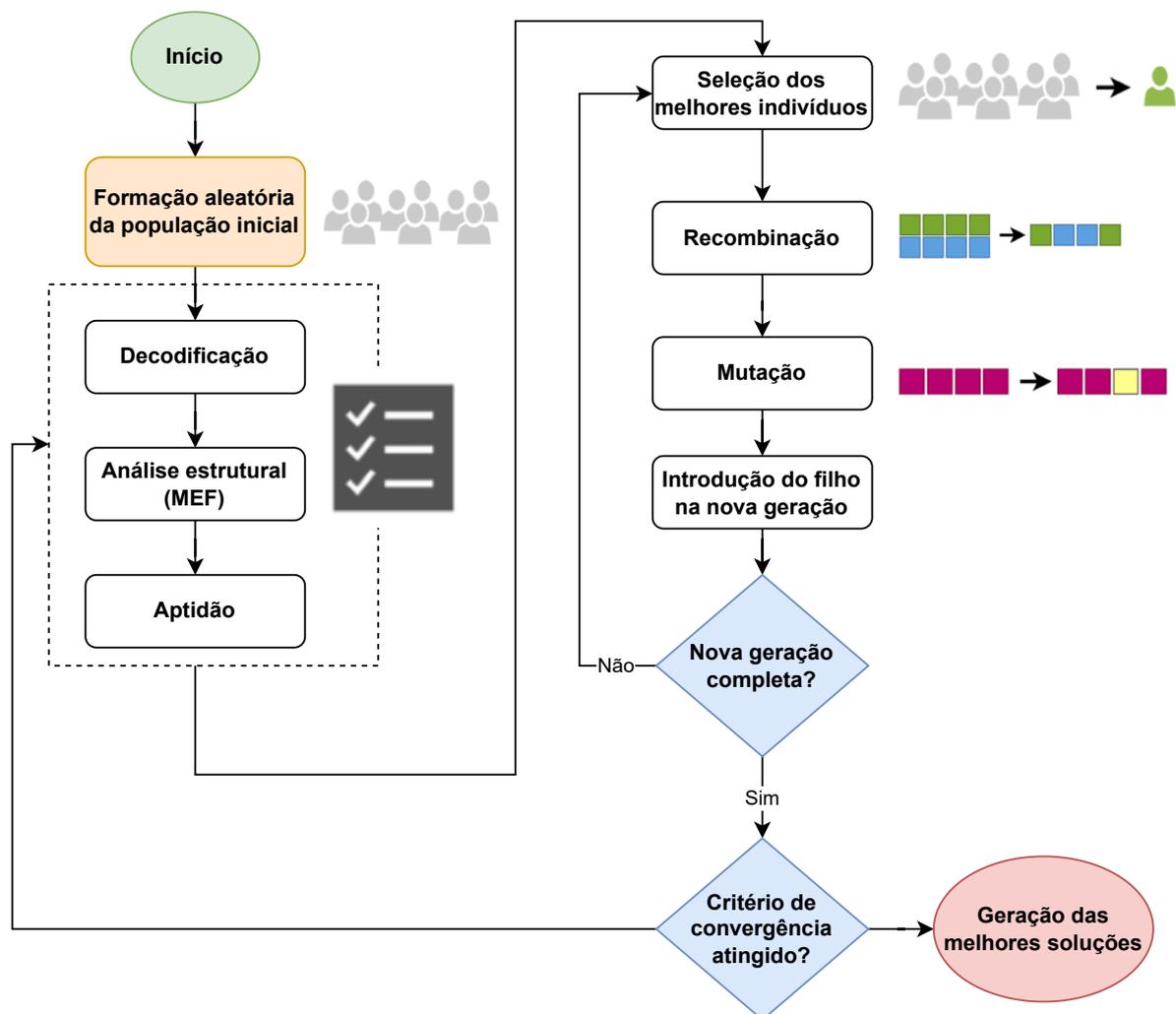
Os elementos fundamentais da evolução e da sobrevivência - reprodução, cruzamento e mutação - são realizados por operadores genéticos especialmente projetados para gerar novos indivíduos como uma combinação de características mais adaptadas para resolver o problema em questão. Esse ciclo é repetido continuamente até que um critério de aceitação seja alcançado.

### 2.4.2.1 Evolução genética

A resolução de um problema de otimização por meio de AG começa com a formação aleatória de uma população de soluções para o problema. O tamanho da população inicial nos AG é geralmente fixo. Cada solução é então avaliada para encontrar seu valor de aptidão. A aptidão, no contexto dos AG, é a função objetivo de um problema de otimização. As melhores soluções (mais aptas) serão selecionadas para formar uma nova geração. Para isso, a população é submetida a três operadores - seleção, cruzamento e mutação - para então produzir uma nova população de soluções. Cada indivíduo da nova

população é então avaliada para encontrar seu valor de aptidão, e um teste de convergência na população é realizado. Se o critério de convergência for satisfeito, considera-se que a nova população contém indivíduos ótimos, ou seja, o problema está otimizado. Caso o critério de convergência não seja atingido, a população é iterativamente alterada pelos três operadores e a nova população resultante é avaliada para os valores de aptidão. O procedimento é repetido por várias gerações até que o critério de convergência seja satisfeito e o processo seja encerrado. Um ciclo de reprodução, cruzamento e mutação e a avaliação dos valores de aptidão é conhecido como uma geração em AG. Os detalhes das operações de um AG são descritos abaixo. A estrutura básica de um algoritmo genético e suas operações estão representadas na Fig. 8.

Figura 8 – Estrutura clássica de um algoritmo genético.

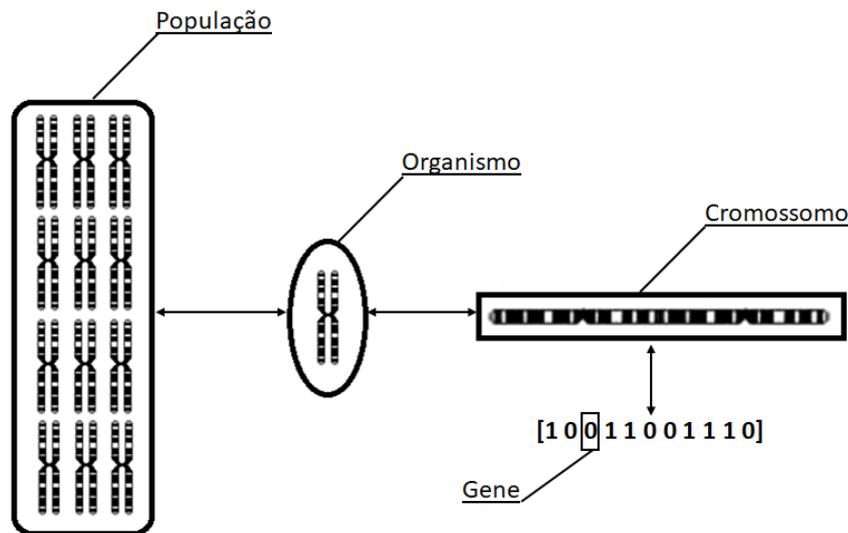


Fonte: Autor

**Indivíduo:** em um AG, um indivíduo é composto por um determinado número de “cromossomos” que, por sua vez, consistem em um ou mais “genes”. Esses genes são responsáveis

por armazenar e transmitir as características aos descendentes. Cada gene de um cromossomo representa uma variável a ser otimizada e é codificado de acordo com regras pré-estabelecidas. Tipicamente, números binários são utilizados, mas outros conjuntos de símbolos ou regras podem ser empregados. A complexidade de um "organismo" pode ser controlada pelo número de cromossomos, número de genes e regras de codificação. Uma representação esquemática de um AG típico é apresentada na Fig. 9.

Figura 9 – Representação esquemática da estrutura básica de AG.



Fonte: Autor.

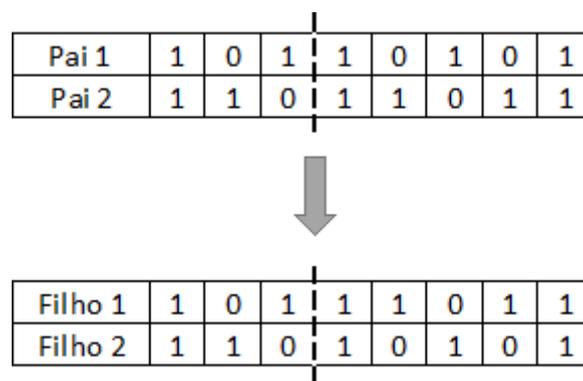
**Codificação:** é o processo de transformação das variáveis do problema na forma de *strings* (conjunto de dados concatenados) que formarão os genes ou os cromossomos. A codificação é realizada por meio de regras de codificação e possui um importante papel no desempenho computacional dos AGs, uma vez que o modo como são codificados influenciará os demais operadores genéticos e a eficiência do algoritmo [51]. Existem várias de regras de codificação e sua utilização depende basicamente do problema a ser resolvido. Algumas regras bastante utilizadas são os alfabetos binários, octogonal, hexadecimal, a codificação por permutação, a codificação por valores representativos e a codificação em árvore [52].

**Seleção:** após o estabelecimento da primeira geração, os organismos são avaliados quanto a sua aptidão, mensurada por meio de uma função objetivo que reflete o alvo da otimização. Essa função equivale a uma medida da aptidão de um organismo vivo de sobreviver e se reproduzir no ambiente natural. Terminada a avaliação dos organismos, aos mais aptos será dada a oportunidade de se "reproduzir". A seleção dos pais é realizada por um mecanismo probabilístico, onde os mais aptos têm mais chance de serem escolhidos. Um parâmetro importante no método de seleção é a pressão de seleção. Ele é definido como o grau em que os organismos mais bem avaliados serão favorecidos. Quanto maior a pressão de seleção,

maior será a taxa de convergência do AG. No entanto, se a pressão de seleção for muito alta, as chances de convergência prematura a um ótimo local aumentam [52]. Além de determinar a pressão de seleção, o método de seleção também deve garantir a diversidade nas populações, de modo a evitar convergências prematuras. Os métodos de seleção mais utilizados são a roleta russa, o ranqueamento, o torneio, o método de Boltzmann e a amostragem universal estocástica [51].

**Recombinação:** a recombinação ou reprodução é realizada por meio de um operador genético de recombinação, também conhecido como *crossover*. O objetivo da recombinação é selecionar boas características do par de pais para criar filhos supostamente mais bem adaptados (melhores soluções para o problema) ao ambiente que seus predecessores. Da mesma forma que a seleção, a recombinação pode ser executada de várias formas. Nos AG típicos, a técnica de recombinação mais utilizada é a chamada recombinação em um ponto. Nela, um ponto aleatório na *string* de um cromossomo é escolhido. Os dados que estão além do ponto selecionado serão trocados entre o par de pais. Os organismos resultantes são os filhos. A Fig. 10 apresenta um exemplo de recombinação em um ponto. Outras técnicas bastante conhecidas são a recombinação em dois pontos, o "corte e emenda", a recombinação uniforme e parcialmente uniforme e a dos cromossomos ordenados. Conforme demonstrado por [53], a técnica mais eficiente depende da aplicação a que se deseja otimizar. Uma limitação do operador genético de recombinação é que os filhos produzidos por ele não apresentam características diferentes das dos pais. Assim, para suprir essa deficiência e promover uma diversidade genética, os genes dos filhos são submetidos ao operador genético de mutação.

Figura 10 – Recombinação em um ponto.



**Mutação:** após a recombinação, a nova geração é submetida ao operador de mutação. Na mutação ocorre uma alteração dos genes por meio de uma substituição de um valor por outro. Seus objetivos principais são a de prevenir que o algoritmo fique preso em um mínimo local e o de manter a diversidade genética. A mutação é responsável, dessa forma, por recuperar a perda de material genético, bem como a de distribuir o material genético aleatoriamente pelos genes [52]. Existem várias formas de realizar a operação de

mutação, sendo que a escolha do método está intimamente ligada às regras de codificação. A operação de mutação não acontece sempre, mas sim de acordo com uma probabilidade de ocorrência, que pode ser maior ou menor, conforme o problema. Assim, a mutação deve ocorrer para permitir a diversidade genética da população, porém sua probabilidade de ocorrer não deve ser demasiadamente alta, sob o risco de se mudar o padrão de busca do algoritmo.

**Critério de parada:** o critério de parada em um AG pode ser realizado de várias formas e define quando o algoritmo irá parar de realizar as evoluções genéticas e terá, como resultado da busca, a solução contida nos genes da geração atual. Um critério muito comum é aquele em que a parada se dá por não haver mais melhorias após uma determinada quantidade de gerações. Outro critério muito utilizado é o de se utilizar um limite superior do número de funções avaliadas pelo GA. Esse método é preferido quando o AG está conduzindo um número independente de buscas [50].

### 2.4.3 Algoritmos genéticos multiobjetivos

Conforme já apresentado, em problemas práticos na área da otimização, frequentemente surgem problemas que envolvem a obtenção de vários objetivos simultaneamente. Tais objetivos muitas vezes apresentam tendências conflitantes, levando ao surgimento de múltiplas soluções ótimas, ao contrário dos problemas de otimização de objetivo único [54]. Assim, problemas desta natureza implicam procedimentos matemáticos que envolvem a minimização/maximização de um ou mais objetivos simultaneamente sujeitos a um conjunto de restrições [55]. Os projetos relacionados ao desenvolvimento de novas composições de materiais compósitos enquadram-se na área de otimização multiobjetivo.

Como exemplo de tais problemas onde os objetivos são conflitantes, ou seja, onde o aprimoramento de um objetivo tende a prejudicar o outro, pode-se considerar o cenário em que o objetivo seja a minimização do peso total do material e a obtenção de melhor resistência à tração, sem violar os critérios de falha do material.

Neste contexto, algoritmos genéticos multiobjetivos (AGMOs) surgiram como alternativas promissoras em relação aos métodos tradicionais de otimização. Os AGMO são uma versão modificada de um AG típico. Sua maior diferença é o modo como a aptidão é avaliada. Os AGMOs atribuem uma classificação aos Ótimos de Pareto a cada solução do problema, baseados em sua relação de dominância. As soluções mais bem ranqueadas recebem maior preferência de reprodução nos estágios posteriores do algoritmo [56]. O Ótimo de Pareto é um estado em que os indivíduos estão alocados da forma mais eficiente possível. Neste estado, não é possível melhorar um objetivo sem piorar o outro [57, 58]. Os AGMOs podem ser classificados em duas grandes categorias: baseados em Pareto e baseados em decomposição dos multiobjetivos [59].

### 2.4.3.1 Algoritmos genéticos multiobjetivos baseados em Pareto

Os AGMOs baseados em Pareto atribuem uma classificação dos Ótimos de Pareto para cada solução do problema, baseados em sua relação de dominância. As soluções mais bem ranqueadas recebem maior preferência nos estágios posteriores do algoritmo [56]. Os algoritmos NSGA-II [60] e SPEA2 [61] são dois exemplos que se encaixam nessa categoria.

### 2.4.3.2 Algoritmos genéticos baseados em decomposição

Nesse tipo de AGMO, os objetivos do problema são decompostos em vários subproblemas, cada um deles objetivando diferentes áreas do Ótimo de Pareto. A resolução por esse tipo de algoritmo é realizada pelo método de escalarização, ou seja, o problema multiobjetivo é transformado em um objetivo único por meio da agregação proporcional (em pesos) dos vários objetivos em um só. Para cada subproblema novos parâmetros (pesos) são utilizados e, dessa forma, é possível obter diversos pontos e construir o Ótimo de Pareto. Os algoritmos MOEA/D [62] e NSGA-III [63] são dois exemplos de AGMO baseados em decomposição.

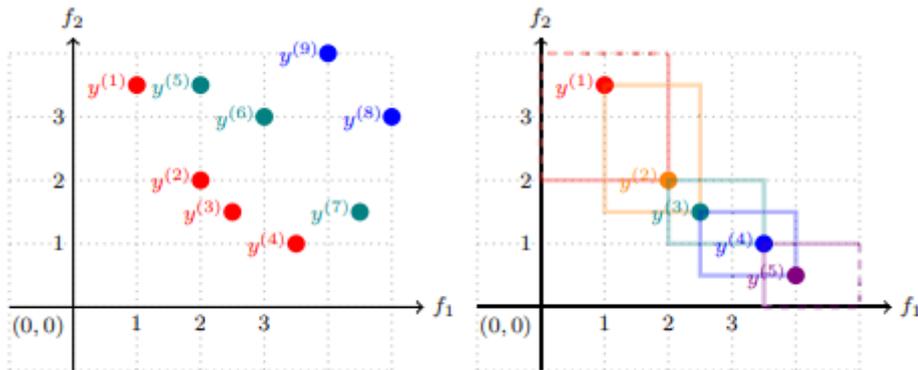
### 2.4.4 Algoritmo Genético II de Seleção Não-dominada (do inglês Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II) (NSGA-II)

Entre os algoritmos evolucionistas para resolução de problemas multiobjetivos, o NSGA-II [60] tem se firmado como um dos mais populares em pesquisas da área [64]. O NSGA-II é baseado na classificação dos indivíduos de acordo com seu nível de dominância relativo. Antes da etapa de seleção, cada indivíduo passa por uma avaliação de relação de dominância relativo da população e é posteriormente ranqueamento. Esse processo é chamado de classificação não dominada.

Inicialmente, o algoritmo atribui a cada solução um valor de dominação, que indica quantas outras soluções são dominadas por ela. Em seguida, é realizado um processo de classificação. A classificação não dominada é realizada em subconjuntos:  $F_1$  são os indivíduos não dominados por nenhum outro da população;  $F_2$  os indivíduos dominados por somente aqueles classificados como  $F_1$ ;  $F_3$  indivíduos não dominados por nenhum outro da população, exceto aqueles resultantes de  $F_1 \cup F_2$ ;  $F_d$ , indivíduos não dominados por nenhum outro da população, exceto aqueles resultantes de  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{d-1}$ . Após o procedimento acima, o algoritmo calcula a métrica chamada de distância da multidão, do inglês *crowding distance* ( $CD$ ), para cada indivíduo dentro de um mesmo subconjunto. O  $CD$  se baseia na distância da solução em relação as soluções mais próximas para cada função objetivo. Quanto maior o valor de  $CD$ , mais distante se encontra a solução de suas vizinhas, tornando maior sua preferência para a próxima geração. O procedimento

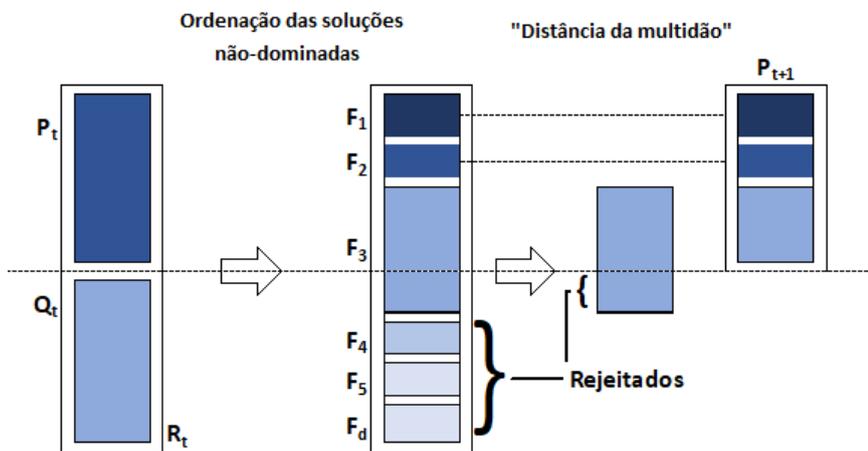
de comparação e seleção por meio da CD garante a diversidade entre as soluções não dominadas [60]. As Figuras 11 e 12 apresentam o esquema básico de classificação.

Figura 11 – Exemplo de ranqueamento de acordo com o nível de dominância relativo e *crowding distance*.



Fonte: [57].

Figura 12 – Ranqueamento dos indivíduos do NSGA-II.



Fonte: [60].

A população selecionada é formada pelos indivíduos mais bem classificados dentro de cada subconjunto, iniciando-se pelo  $F_1$ , depois passam-se ao  $F_2$  e assim por diante até se atingir o tamanho definido da população  $N$ . Essa população irá passar pelos procedimentos de seleção, recombinação e mutação para que seja criada uma segunda geração da população. O procedimento irá se repetir até que o critério de parada seja atingido.

## 2.5 Incertezas em Materiais Compósitos

Conforme mencionado anteriormente, os materiais compósitos estão suscetíveis a consideráveis incertezas nos parâmetros relativos aos seus materiais constituintes, às fibras que os compõem, além das variações normais dos processos de fabricação. Consequentemente, na prática de projeto, costuma-se incorporar uma margem de segurança para contabilizar variações imprevistas nos parâmetros do material e nas condições de solicitação mecânica, térmica etc. No entanto, esta abordagem pode resultar no projeto de estruturas excessivamente conservadoras ou inseguras. Portanto, para o projeto de uma estrutura segura e econômica, é crucial que se faça uma investigação completa das incertezas e de suas influências no desempenho estrutural do sistema que está sendo investigado.

Usualmente, incertezas são classificadas em três categorias: aleatórias, epistêmicas e prejudiciais [11]. As incertezas aleatórias são assim classificadas devido a variações nos parâmetros e propriedades de um sistema. Elas são descritas por modelos probabilísticos, com informações estatísticas oriundas de dados experimentais, possuindo uma variabilidade intrínseca que não se consegue reduzir [6]. As incertezas epistêmicas, por sua vez, originam-se pela falta de informações sobre o sistema estrutural [11] e podem ser reduzidas ou mesmo terem suas variabilidades modeladas, uma vez que se coletam mais informações sobre o sistema ou estrutura [6]. Por fim, incertezas prejudiciais consistem em erros sistemáticos ou erros aleatórios, tendências, simplificações ou outros processos que podem prejudicar a análise de um sistema [11]. A incerteza total de um sistema é uma combinação desses três tipos de incertezas.

Dessa forma, as incertezas podem ser modeladas tanto por uma abordagem probabilística como por uma não probabilística. A escolha recai muitas vezes sobre a disponibilidade de dados experimentais, uma vez que a construção de modelos probabilísticos, em geral, é dependente de grandes volumes de dados, que são caros e os custos computacionais para seu processamento são altos [11]. Neste capítulo, será apresentada a técnica probabilística de Monte Carlo, uma das mais amplamente utilizadas no estudo de incertezas, e posteriormente a técnica não probabilística utilizada neste trabalho, a análise de intervalos baseada na Lógica *Fuzzy*, que, conforme [12] é mais adequada quando não se tem informações suficientes sobre as incertezas.

### 2.5.0.1 Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é uma técnica matemática computadorizada que permite obter todos os possíveis resultados de um sistema estrutural sujeito a incertezas. Esta técnica tem sido usada para modelar uma variedade de sistemas físicos e conceituais em diferentes campos da engenharia, finanças, gerenciamento de projetos, energia, manufatura, pesquisa e desenvolvimento, seguros, petróleo e gás, transporte e meio ambiente [11].

Essa simulação quantifica as incertezas ao formar modelos probabilísticos de todos os possíveis resultados, que representem os valores das distribuições de probabilidade de qualquer parâmetro que possui algum tipo de incerteza. Dessa forma, o resultado da simulação de Monte Carlo apresenta todas as saídas possíveis do problema com suas respectivas probabilidades de ocorrência.

A simulação de Monte Carlo consegue chegar a estes resultados ao realizar repetidas simulações, cada vez utilizando um conjunto diferente de valores aleatórios dos parâmetros de entrada do problema, de acordo com sua distribuição de probabilidades. Dependendo na natureza da estocasticidade do problema, a simulação pode envolver milhares ou dezenas de milhares de recálculos até que um resultado representativo de todas as possíveis saídas do modelo possa ser fornecido. Assim, no caso de sistemas onde o processamento do modelo é computacionalmente caro (como no caso de elementos finitos), o uso prático da simulação de Monte é limitado, uma vez que a simulação pode demorar muito tempo para chegar a todas as possíveis saídas.

Além da propriedade apresentada acima, a análise probabilística precisa que os dados estocásticos sejam bem representados do ponto de vista probabilístico. Geralmente, em problemas práticos de engenharia, incertezas adicionais às suas propriedades aleatórias estão presentes. Nestes casos, é conveniente se elas forem interpretadas como nebulosas, onde o estudo com aleatoriedade nebulosa. do inglês *Fuzzy*, é conveniente [12].

O estudo de aleatoriedade *Fuzzy*, também chamado de Análise de Intervalos, será detalhado mais adiante. Porém, para comparar o resultado dos dois métodos, será apresentado o estudo realizado por Awruch [6] em sua tese de doutorado em 2016. Assim, considerando o sistema linear  $Az = b$ , onde os parâmetros tenham um intervalo de variação e deseja-se obter o intervalo de variação da saída  $z$ , obtém-se:

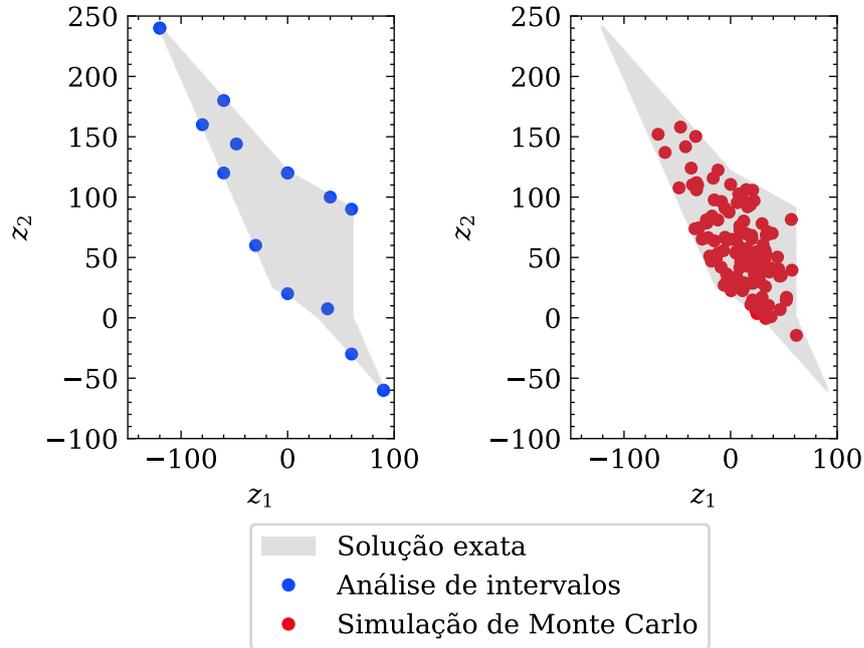
$$\begin{bmatrix} [2, 3] & [0, 1] \\ [1, 2] & [2, 3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0, 120] \\ [60, 240] \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

A Fig. 13 apresenta resultado das simulações pelos dois métodos e pela solução exata do problema. Para um mesmo número de tentativas, percebe-se que o método de Análise de Intervalos teve mais êxito em encontrar os valores extremos do problema. Ou seja, a análise de intervalos por otimização é computacionalmente mais eficiente que o método de Monte Carlo, uma vez que para que este método possa encontrar todos os pontos extremos do problema são necessárias mais iterações que o método de análise de intervalos.

### 2.5.1 Análise de Intervalos

O método de Análise de Intervalos, ou ainda de Otimização de Cortes- $\alpha$ , consiste na busca, por meio de múltiplas análises, do intervalo de resposta em um nível

Figura 13 – Resultados da otimização utilizando a análise de intervalos, o Método de Monte Carlo e a solução exata do problema.



Fonte: Awruch [6] modificada pelo autor.

específico das funções de pertinência na Lógica *Fuzzy*, pesquisado dentro do mesmo nível- $\alpha$  no domínio de entrada [11]. Ou seja, o objetivo é encontrar uma combinação específica de variáveis de entrada de um modelo para que se obtenham as saídas extremas do problema analisado. Dessa forma, o intervalo de saída engloba todas as possibilidades para o modelo [6].

Matematicamente, essa metodologia pode ser expressa por encontrar:

$$\underline{\mathbf{X}}_j = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{que minimiza } \mathbf{Z} = f(\mathbf{X}_j), \quad x \in [x_j^{\min}, x_j^{\max}] \quad , \quad (2.87)$$

e

$$\overline{\mathbf{X}}_j = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{que maximiza } \mathbf{Z} = f(\mathbf{X}_j), \quad x \in [x_j^{\min}, x_j^{\max}] \quad , \quad (2.88)$$

onde  $\underline{\mathbf{X}}$  e  $\overline{\mathbf{X}}$  são os vetores de entrada que vão resultar no menor e maior valores possíveis da saída  $\mathbf{Z}$ , respectivamente. Trata-se, portanto, de uma otimização multiobjetivo, em que

a otimização pode ser executada para o valor de  $j$ , denominado de corte- $\alpha$ . Antes de entrar no detalhamento do método, serão apresentados alguns fundamentos da Lógica *Fuzzy*.

### 2.5.2 Lógica *Fuzzy*

Em projetos de engenharia tradicionais, os problemas são apresentados e resolvidos em variáveis matemáticas precisas, em que os dados de entrada são sempre fixos numericamente. No entanto, em muitos problemas práticos, esses dados, assim como os objetivos e as restrições, apresentam incertezas ou podem ser expressos em variáveis que são vagas e flexíveis. Por exemplo, em um projeto de um componente mecânico, a tensão suportada ( $\sigma$ ) é limitada por um valor de limite superior do material ( $\sigma_{max}$ ), tal que  $\sigma \leq \sigma_{max}$ . Assim, um material que tenha uma tensão máxima suportável de  $\sigma_{max} = 30.000$  psi, não pode ser utilizado em aplicações que demandem uma tensão de  $\sigma = 30.001$ , por exemplo. No entanto, não há diferença substancial entre projetos com  $\sigma = 30.000$  psi e  $\sigma = 30.001$  psi. Dessa forma, é mais razoável ter uma fase de transição entre uma tensão admissível e uma totalmente inadmissível. É possível ainda que as incertezas sejam expressas em termos vagos ou subjetivos, tal como a descrição de um componente mecânico: "Este componente deve suportar uma grande carga". Essa afirmação é imprecisa por causa do significado difuso de "grande carga". Esses dois tipos de situações tornam a resolução de problemas pela matemática tradicional inapropriada. A Lógica *Fuzzy* pode ser usada para modelar e otimizar tais sistemas.

O termo *Fuzzy* significa difuso, impreciso, nebuloso, vago, subjetivo ou duvidoso. Um sistema lógico *Fuzzy* é capaz de lidar simultaneamente com valores numéricos e variáveis linguísticas [65], tais como as normalmente utilizadas em problemas práticos de engenharia, ou seja, carregadas de termos vagos vinculados ao contexto do problema.

#### 2.5.2.1 Conjuntos *Fuzzy*

Na teoria dos conjuntos numéricos tradicionais (*crisp*), os elementos de um conjunto, perfeitamente definidos, devem ser categorizados de tal forma que apenas duas opções sejam possíveis: pertencentes ou não pertencentes aquele conjunto. Essa relação é expressa pela equação 2.89. De outra forma, a transição entre elementos pertencentes para não pertencentes ao conjunto acontece de forma abrupta e bem definida. Não existe a possibilidade de que algum elemento possa pertencer "mais ou menos" a um conjunto. A teoria dos conjuntos *Fuzzy* estende a teoria clássica para o tratamento de dados difusos, ou seja, quando a barreira entre pertencer ou não a um conjunto é difusa, admitindo uma transição gradual entre os dois estados. A Fig. 14 ilustra esse conceito. No conjunto tradicional, à esquerda, os pontos que estão dentro e fora do círculo estão perfeitamente definidos. Por outro lado, no Conjunto *Fuzzy*, representado à direita, podem existir pontos

que pertençam parcialmente ao conjunto, de acordo com um grau de pertinência, como é o caso do ponto (b).

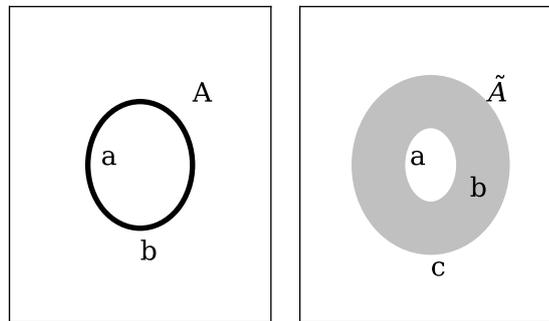
$$\mu_x = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (2.89)$$

Na teoria dos Conjuntos *Fuzzy*, o grau em que o elemento  $x$  pertence ao conjunto é definido através de uma Função de Pertinência  $\mu_A(x)$  no conjunto *Fuzzy*  $\tilde{A}$ , em que receberá um valor entre 0 e 1. Dessa forma, o conjunto *Fuzzy*  $\tilde{A}$  é caracterizado pelos pares de pontos  $(x, \mu_A(x))$ , sendo representado pela equação (2.90):

$$\tilde{A} = \{x, \mu_A(x)\}, \quad x \in X \quad (2.90)$$

Quanto mais próximo o valor de  $\mu_A(x)$  é de 1, mais  $x$  pertence ao conjunto *Fuzzy*  $\tilde{A}$ , sendo  $X$  chamado de universo de discurso.

Figura 14 – Conjuntos tradicionais e *Fuzzy*.



Fonte: Moller [21]

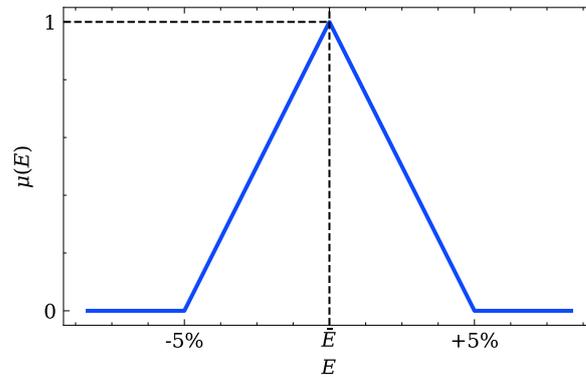
### 2.5.2.2 Fuzzyficação

O termo *fuzzyficação* denota a operação para transformar os valores absolutos do problema (*crisp*) para valores nebulosos ou em conjuntos nebulosos. A *fuzzyficação* traduz, em termos matemáticos, as incertezas e indefinições existentes no parâmetro a ser *fuzzyficado*. Essas incertezas e indefinições podem ser relativas aos parâmetros estruturais assim como na construção, utilização e condições de contorno a que o material estará exposto. Por meio da *fuzzyficação* é possível descrever matematicamente os efeitos das incertezas na resposta física das estruturas [21].

O exemplo a seguir demonstra como a *fuzzyficação* é utilizada para descrever uma incerteza: as propriedades de um material, tal como o módulo de elasticidade ( $E$ ), são obtidas por experimentação e, portanto, suscetíveis à variabilidade. A Fig. 15 apresenta

uma Função de Pertinência triangular para representar uma possível distribuição dos erros para a leitura do módulo de elasticidade de um material compósito.

Figura 15 – Função de pertinência representando a imprecisão no valor de  $E$ .



Nesta figura, variações abaixo e acima de 5% estão totalmente fora do conjunto, ou seja,  $\mu(E) = 0$ , enquanto o valor nominal de  $E$ , pertencendo totalmente ao conjunto, tendo seu valor  $\mu(E) = 1$ . Valores intermediários pertencem, em um certo grau, ao conjunto dos valores de  $E$ , e por isso tem seu valor de  $\mu(E)$  variando entre 0 e 1. Fisicamente, valores com função de pertinência igual a zero são os extremos à variabilidade do parâmetro.

A *fuzzyficação* é realizada por meio das Funções de Pertinência. Essas funções mapeiam um valor de entrada para um valor de pertinência entre 0 e 1, que indica o grau em que o valor de entrada é pertinente a um determinado conjunto *Fuzzy*.

A especificação de uma Função de Pertinência depende da informação disponível. Informações sobre parâmetros estruturais podem estar disponíveis em diferentes formas, tal como em uma pequena amostra, como descrição por meio de variáveis linguísticas, como descrições estatísticas ou ainda conhecimento prévio baseado na experiência [12].

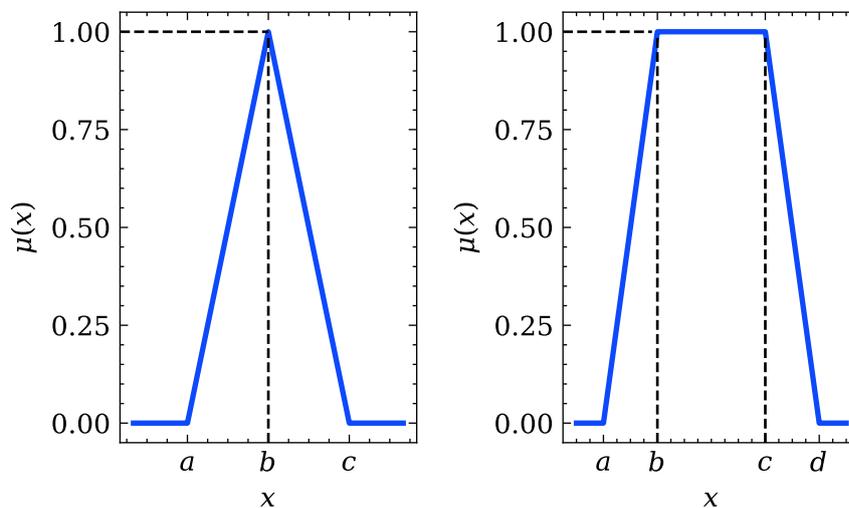
Existem vários tipos de Funções de Pertinência comumente utilizadas na Lógica *Fuzzy*, como a função triangular, a função trapezoidal, a função gaussiana e a função sigmoideal, além da combinação entre elas. Cada uma dessas funções de pertinência tem propriedades únicas que as tornam adequadas para diferentes aplicações. As funções matemáticas e a representação gráfica das funções triangular e trapezoidal são apresentadas abaixo, respectivamente:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{b - a}, & \text{se } a \leq x < b \\ \frac{x - c}{b - c}, & \text{se } b < x \leq c \\ 0, & \text{se } x < a \text{ ou } x > c \end{cases}, \quad (2.91)$$

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{x-d}{c-d}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{se } x < a \text{ ou } x > d \end{cases}, \quad (2.92)$$

sendo graficamente representadas abaixo:

Figura 16 – Funções de pertinência triangular e trapezoidal.



Fonte: Autor.

### 2.5.3 Propagação de Incertezas *Fuzzy* em materiais compósitos

Na teoria de conjuntos *Fuzzy*, as incertezas, ou parâmetros incertos, são representados por números *Fuzzy*. Assim, conforme já visto, os níveis de pertinência descrevem o grau em que determinado valor pertence ao conjunto *Fuzzy*. Neste estudo, os números *Fuzzy* representam a incerteza em torno de uma variável ou parâmetro em estudo.

A propagação das incertezas a partir da lógica *Fuzzy* é realizada a partir de uma análise de intervalos, tendo como objetivo encontrar uma combinação específica de variáveis de entrada de um modelo, estas também representadas por intervalos devido às incertezas, para se obter as saídas extremas do problema analisado. Dessa forma, o intervalo de saída englobará todas as possibilidades para o modelo [6].

A Análise de Intervalos onde os parâmetros que contenham incertezas do modelo são representados por números ou conjuntos *Fuzzy* é realizada pela metodologia de Otimização de Cortes- $\alpha$  [21]. Essa metodologia consiste em uma busca realizada por

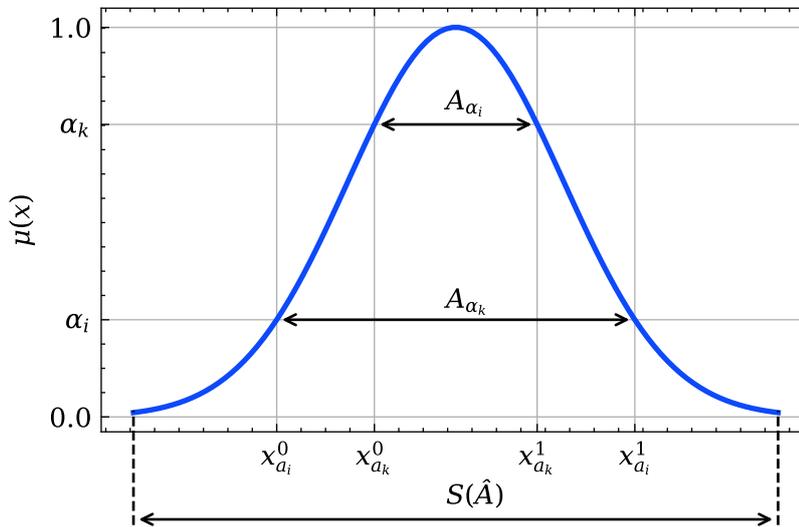
meio de múltiplas análises, do intervalo de resposta em um nível específico das funções de pertinência, pesquisado dentro do mesmo nível- $\alpha$  no domínio de entrada [11].

Antes de detalhar a metodologia de Otimização de Cortes- $\alpha$ , será apresentado como os conjuntos de pontos são discretizados a partir dos Cortes- $\alpha$ .

### 2.5.3.1 Discretização- $\alpha$ dos valores *Fuzzy*

Conjuntos *Fuzzy* podem ser discretizados a partir de Cortes- $\alpha$  em intervalos reais bem definidos (valores *crisp*) em diferentes níveis de pertinência, conforme apresentado pela Fig. 17.

Figura 17 – Conjuntos de cortes- $\alpha$ .



Fonte: [21]

Dessa forma, os intervalos são definidos da seguinte forma:

$$A_{\alpha_k} = \{x \in S(\tilde{A}) \mid \mu_A(x) \geq \alpha_k\} \quad , \quad (2.93)$$

que equivale à expressão:

$$A_{\alpha_k} = [x_{\alpha_k}^0, x_{\alpha_k}^1] \quad , \quad (2.94)$$

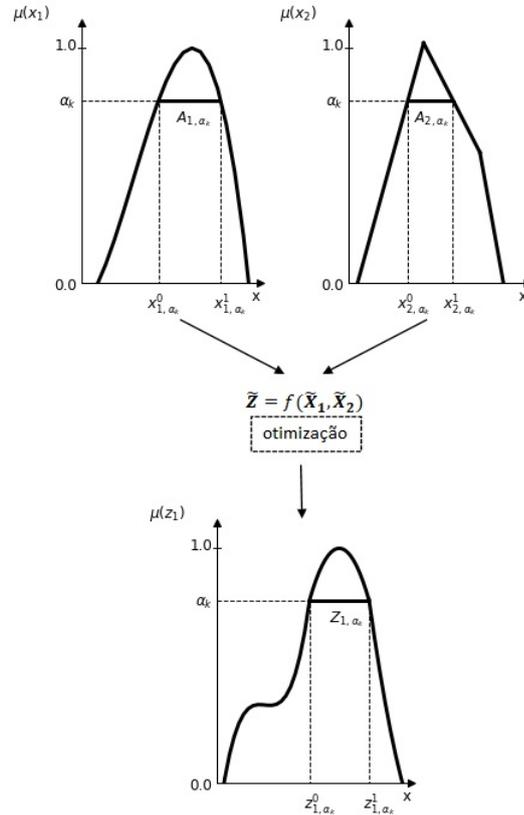
onde  $x_{\alpha_k}^0$  e  $x_{\alpha_k}^1$  representam os limites inferior e superior do determinado intervalo, ou seja,  $x_{\alpha_k}^0 = \min(A_{\alpha_k})$  e  $x_{\alpha_k}^1 = \max(A_{\alpha_k})$ , sendo  $A_{\alpha_k}$  o intervalo definido para o Corte  $\alpha_k$ .

### 2.5.3.2 Otimização dos Cortes- $\alpha$

Uma vez definida a discretização desejada em diferentes níveis de pertinência com os Cortes- $\alpha$  passa-se para a otimização do problema.

A otimização, neste caso, trata-se de uma busca em que se deseja encontrar os valores  $z_{\alpha_k}^0, z_{\alpha_k}^1$  para os diversos Cortes- $\alpha$ . A Fig. 18 é um exemplo de um problema de Otimização de Corte- $\alpha$ , onde duas entradas *Fuzzy*,  $\tilde{X}_1$  e  $\tilde{X}_2$ , resultam na saída *Fuzzy*  $\tilde{Z}_j$ .

Figura 18 – Otimização de cortes- $\alpha$ .



Fonte: [21]

Todos os valores *Fuzzy* de entrada do problema são discretizados usando o mesmo número de cortes- $\alpha$   $\alpha_k, k = 1, \dots, r$ . Assim, cada valor *Fuzzy* de entrada  $\tilde{x}_i$  é definido pelo intervalo  $\tilde{A}_i$ . Cada nível de Corte  $\alpha_k$  forma o intervalo  $A_{i,\alpha_k}$  e todos os intervalos  $A_{i,\alpha_k}$  definem o subespaço dos valores *crisp*  $\underline{X}_{\alpha_k}$ . Dessa forma, para um dado Corte- $\alpha$  têm-se o intervalo de busca  $A_{1,\alpha_k}$  e  $A_{2,\alpha_k}$ , cujo objetivo é encontrar os valores extremos de resposta, ou seja,  $z_{\alpha_k}^0$  e  $z_{\alpha_k}^1$ . A busca pelos valores extremos pode ser formulada como um problema de otimização. Os objetivos pode ser definidos por:

$$\begin{aligned} z_j &= f_j(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \text{Max}(x_1, \dots, x_n) \in \underline{X}_{\alpha_k} \\ z_j &= f_j(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \text{Min}(x_1, \dots, x_n) \in \underline{X}_{\alpha_k} \end{aligned} \quad , \quad (2.95)$$

enquanto que  $(x_1, \dots, x_n) \in \underline{X}_{\alpha_k}$  representam a restrição do problema.

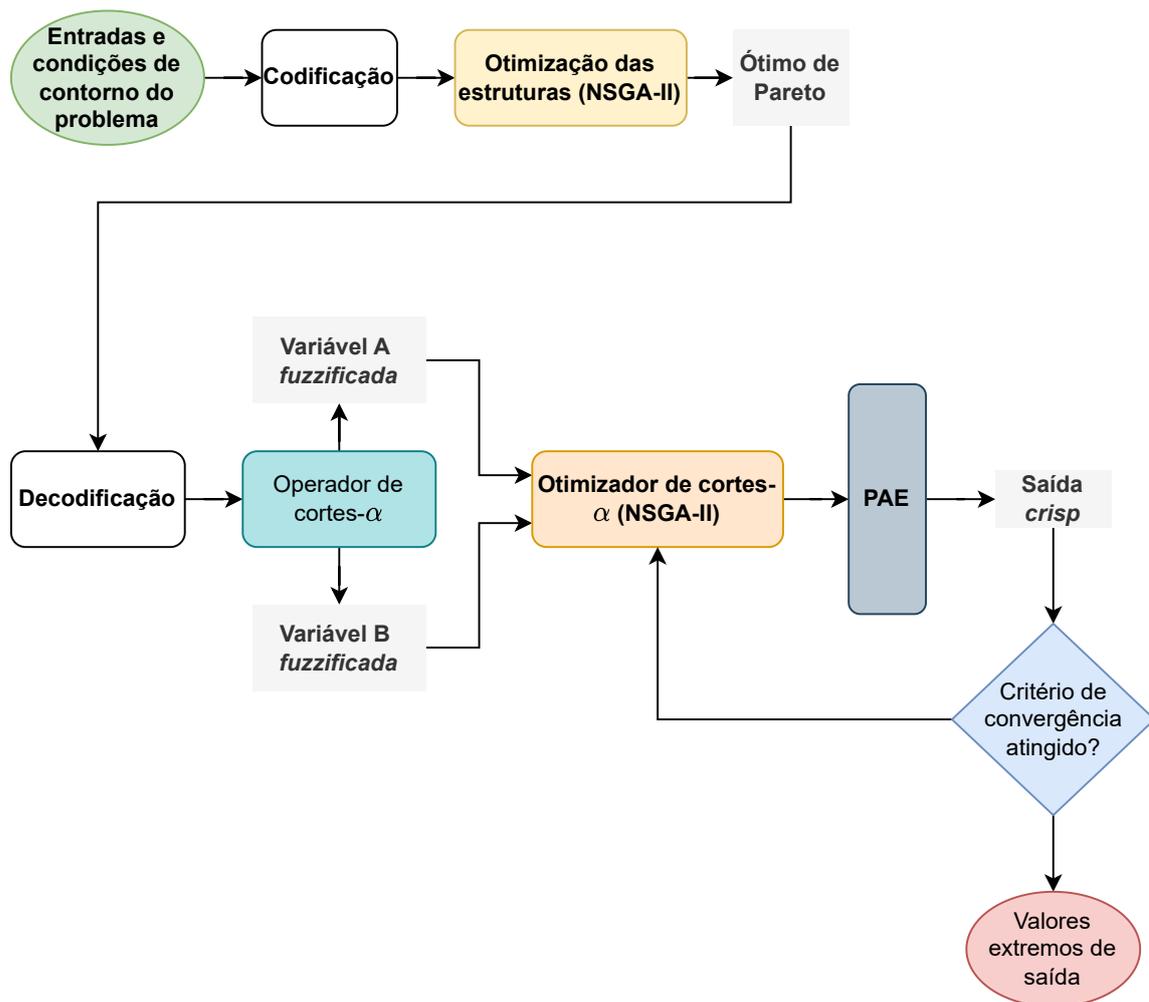
Assim, a Otimização de Cortes- $\alpha$  é um problema de otimização multiobjetivo e que pode ser resolvido por técnicas matemáticas de otimização. Neste trabalho foi utilizado

o algoritmo NSGA-II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II) [60] como algoritmo de otimização. A forma como o NSGA-II é utilizado para a otimização dos materiais e na quantificação de incertezas será apresentada no próximo capítulo.

### 3 METODOLOGIA

Com fins de atingir o objetivo proposto, foi aplicada a metodologia apresentada na Fig. 19.

Figura 19 – Fluxograma da metodologia do trabalho.



Fonte: Autor.

O procedimento se inicia com a definição dos dados de entrada, que englobam a estrutura e as variáveis a serem otimizadas e o delineamento dos objetivos e restrições do problema. Esses dados são codificados de acordo com o padrão de entrada do *framework Pym∞* [2], uma biblioteca de otimização multiobjetivo de código aberto escrita em *Python*. Posteriormente, o algoritmo NSGA-II [60] realiza as operações genéticas, ou seja, seleção, recombinação e mutação, nas várias gerações de indivíduos até identificar a solução ótima. A aptidão das estruturas é avaliada pelo Programa de Análise Estrutural (PAE). Para avaliar

a eficiência da busca realizada, os resultados são comparados com a análise individual de cada estrutura derivada da combinação de variáveis de entrada.

A etapa seguinte envolve a análise de incertezas dos resultados obtidos. Isso implica empregar a metodologia de Otimização de Cortes- $\alpha$  aos pontos pertencentes ao Ótimo de Pareto. Para isso, primeiramente são definidas as variáveis de estudo e seus respectivos níveis de desvio de seus valores nominais. Posteriormente, o algoritmo NSGA-II é mais uma vez utilizado para buscar a combinação ideal de variáveis que levem aos valores extremos de resposta.

Da forma semelhante à otimização convencional, o NSGA-II utiliza o algoritmo de análise estrutural para avaliar a resposta da estrutura com base na combinação de variáveis que são testadas. Por fim, o resultado dessa otimização fornece as estruturas que apresentaram os extremos de resposta, formando os intervalos de saída da estrutura.

A partir do processo descrito é possível otimizar e analisar as incertezas existentes em placas laminadas de materiais compósitos. As etapas do trabalho, portanto, são as descritas abaixo:

### **3.1 Algoritmo Genético para otimização das estruturas de materiais compósitos**

O objetivo dessa seção é apresentar os detalhes do AG utilizado para realizar a otimização dos materiais compósitos, assim como indicar as capacidades e restrições do processo. Dessa forma, essa seção irá abordar as configurações dos operadores genéticos e seu funcionamento, a forma de avaliar a aptidão dos candidatos e a definição das funções objetivos e restrições do problema.

Conforme será detalhado na seção respectiva, a avaliação da aptidão das estruturas formadas pelo AG será realizada pelo PAE. Desta forma, a saída do AG (códigos dos cromossomos) fornece os dados de entrada para o PAE. A saída do programa é a variável que se deseja estudar (peso, deslocamento etc). Essa saída é denominada de aptidão pelo AG e alimenta as demais otimizações, conforme apresentado no Capítulo 2.

#### **3.1.1 Variáveis manipuladas**

Neste trabalho foram adotadas como variáveis a serem manipuladas pelo AG apenas aquelas ligadas às características do material, ou seja: ângulo de orientação das fibras e espessura das lâminas. Portanto, problemas que abordam a otimização de estruturas por meio da manipulação de suas dimensões não serão abordados.

### 3.1.2 Codificação das estruturas

Conforme já tratado na Fundamentação Teórica (Capítulo 2), as características de um indivíduo estão armazenadas nos cromossomos, na forma de genes. Neste estudo, cada indivíduo representa um laminado. Dessa forma, as regras de codificação das características dessa estrutura nas *strings* dos cromossomos seguem o modelo implementado por Soremekun [50].

Conforme [50], cada camada é representada por dois cromossomos. O primeiro cromossomo, denominado de “**CA**” carrega as informações referente aos ângulos de orientação das fibras. O segundo cromossomo, denominado de “**CE**” é responsável por armazenar as informações relativas à espessura das lâminas. Dessa forma, o laminado fica perfeitamente caracterizado quanto à espessura e a orientação das fibras de cada lâmina.

Em relação à sequência dos genes, o primeiro gene representa a camada inferior do laminado, ficando as camadas superiores representadas pelos genes subsequentes. O número total de genes nos cromossomos é fixo e proporcional à quantidade máxima de camadas admissíveis em cada problema em particular, sendo que cada gene pode assumir um número inteiro de acordo com as regras de codificação.

Neste trabalho foi imposta a condição de simetria das camadas do laminado. Desta forma, os genes representam apenas as camadas situadas abaixo do plano médio do laminado, ficando as demais definidas pela condição imposta.

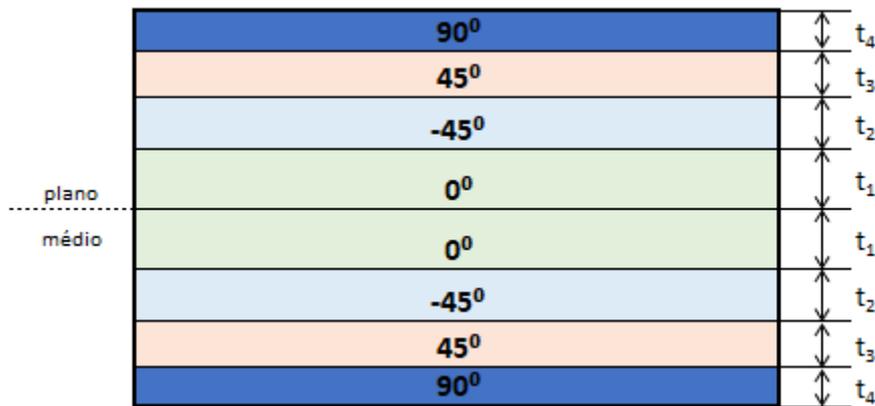
Nas tabelas a seguir são apresentados os dicionários de codificação de ângulos e materiais utilizados neste trabalho:

Tabela 1 – Dicionário de codificação dos genes dos cromossomos “**CA**” e “**CE**”.

<b>Código de ângulos</b>	
1	→ lâmina orientada a 0 <sup>o</sup>
2	→ lâmina orientada a -45 <sup>o</sup>
3	→ lâmina orientada a 45 <sup>o</sup>
4	→ lâmina orientada a 90 <sup>o</sup>
<b>Código das espessuras</b>	
5	→ 0,75mm
6	→ 1,00mm
7	→ 1,50mm
8	→ 2,00mm

A Fig. 20 a seguir apresenta um exemplo de estrutura e seu respectivos cromossomos codificados.

Figura 20 – Exemplo de laminado.



Fonte: Autor.

**Orientação das fibras:** [4/3/2/1/1/2/3/4]

**Espessuras:** [8, 7, 6, 5, 5, 6, 7, 8]

### 3.1.3 População inicial

A população inicial de um Algoritmo Genético tem um importante papel na convergência do algoritmo, independente do problema e do tipo de algoritmo utilizado. Dessa forma, uma população inicial bem distribuída e representativa aumenta a robustez e evita a convergência prematura da população a ótimos locais [66].

A primeira característica da população inicial a ser definida é seu tamanho. Essa definição deve levar em consideração o fato de que se a população inicial for pequena, o esforço computacional também será pequeno, porém poderá levar a convergências prematuras. Populações muito grandes aumentarão o esforço computacional. Para um tempo menor de convergência não existe regra estabelecida para dimensionar o tamanho na população inicial. Em geral, o tamanho da população deve ser proporcional à complexidade do problema.

A segunda característica a ser definida é como será formada a população inicial. Ela pode ser formada através de algum conhecimento específico do problema ou utilizar-se de algumas soluções conhecidas [2]. Porém, de forma geral ela é criada aleatoriamente. Neste trabalho optou-se pela última maneira, ou seja, a população foi criada de forma aleatória, de acordo com o definido no dicionário de codificação, sem nenhuma modificação ou interferência.

### 3.1.4 Seleção dos pais

Em Algoritmos Genéticos a seleção dos pais normalmente usa o Método da Roleta (*Rolette Wheel*). No caso do algoritmo NSGA-II, os indivíduos são ranqueados de

acordo com seu nível de dominância relativa. Em consequência disso, o AG precisa atribuir um nível de aptidão (*fitness*) aos indivíduos, utilizando essa informação para ranquear os indivíduos.

Conforme já exposto, a aptidão de um indivíduo é avaliada por meio do PAE, cujos fundamentos foram descritos na Fundamentação Teórica 2. O nível de aptidão de uma determinada solução leva em conta os aspectos desejados (objetivos) e as restrições do problema. Sua formulação é específica para cada problema a ser abordado.

Desta forma, a seleção dos “pais” é realizada combinando-se o método de ranqueamento do NSGA-II com uma avaliação de aptidão realizada pelo PAE.

### 3.1.5 Avaliação da aptidão

A avaliação da aptidão de cada indivíduo visa identificar aqueles melhor adaptados ao “ambiente” e dá a esses indivíduos mais chances de se reproduzirem, de forma análoga ao processo de seleção biológico. Neste trabalho a aptidão de um indivíduo também foi avaliada por meio do PAE.

### 3.1.6 Recombinação

Na otimização das estruturas foi utilizado o operador genético de recombinação uniforme. Esse operador consiste em uma estratégia fundamental nos algoritmos genéticos e desempenha um papel crucial na exploração do espaço de busca [48], permitindo a seleção aleatória de cada posição do cromossomo a partir de um dos pais. Essa abordagem diversificada de mistura genética é particularmente valiosa em problemas complexos, onde a “variabilidade genética” desempenha um papel crucial na busca por soluções ótimas [67]. Através da recombinação uniforme, é possível explorar diferentes características dos pais, aumentando a chance de encontrar soluções de alta qualidade. A Fig. 21 permite a visualização da troca de informações realizada pelo operador genético de recombinação uniforme de dois pais. Cada linha representa uma geração e cada coluna uma variável. Os quadrados do gráfico indicam a origem da variável.

### 3.1.7 Mutação

Neste trabalho foi utilizado o operador genético de mutação polinomial. Nesse operador, um gene do cromossomo é selecionado aleatoriamente e sofre uma perturbação baseada em uma distribuição polinomial. Essa perturbação adiciona um valor aleatório ao gene selecionado, permitindo a introdução de variações no indivíduo. A mutação polinomial oferece uma alternativa eficaz ao operador de mutação clássico [60], pois apresenta uma maior capacidade de explorar regiões distantes do espaço de busca. Essa estratégia permite

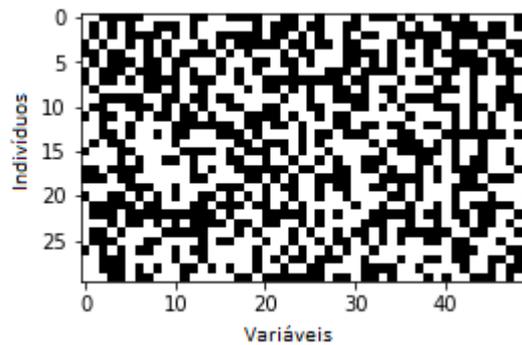


Figura 21 – Fonte: [2]

a busca por soluções ótimas em problemas complexos, onde pequenas alterações nos genes podem levar a melhorias significativas nas soluções encontradas.

### 3.1.8 Critério de parada

Na otimização das estruturas, o critério de parada utilizado neste trabalho foi o número máximo de gerações, que foi estabelecido em 200 gerações.

## 3.2 Algoritmo Genético para a quantificação de incertezas

O Algoritmo Genético para a quantificação de incertezas possui o mesmo mecanismo básico daquele apresentado para a otimização das estruturas. As diferenças serão apresentadas nesta seção.

### 3.2.1 Variáveis manipuladas

As variáveis que foram manipuladas pelo AG, no caso da análise de incertezas, foram as variações que cada corte- $\alpha$  permite. No presente estudo utilizaram-se três variações possíveis: o extremo inferior, 1 (valor nominal), e o extremo superior. Pode-se exemplificar isso considerando um caso em que as variações da espessura fossem da ordem de  $\pm 10\%$ . Neste caso, as variáveis manipuladas poderiam assumir os valores de  $[0,9/1,0/1,1]$ . A decodificação dos genes para números reais para a avaliação pelo PAE, incluiria a multiplicação destes valores pelo valor nominal da espessura de cada lâmina.

### 3.2.2 Codificação das estruturas

Diferentemente da otimização das estruturas e conforme apresentado no item anterior, a codificação utilizada para a análise das estruturas se refere a variação que os valores nominais sofrerão para a formação de uma nova estrutura. A quantidade de cromossomos está relacionada à quantidade de variáveis incertas que se deseja estudar, enquanto a quantidade de genes por cromossomos foi mantida em três.

Para um melhor entendimento, apresenta-se a análise de incertezas na espessura das lâminas do laminado apresentado na Fig. 20. O laminado em questão apresenta as seguintes propriedades:

**Orientação das fibras:** [90/45/-45/0/0/-45/45/90]

**Espessura das lâminas:** [0,75/1,00/1,50/2,00/2,00/1,50/1,00/0,75]

Dessa forma, têm-se oito variáveis a serem otimizadas (cada uma das oito camadas pode variar independentemente em seu respectivo intervalo de variabilidade). É possível verificar, portanto, que existem 12 valores possíveis de espessura de lâminas. De forma a evitar um dicionário com 12 códigos e a tornar o algoritmo mais flexível, optou-se por codificar as variações permitidas, e não os seus valores absolutos. Dessa forma, as regras de codificação são as expressas na Tabela abaixo:

Código de variações de espessuras
0 → variação de -10%
1 → sem variação (valor nominal)
2 → variação de +10%

Tabela 2 – Dicionário de codificação dos genes dos cromossomos para quantificação de incertezas.

Assim, a decodificação para valores de engenharia ficaria da seguinte forma:

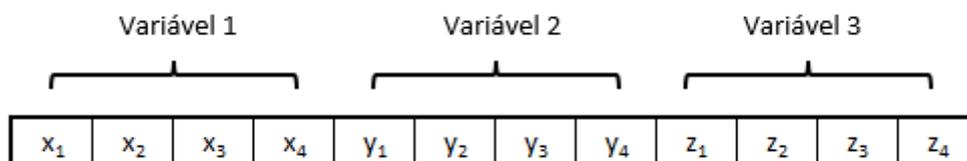
**Indivíduo (exemplo):** [0/1/2/2/1/0/1/1],

**Variações:** [-10%/0/+10%/+10%/0/-10%/0/0],

**Nova espessura das lâminas:** [0,675/1,00/1,650/2,20/2,00/1,35/1,00/0,75].

Para os casos em que há mais de uma variável a ser otimizada, cada variável possuía um dicionário próprio, e o indivíduo é formado pela concatenação dos cromossomos, conforme demonstrado pela Fig. 22 abaixo:

Figura 22 – Representação de indivíduo para análise de incertezas combinadas.



Fonte: Autor.

### 3.3 Programa de Análise Estrutural

Uma das etapas importantes deste trabalho foi o desenvolvimento do programa computacional (PAE) destinado à análise de estruturas de materiais compósitos usando a Teoria de Placa Laminada por Deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem (FSDT) [38].

O programa computacional desenvolvido é capaz de analisar placas retangulares construídas com materiais compósitos. As variáveis de entrada do programa incluem os ângulos de direção das fibras, os materiais e espessuras dos laminados e as dimensões do laminado. Além disso, o programa permite a seleção de vários tipos de condições de contorno. A solução de problemas não lineares é obtida usando o método incremental-iterativo de Newton-Raphson [41]. Por fim, o programa é capaz de realizar a análise de falha do material por meio do critério de Tsai-Wu [37] em diversos pontos do elemento e para todas as faces das lâminas.

O código do programa foi escrito em *Python*, uma linguagem de programação interativa, interpretada e orientada a objetos. Sua sintaxe clara permite o desenvolvimento de programas pequenos, mas poderosos. O código desenvolvido utiliza majoritariamente os pacotes *Numpy* [68] para realizar operações com matrizes e alguns cálculos envolvendo álgebra linear, e o pacote *Matplotlib* [69] para plotar os gráficos.

Este programa é o responsável por realizar os cálculos das propriedades mecânicas a partir das estruturas formadas/otimizadas, e dará suporte aos demais algoritmos desenvolvidos.

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Análise Estrutural

O objetivo desta parte do trabalho é apresentar os resultados obtidos pelo PAE e compará-los com os resultados de outros trabalhos científicos disponíveis para consulta. Primeiramente são apresentadas as condições de contorno e as propriedades elásticas dos materiais que serão utilizados no decorrer dos exemplos numéricos. As simulações foram rigorosamente reproduzidas com base nos dados originais apresentados nas fontes de referência.

#### 4.1.0.1 Condições de contorno

As diferentes condições de contorno mais encontrados na prática e utilizados neste trabalho são:

1. Simplesmente Apoiada tipo I (SSSS-I):

$$\begin{aligned} w_0 &= 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = b & , \\ w_0 &= 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = a & . \end{aligned}$$

2. Simplesmente Apoiada tipo II (SSSS-II):

$$\begin{aligned} w_0 = \theta_x &= 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = b & , \\ w_0 = \theta_y &= 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = a & . \end{aligned}$$

3. Engastada tipo I (CCCC-I):

$$\begin{aligned} u_0 = v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y &= 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = b & , \\ u_0 = v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y &= 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = a & . \end{aligned}$$

4. Engastada tipo II (CCCC-II):

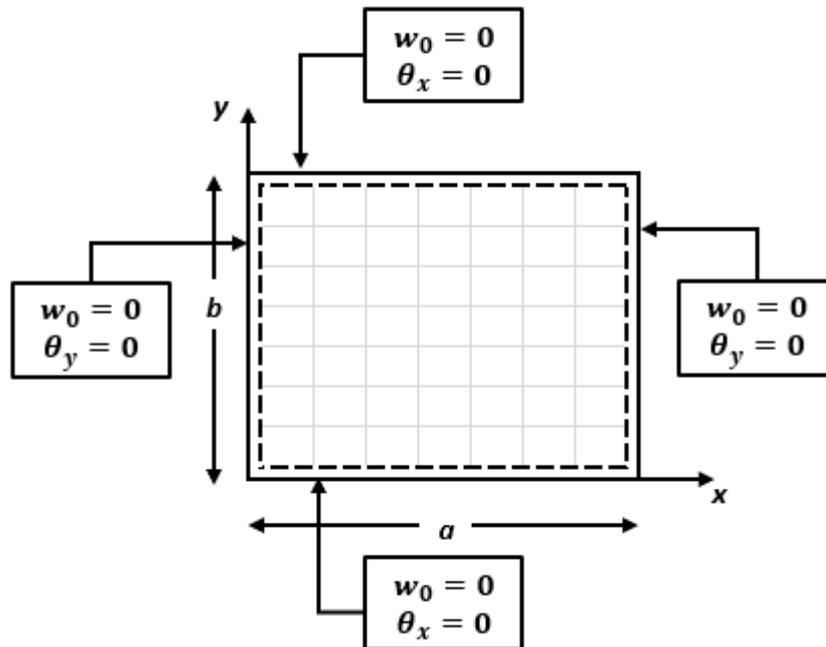
$$u_0 = v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = a \quad .$$

5. Rotulada (RRRR):

$$\begin{aligned} u_0 = v_0 = w_0 &= 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = b & , \\ u_0 = v_0 = w_0 &= 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = a & . \end{aligned}$$

A Fig. 23 representa o caso de uma placa com as condições de contorno SSSS-II.

Figura 23 – Condições de contorno para uma placa simplesmente apoiada.



#### 4.1.0.2 Propriedades dos materiais

A identificação e respectivas propriedades dos materiais utilizados neste trabalho são:

1. Material-I:

$$E_1 = 20.68 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 8.83 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 2.55 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.32$$

2. Material-II:

$$E_1/E_2 = 25$$

$$G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5$$

$$G_{23}/E_2 = 0.2$$

$$\nu_{12} = 0.25$$

3. Material-III:

$$E_1 = 138 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 9.65 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 4.83 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.30$$

Cabe salientar que os materiais apresentados são empregados em contextos diversos, uma vez que a notação das unidades de medida fornecidas para cada material é distinta.

#### 4.1.1 Análise estática linear

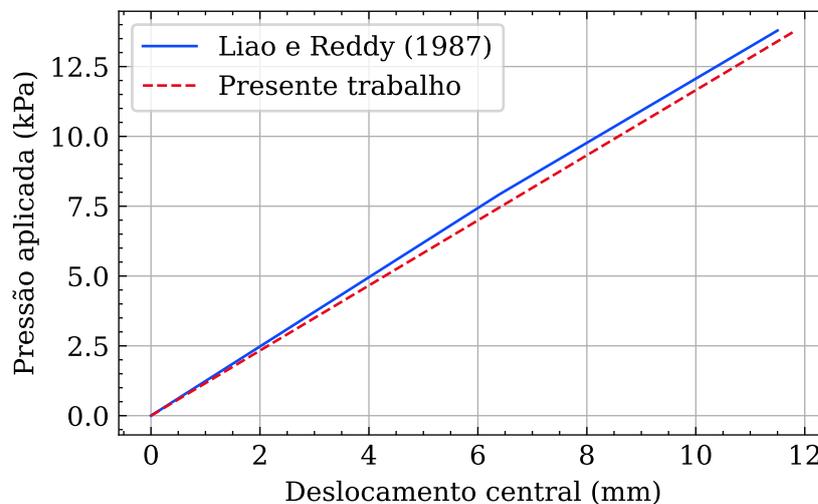
Dois casos foram estudados: uma placa quadrada, simplesmente apoiada submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída e, o segundo, com uma carga sinusoidalmente distribuída.

##### 4.1.1.1 Placa quadrada simplesmente apoiada sobre uma carga uniformemente distribuída

Neste exemplo, uma placa quadrada tendo as condições de contorno SSSS-I é submetida a uma carga transversal uniforme de pressão. O laminado em questão apresenta uma sequência de laminação  $[0, 90, 0, 90]$ . A placa possui 0.0035m de espessura e 0.305m de lado.

O resultado da análise, apresentado na forma da Fig. 24, mostra a relação entre a pressão exercida e o respectivo deslocamento do centro da placa. Os valores são comparados com os resultados obtidos por Liao e Reddy (1987) [70]. Como é possível observar, o algoritmo obteve uma boa concordância com a referência.

Figura 24 – Curva pressão-deslocamento central para uma placa simplesmente apoiada.



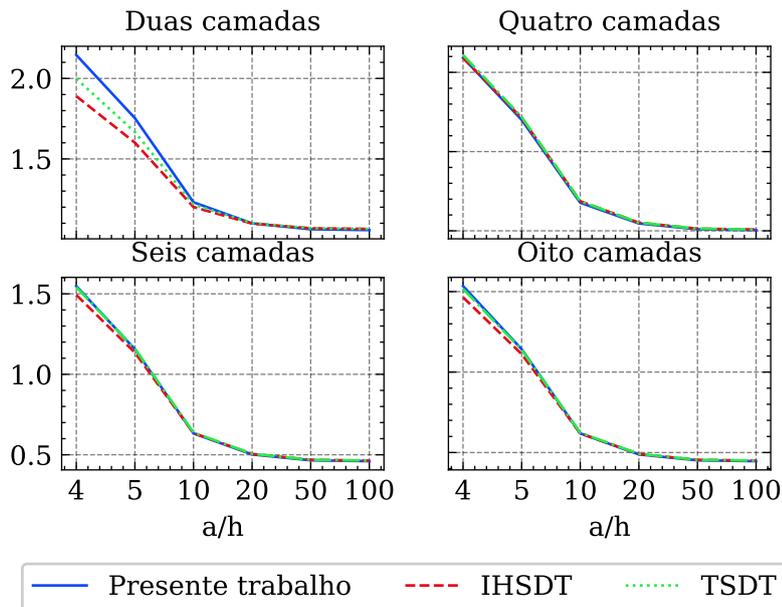
Fonte: Autor.

#### 4.1.1.2 Placa quadrada simplesmente apoiada sobre uma carga distribuída sinusoidalmente

Conforme [71], a maior parte dos estudos disponíveis na literatura tratam de laminados *cross-ply* simétricos. Por outro lado, laminados *cross-ply* assimétricos são de grande importância em problemas práticos de engenharia. Desta forma, a fim de verificar a precisão do modelo desenvolvido, uma comparação foi realizada para esse tipo de laminado.

Neste exemplo, quatro configurações de laminados foram simuladas: dois, quatro, seis e oito camadas. A sequência de laminação  $[0,90]$  repetiu-se de acordo com o número de camadas. As condições de contorno do problema são do tipo SSSS-II. A carga aplicada neste exemplo segue a equação  $P = P_0 \sin(\pi x/a) \cos(\pi y/b)$ . O material empregado na simulação possui as suas constantes elásticas definidos pelo Material-II e a placa possui 0.23m de lado e 0.001m de espessura.

Figura 25 – Deslocamento central normalizado para diversas configurações do laminado.



Fonte: Autor com os dados obtidos de [71]

Os resultados obtidos pelo PAE, assim como os dados originais do trabalho de [71], estão dispostos na tabela 3 e representado na Fig. 25. Nesta tabela, os resultados do programa são comparados com aqueles obtidos pelo método fechado de Navier utilizando a Teoria da Deformação Cisalhante de Terceira Ordem - *third-order shear deformation theory* (TSDT) e a Teoria de Deformação de Cisalhamento Hiperbólico Inverso - *inverse hyperbolic shear deformation* (IHSDT), conhecidos pela boa precisão de seus resultados. Além do número de camadas, as simulações foram realizadas para diversos valores da razão  $a/h$ . Os resultados foram normalizados de acordo com a equação  $\bar{w} = w_0(a/2, h/2) \left( \frac{100E_2h^3}{a^4P_0} \right)$ .

Camadas	Modelo	$a/h$					
		4	5	10	20	50	100
2	Presente trabalho	2.1455	1,7532	1,2303	1,099	1,0629	1,0577
	Navier - IHSdT	1,8898	1,6009	1,2009	1,0981	1,0691	1,0650
	(diferença relativa)	13.53%	9.52%	2.45%	0.13%	-0.58%	-0.69%
	Navier - TSdT	1,9985	1,6670	1,2161	1,1018	1,0697	1,0651
	(diferença relativa)	7,36%	5,18%	1,17%	-0,21%	-0,63%	-0,69%
4	Presente trabalho	1,6022	1,2081	0,6827	0,5514	0,5146	0,5092
	Navier - IHSdT	1,5909	1,2116	0,6866	0,5518	0,5137	0,5083
	(diferença relativa)	0.1%	-0.94%	-1.36%	-0.96%	-0.74%	-0.72%
	Navier - TSdT	1,6093	1,2184	0,6865	0,5517	0,5137	0,5083
	(diferença relativa)	-1.05%	-1.49%	-1.35%	-0.94%	-0.74%	-0.72%
6	Presente trabalho	1,5573	1,1633	0,6379	0,5065	0,4697	0,4643
	Navier - IHSdT	1,4932	1,1346	0,6344	0,5052	0,4687	0,4634
	(diferença relativa)*	3.67%	1.87%	-0.25%	-0.63%	-0.7%	-0.69%
	Navier - TSdT	1,5411	1,1590	0,6382	0,5060	0,4688	0,4635
	(diferença relativa)*	0.45%	-0.28%	-0.85%	-0.78%	-0.72%	-0.71%
8	Presente trabalho	1,5434	1,1494	0,6240	0,4926	0,4559	0,4505
	Navier - IHSdT	1,4647	1,1118	0,6184	0,4908	0,4547	0,4496
	(diferença relativa)*	4.75%	2.72%	0.1%	-0.51%	-0.67%	-0.7%
	Navier - TSdT	1,5168	1,1387	0,6228	0,4917	0,4549	0,4496
	(diferença relativa)*	1.15%	0.29%	-0.61%	-0.7%	-0.71%	-0.7%

Tabela 3 – Efeito do número de camadas e da razão  $a/h$  no deslocamento vertical do centro da placa.

Conclui-se, portanto, que o modelo desenvolvido apresentou boa concordância com os estudos de referência, especialmente para placas finas e placas formadas por um número grande de lâminas. A razão para as discrepâncias observadas pode ser atribuída à presença do acoplamento membrana-flexão no laminado, que tende a desaparecer conforme o número de camadas aumenta [71].

#### 4.1.2 Análise estática não-linear geométrica

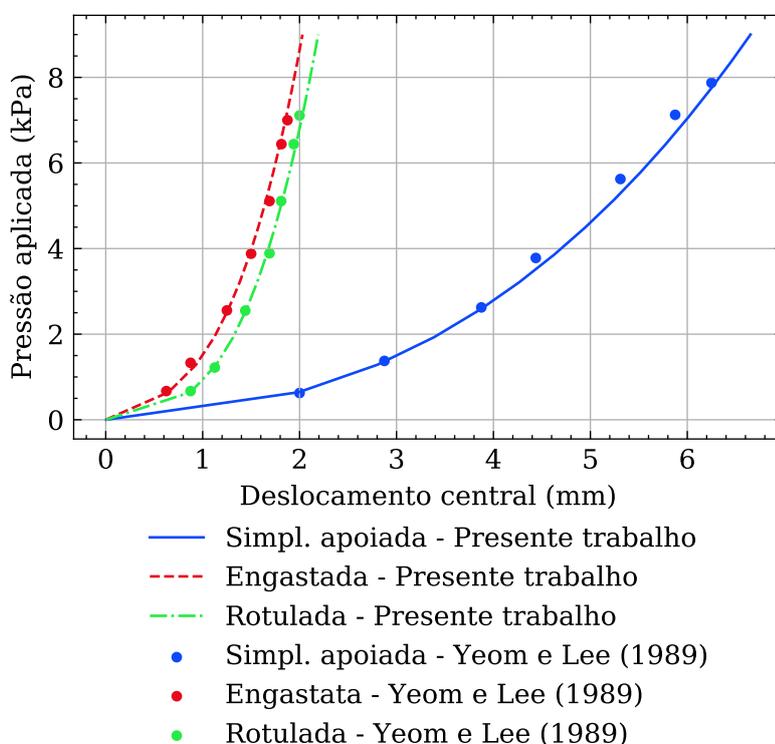
Nesta parte do trabalho são apresentados os resultados para análises não-lineares geométricas dos materiais compósitos. O exemplo trata de uma placa laminada quadrada submetida a uma carga de pressão uniforme em três diferentes condições de

contorno e os resultados comparados com o estudo de Yeom e Lee (1989) [72].

#### 4.1.2.1 Placa quadrada submetida a um carregamento uniforme

Neste exemplo, uma placa quadrada é submetida a um carregamento uniforme de pressão. Três condições de contorno serão analisadas: SSSS-I, CCCC-I e RRRR. O laminado estudado apresenta uma sequência de laminação  $[0, 90]$  e tem suas propriedades elásticas conforme o Material-III. O laminado possui 0.23m de lado e 0.001m de espessura.

Figura 26 – Curva pressão-deslocamento central para uma placa simplesmente apoiada.



Fonte: Autor.

O resultado da análise, apresentado na forma da Fig. 26, mostra a relação entre a pressão exercida e o respectivo deslocamento central da placa para as três condições de contorno citadas. Os valores são comparados com os resultados obtidos por Yeom e Lee (1989) [72]. Como é possível observar o algoritmo obteve uma boa concordância com a referência.

#### 4.1.3 Análise de tensões

Nesta parte do trabalho, serão apresentados exemplos de aplicações em que o objetivo é verificar as tensões calculadas pelo PAE para diversos pontos das estruturas

de materiais compósitos. Serão ilustrados dois exemplos: ambos consistem em placas submetidas a um carregamento transversal. O primeiro, mais simples, apresenta uma carga uniformemente distribuída e simboliza uma análise linear. O segundo, mais complexo, leva em conta os efeitos da não-linearidade geométrica para uma placa submetida a um carregamento sinusoidalmente distribuído.

#### 4.1.3.1 Análise linear de tensões em uma placa *cross-ply*

Neste exemplo, uma placa quadrada de um compósito laminado sofre um carregamento transversal sinusoidalmente distribuído de acordo com a equação  $P = P_0 \sin(\pi x/a) \cos(\pi y/b)$ . O laminado é formado pelo Material-II e está submetido à condição de contorno SSSS-II. A partir da análise dos deslocamentos são calculadas as tensões na estrutura. O resultado da simulação foi normalizado de acordo com as equações abaixo, em que os parâmetros dentro dos parênteses indicam o ponto de integração onde as tensões são calculadas.

$$\bar{w} = \frac{100E_2h^3}{a^4P_0}w_0\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{h^2}{b^2P_0}\sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right) \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{h^2}{b^2P_0}\sigma_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{4}\right) \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{h^2}{b^2P_0}\sigma_{xy}\left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$$

Modelo	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$
Elástico 3D	0.4380	0.5390	0.2760	0.0216
Navier - IHSdT	0.4344	0.5385	0.2710	0.0213
Navier - TSDT	0.4340	0.5390	0.2710	0.0213
FEM - TSDT	0.4343	0.5387	0.2708	0.0213
Presente trabalho	0.4363	0.5345	0,2686	0.0212
(diferença média)	-0,26%	0,80%	1,34%	0,82%

Tabela 4 – Cálculo de tensões para diversos pontos de integração.

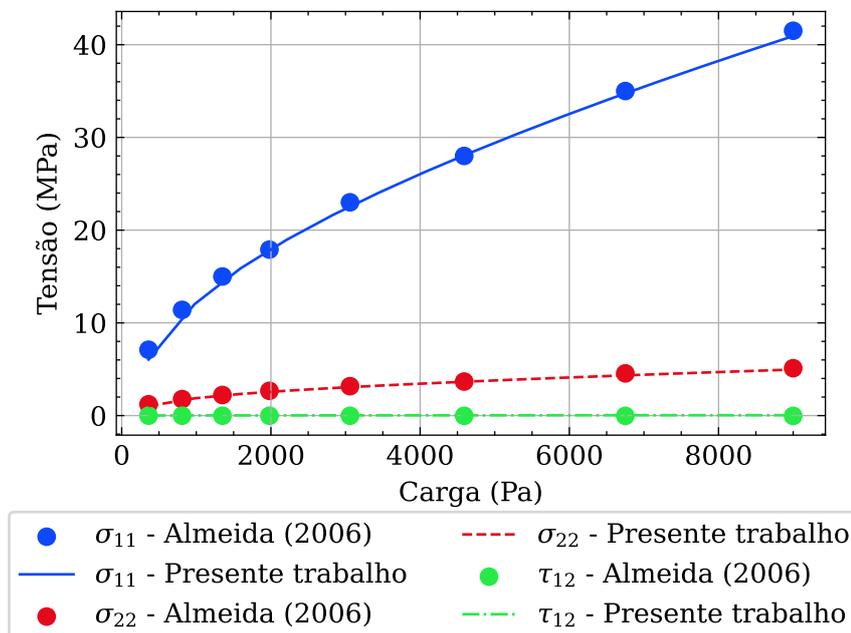
A partir dos resultados da Tabela 4, é possível concluir que o PAE encontrou resultados muito próximos as de teorias consideradas muito mais precisas, porém que requerem um esforço computacional muito maior.

#### 4.1.3.2 Análise não linear de tensões em uma placa simplesmente apoiada

Neste exemplo, uma análise de tensões é realizada na placa apresentada no exemplo 4.1.2.1. As propriedades geométricas e elásticas, portanto, são as mesmas, porém apenas o caso com as bordas engastadas será considerado, ou seja CCCC-I. As tensões são calculadas no meio da placa  $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$  para a face superior e para a face inferior do laminado.

Conforme pode ser observado nas curvas de tensão x carga, apresentadas nas Figuras 27 e 28, os resultados apresentaram boa concordância com a referência.

Figura 27 – Análise de tensões na face inferior do laminado.



Fonte: Autor.

## 4.2 Otimização e Análise de Incertezas

Uma vez que o PAE foi validado, partiu-se então para a otimização de estrutura.

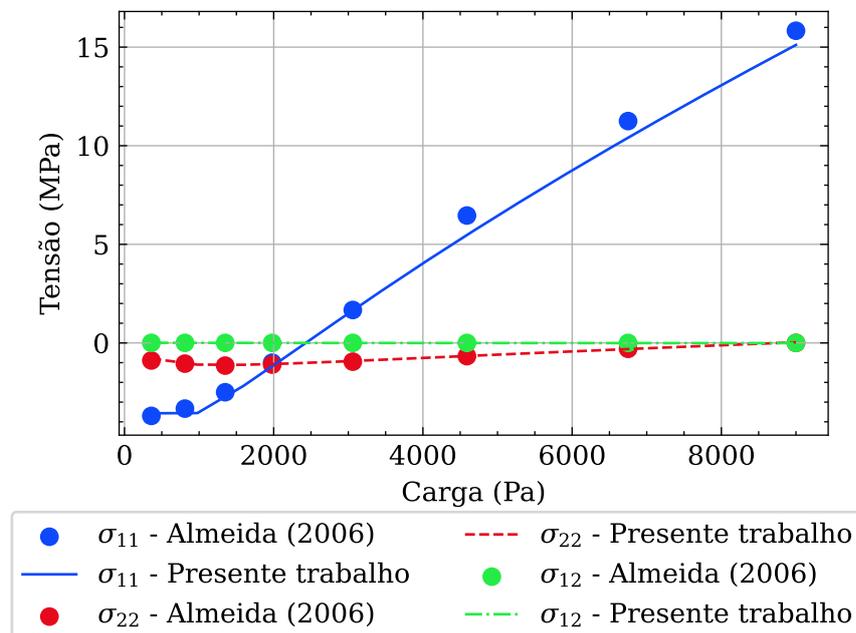
### 4.2.1 Descrição do problema

Na presente seção, será descrito o problema de otimização multiobjetivos que empregou a metodologia exposta no Capítulo 3, levando em conta as incertezas inerentes aos parâmetros de entrada.

Neste problema, uma placa quadrada, engastada em dois lados opostos (condição de contorno CCC-I), é submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída. O objetivo do problema é minimizar simultaneamente o deslocamento vertical máximo sofrido por um ponto central e o peso da placa. As variáveis manipuladas na otimização são os ângulos de orientação e a espessura de cada uma das suas lâminas.

A estrutura a ser otimizada encontra-se representada na Fig. 29. Nela constam as dimensões, assim como as condições de contorno. A carga de pressão aplicada é de  $0.1\text{MPa}$ . Aqui, os efeitos da não linearidade não serão considerados e serão impostas as condições de simetria às 8 lâminas que formarão o laminado. As propriedades elásticas referentes ao material que compõe o laminado são apresentadas na Tabela 5. Neste trabalho, considerou-se estas propriedades constantes, independentemente da espessura das lâminas. O problema pode ser resumido da seguinte forma:

Figura 28 – Análise de tensões na face superior do laminado. Fonte: Autor



Fonte: Autor.

### Objetivos

- minimizar o deslocamento vertical máximo,
- minimizar o peso da placa.

### Restrições

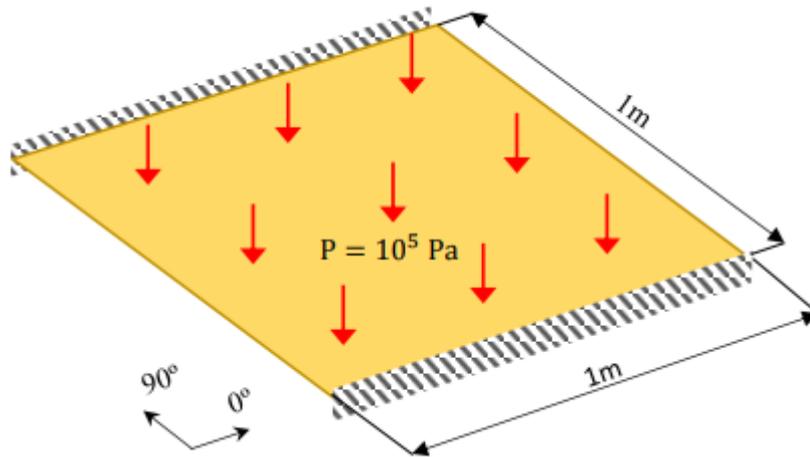
- qualquer falha é inadmissível.

### Espaço de pesquisa

- os ângulos podem assumir os valores:  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $-45^\circ$  e  $90^\circ$ ,
- as espessuras podem assumir os valores: 0,75mm, 1,00mm, 1,50mm e 2,00mm, e
- oito lâminas unidirecionais simétricas.

Tal tipo de problema caracteriza uma otimização multiobjetivo em que os objetivos são antagônicos. Dessa forma, espera-se a existência de um conjunto de soluções ótimas, ou seja, o Ótimo de Pareto. Para a otimização utilizando AG, cada sequência de laminação será definida por dois pares de cromossomos formados por 4 genes cada: um para os ângulos de orientação das fibras, e o outro para as espessuras das lâminas. Serão admitidos quatro valores de ângulos e espessuras, conforme a codificação genética apresentada na Tabela 1. O problema exhibe, portanto, 65536 ( $4^4 * 4^4$ ) combinações possíveis para o laminado.

Figura 29 – Dimensões e condições de contorno da placa quadrada a ser otimizada.



Propriedades	Valor	Parâmetros de Resistência	Valor
$E_1$	181,0 GPa	$F_{1t}$	1500,0 Mpa
$E_2$	10,3 GPa	$F_{1c}$	1500,0 Mpa
$G_{12}$	7,17 GPa	$F_{2t}$	40,0 Mpa
$\nu_{12}$	0,28	$F_{2c}$	246,0 Mpa
$\rho$	15,7 $kN/m^3$	$F_6$	68,0 MPa

Tabela 5 – Propriedades elásticas do material

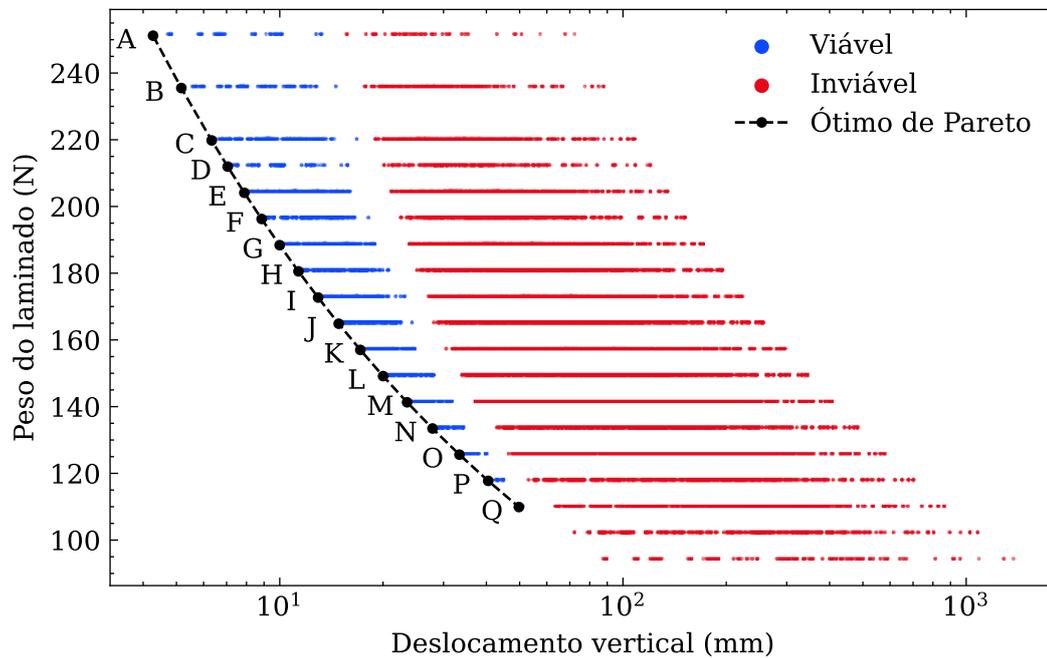
#### 4.2.2 Soluções

Inicialmente, a fim de possibilitar a avaliação da eficiência e os resultados da otimização, foram simuladas todas as 65536 seqüências de empilhamento possíveis para o laminado. O resultado dessa simulação é apresentado na Fig. 30.

Na presente figura, é possível constatar a categorização dos resultados em grupos de pesos, com base na espessura total do laminado. No interior de cada agrupamento de peso, o laminado pode exibir distintos deslocamentos, dependendo da sua configuração de empilhamento. Além disso, os valores situados mais à direita do gráfico (que correspondem a deslocamentos maiores) englobam as configurações consideradas inviáveis, isto é, que violam a restrição de integralidade do material. Por sua vez, os pontos localizados na extremidade esquerda de cada conjunto de peso identificam o conjunto de pontos ótimos, ou seja, as estruturas que apresentam a menor magnitude de deslocamento vertical possível sem violar a restrição de falha do material. Tais pontos constituem o conjunto Ótimo de Pareto, que deve ser alvo da busca do algoritmo genético.

A partir da Tabela 6, constata-se que todas as configurações do laminado produzem ângulos de 90 graus em relação ao sistema de coordenadas do laminado, o que é coerente com a natureza ortotrópica do material e com as condições de contorno

Figura 30 – Curva peso-deslocamento para todas as estruturas possíveis.



impostas. Dado que as orientações das fibras são iguais, a ordem de laminação não afeta o resultado, ou seja, combinações também são pontos ótimos. Portanto, o AG deve ser capaz de localizar todos os 251 pontos listados na Tabela 6.

Tabela 6 – Conjunto de pontos ótimos.

Ponto	Configuração	Combinações	$w_0$ (mm)	Peso (N)
A	$[90_4^2]_S$	1	4,336	251,1
B	$[90^{1,5}/90_3^2]_S$	4	5,242	235,4
C	$[90^1/90_3^2]_S$ $[90_2^{1,5}/90_2^2]_S$	10	6,425	219,7
D	$[90^{0,75}/90_3^2]_S$	4	7,154	211,9
E	$[90^1/90^{1,5}/90_2^2]_S$ $[90_3^{1,5}/90^2]_S$	16	7,998	204,0
F	$[90^{0,75}/90^{1,5}/90_2^2]_S$ $[90^1/90_2^{1,5}/90^2]_S$	12	8,983	196,2
G	$[90_2^1/90_2^2]_S$ $[90_4^{1,5}]_S$	19	10,138	188,4
H	$[90^{0,75}/90_2^{1,5}/90_2]_S$ $[90^{0,75}/90^1/90_2^2]_S$	24	11,502	180,5
I	$[90_2^{0,75}/90_2^2]_S$ $[90^1/90_3^{1,5}]_S$	22	13,125	172,7

Continua na próxima página

Tabela 6 – continuação

Ponto	Configuração	Combinações	$w_0$ (mm)	Peso (N)
	$[90_2^1/90^{1,5}/90^2]$			
J	$[90^{0,75}/90_3^{1,5}]_S$ $[90^{0,75}/90^1/90^{1,5}/90^2]_S$ $[90^{0,75}/90^1/90^{1,5}/90^2]_S$	28	15,07	164,8
K	$[90_2^{0,75}/90^{1,5}/90^2]_S$ $[90_2^1/90_2^{1,5}]_S$ $[90_3^1/90^2]_S$	22	17,424	157,0
L	$[90^{0,75}/90_2^1/90^2]_S$ $[90^{0,75}/90^1/90_2^{1,5}]_S$	24	20,297	149,1
M	$[90_2^{0,75}/90_2^{1,5}]_S$ $[90_2^{0,75}/90^1/90^2]_S$ $[90_3^1/90^{1,5}]_S$	22	23,844	141,3
N	$[90^{0,75}/90_2^1/90^{1,5}]_S$ $[90_3^{0,75}/90^2]_S$	16	28,273	133,4
O	$[90_2^{0,75}/90_2^{1,5}]_S$ $[90_2^{0,75}/90^1/90^{1,5}]_S$ $[90_4^1]_S$	13	33,878	125,5
P	$[90^{0,75}/90_3^1]_S$ $[90_3^{0,75}/90^{1,5}]_S$	8	41,075	117,7
Q	$[90_2^{0,75}/90_2^1]_S$	6	50,474	109,9

### 4.2.3 Otimização

Conforme mencionado previamente, os AGs são fundamentados em regras randômicas, de modo que os resultados variam a cada execução do algoritmo. Com o objetivo de propiciar uma análise mais precisa dos resultados obtidos, foram realizadas 30 simulações, todas utilizando os parâmetros de otimização que estão detalhados na Tabela 7.

A fim de avaliar a confiabilidade da otimização, foi utilizado o critério de confiabilidade aparente [5]. Por meio dele, é possível encontrar as chances de se obterem as soluções ótimas em uma única execução do algoritmo. A determinação da confiabilidade aparente ( $R$ ) de um AG em determinado problema é estabelecida pela razão do número de otimizações que encontraram todos os pontos ótimos ( $N_o$ ) pela quantidade total de otimizações realizadas ( $n$ ) [5].

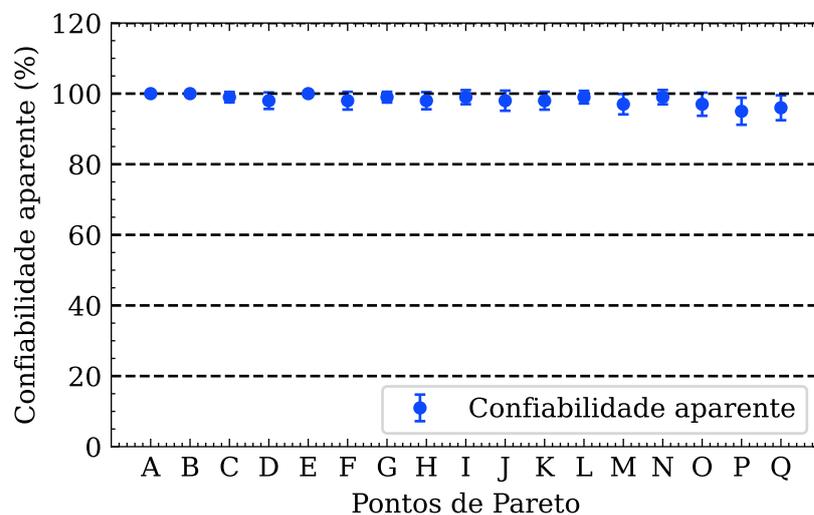
$$R = \frac{N_o}{n} \quad (4.1)$$

Como medida da precisão de  $R$ , obtida pela Equação 4.1, o desvio padrão é

Parâmetro	Valor
População inicial	256
População de descendentes	10
Tipo de <i>crossover</i>	Uniforme
Probabilidade de <i>Crossover</i>	100%
Probabilidade de Mutação	3%
Número máximo de gerações	200

Tabela 7 – Parâmetros do algoritmo genético.

Figura 31 – Confiabilidade aparente da otimização.



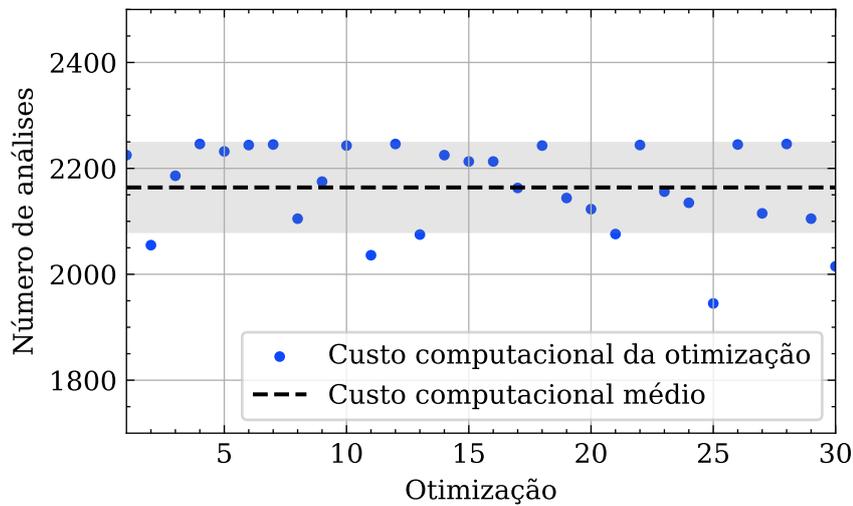
calculado de acordo com a seguinte equação:

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \quad (4.2)$$

A análise da confiabilidade aparente para todas as soluções presentes no Ótimo de Pareto é exibida na Fig. 31. Através desse gráfico, pode-se observar que os parâmetros empregados no AG são plenamente adequados, uma vez que, mesmo na situação mais desfavorável (representada pelo ponto **P**), há uma probabilidade superior a 95% de obter-se todas as combinações ótimas em uma única execução.

Um outro aspecto relevante a ser ponderado no processo de avaliação da eficácia de um AG é o custo computacional. No caso específico dos AGs voltados para a otimização de materiais laminados, torna-se necessária a realização da análise estrutural de cada indivíduo a fim de determinar sua aptidão. Nesse sentido, o custo computacional representa a quantidade média de análises exigidas para cada execução da otimização. A Fig. 32 ilustra o resultado obtido para essa análise.

Figura 32 – Custo computacional da otimização.



Através da análise realizada, é possível observar que, para se obter os 251 pontos mais eficientes em uma população total de 65.536 indivíduos (representando 0,38% do total), o AG necessitou analisar em média 2164 estruturas, o que corresponde a cerca de 3,3% da população total. Essa observação revela o potencial de busca do AG.

#### 4.2.4 Análise das Incertezas

Nesta seção são analisadas as formas de propagação das incertezas nos parâmetros da estrutura utilizando as técnicas apresentadas no Capítulo 3. As fontes de incerteza podem estar presentes em diferentes aspectos do projeto, como operacionais, de qualidade de produção ou intrínsecas a um material ou fenômeno. A quantidade de variabilidade pode variar de acordo com a exigência do projeto e com a capacidade de controlar os parâmetros por meio de equipamentos de produção e medição de dados.

Na metodologia utilizada neste estudo, em que as incertezas são modeladas como números *Fuzzy* e as análises de intervalos são realizadas por meio da otimização de Cortes- $\alpha$ , o intervalo de estudo de um determinado grau de pertinência não influencia os demais níveis, pois as otimizações são independentes. Portanto, mesmo que uma variabilidade seja considerada excessiva em um nível, os graus de pertinência superiores podem ser analisados de forma independente. A única precaução que deve ser observada é que todos os parâmetros de entrada de um mesmo Corte- $\alpha$  devem apresentar intervalos de variabilidade razoáveis entre si para que a análise seja válida em todos os níveis [6].

Os parâmetros de entrada que foram objetos de estudo são os ângulos de orientação das fibras, as espessuras das lâminas e o módulo de elasticidade longitudinal. Assume-se que a distribuição dessas incertezas existe dentro de uma zona de tolerância em relação aos seus valores nominais ou determinísticos. Por fim foi considerado o caso

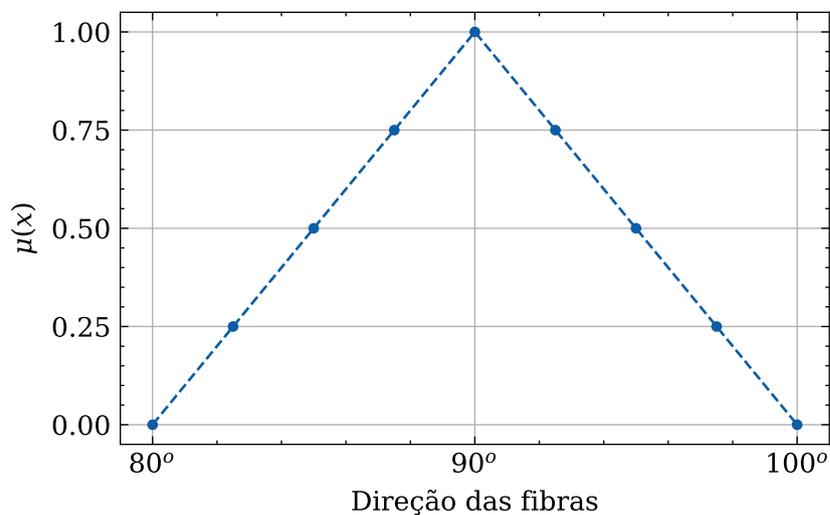
combinado, em que todos os parâmetros de entrada apresentam incertezas. A lista abaixo representa os casos que foram estudados:

1. Variação dos ângulos de orientação das fibras:  $\theta(\tilde{w}_a) = (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots \theta_i \dots \theta_l)_m$
2. Variação das espessuras:  $t_1(\tilde{w}_a) = (t_1 t_2 t_3 \dots t_i \dots t_l)_m$
3. Variação do módulo de elasticidade longitudinal:  $E_1(\tilde{w}_a) = (E_{1(1)} E_{1(2)} E_{1(3)} \dots E_{1(i)} \dots E_{1(l)})_m$ .

### Incerteza sobre o ângulo de orientação das fibras

Inicialmente, foi realizada a análise do caso em que as incertezas estão presentes no ângulo de direção das fibras, em que cada uma das oito camadas pode variar independentemente em seu respectivo intervalo de variabilidade. A função de pertinência para este problema foi definida em quatro graus, além do valor nominal, com pertinência igual a 1. Neste estudo, será considerada uma variação de  $\pm 10^\circ$  em torno do valor nominal do ângulo de direção das fibras. Dessa forma, cada lâmina apresenta um intervalo de variação de  $\pm 2,50^\circ$ ,  $\pm 5,00^\circ$ ,  $\pm 7,50^\circ$  e  $\pm 10,00^\circ$  para cada Corte- $\alpha$ , conforme ilustrado na Fig. 33.

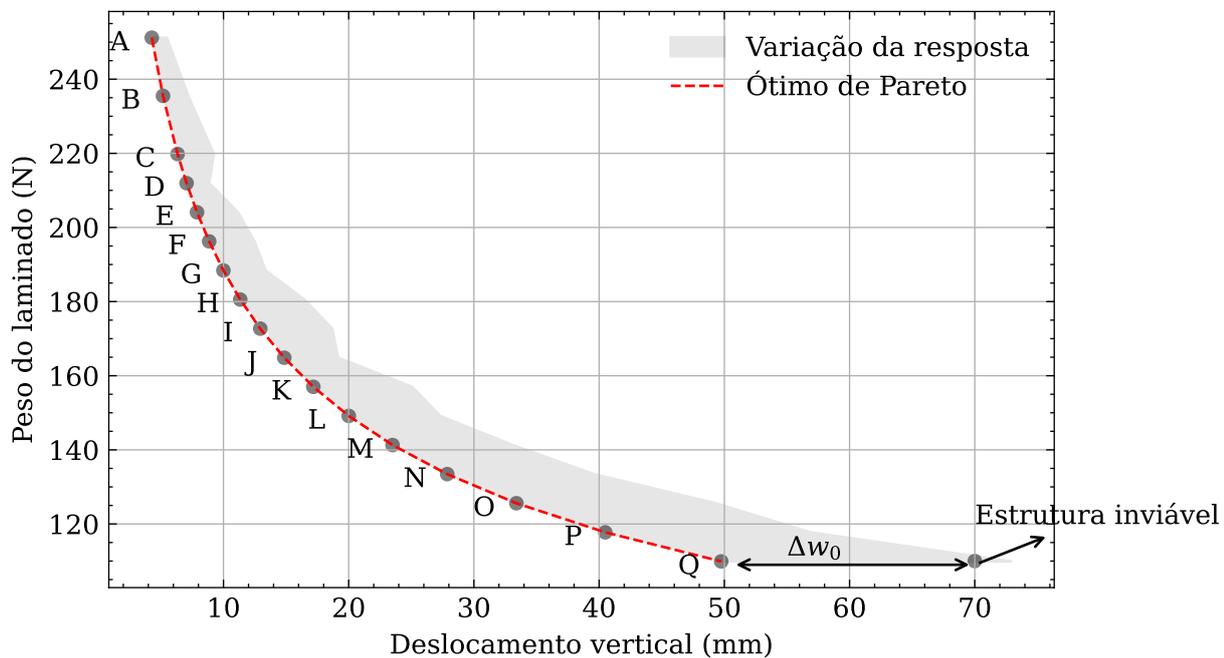
Figura 33 – Função de pertinência para uma lâmina de  $90^\circ$ .



Para a realização da análise, a simulação consistiu em fazer, para cada Corte- $\alpha$ , uma otimização com duas funções objetivos: uma minimizando e outra maximizando o deslocamento vertical da placa. A simulação foi repetida para todos os 251 pontos localizados no Ótimo de Pareto, conforme Tabela 6. Os resultados das simulações encontram-se apresentados na Fig. 34.

É possível se verificar que as variações nos ângulos resultaram em um aumento no deslocamento vertical máximo da placa, ou seja, qualquer desvio, tanto para cima, quanto para baixo, em relação ao ângulo de  $90^\circ$  tende a aumentar a deflexão da placa.

Figura 34 – Influência das incertezas sobre a deflexão da placa.



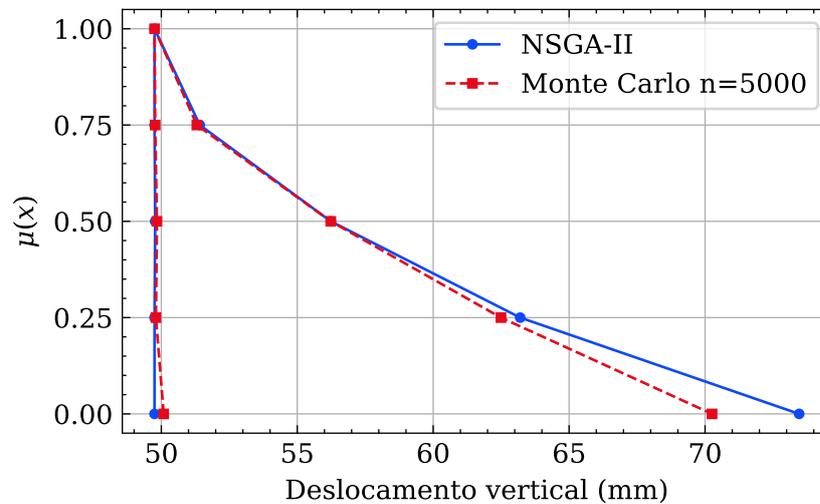
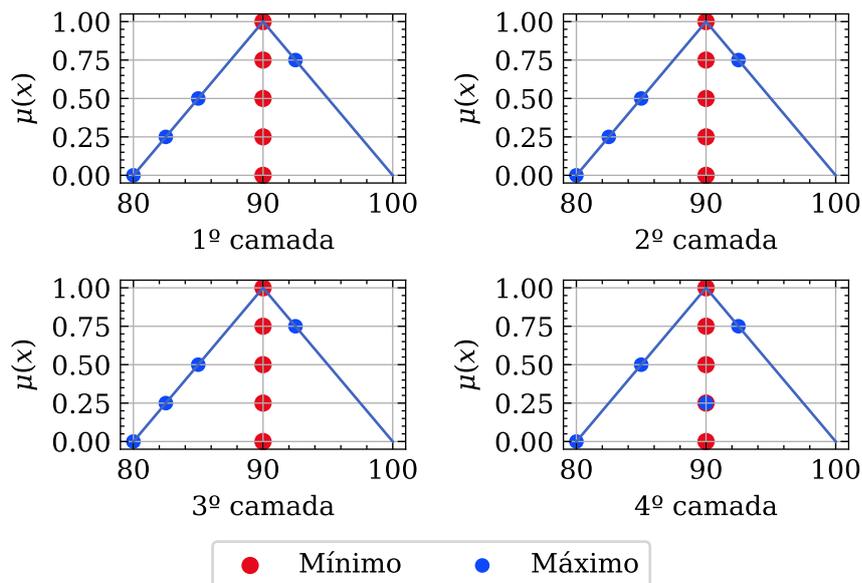
Fonte: Autor.

Novamente, tendo em vista o aspecto ortotrópico da placa e as condições de contorno impostas, este é um resultado esperado. Percebe-se ainda que a presença das variáveis incertas tem maior influência nas placas mais finas. Também deve ser notado que estruturas antes consideradas viáveis, passam a falhar na presença das incertezas aplicadas aos ângulos das fibras.

As respostas *Fuzzy* para o ponto **Q** são apresentadas na Fig. 35. A conclusão anterior relativa aos desvios dos ângulos também pode ser verificada nesta figura. Quando se tem uma reta vertical em uma das laterais de um número *Fuzzy*, a configuração nominal representa um dos extremos para diferentes Cortes- $\alpha$ . De outro modo, a configuração nominal de ângulos ( $90^\circ$ ) representa o mínimo deslocamento da estrutura. Além da busca pelos extremos realizada pelo NSGA-II, compara-se nesta figura o resultado obtido pelo método de Monte Carlo com 5000 simulações. Para efeito comparativo, o NSGA-II precisou realizar 225 avaliações e ainda assim foi mais eficaz na busca pelos extremos de resposta da estrutura.

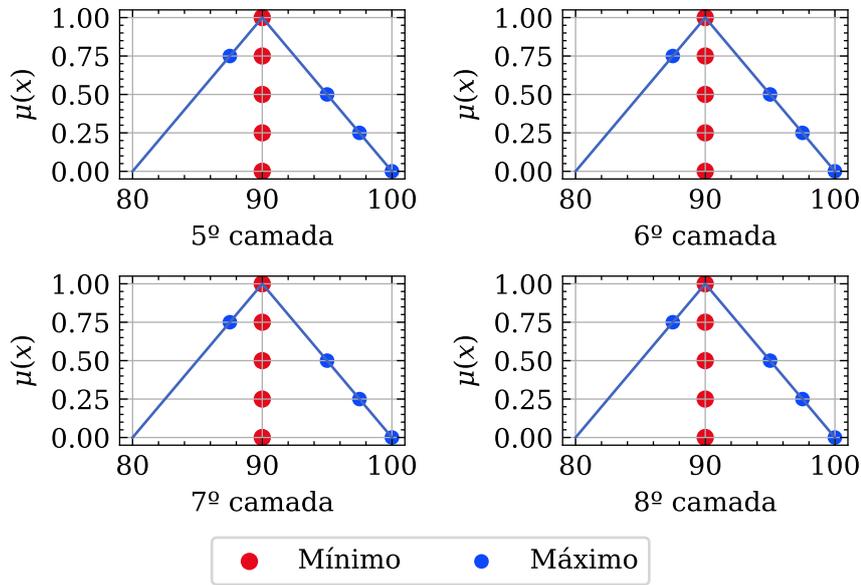
A otimização realizada no ponto **Q** resultou em duas configurações que apresentam o máximo e o mínimo deslocamento vertical da placa para cada Corte- $\alpha$ . A direção do ângulo para as camadas do laminado, para cada Corte- $\alpha$  está representada nas Figuras 36 e 37.

Analisando estas figuras, é possível verificar que a configuração de ângulos que

Figura 35 – Representação *Fuzzy* do deslocamento vertical do Ponto Q.Figura 36 – Entradas *Fuzzy* para cada corte- $\alpha$  aplicado ao Ponto Q (1<sup>o</sup> a 4<sup>o</sup> camadas)

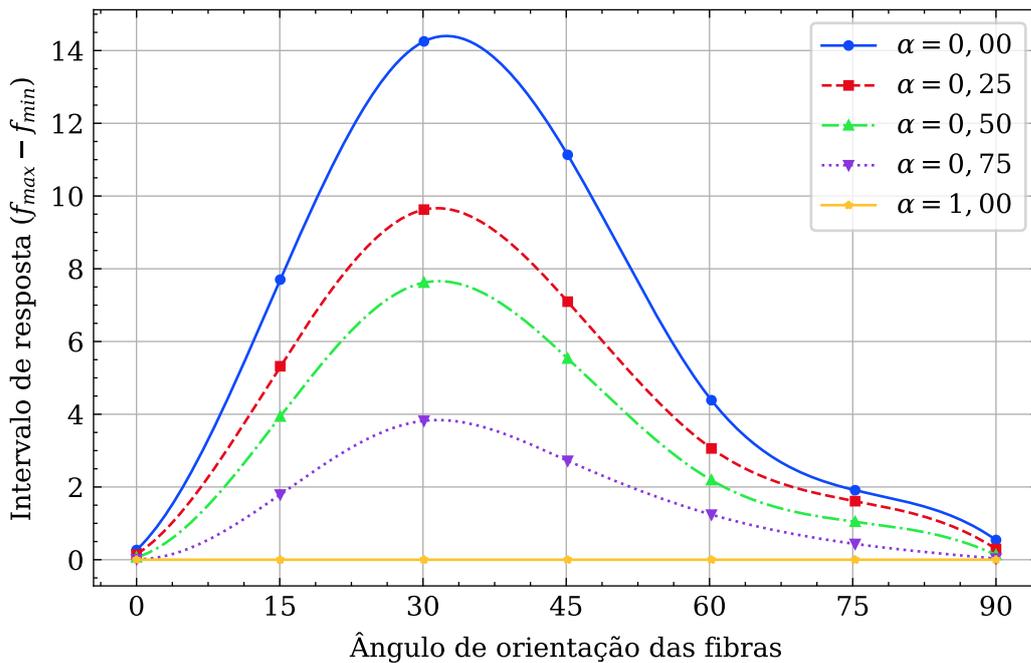
gerou o mínimo deslocamento vertical, confirmou o resultado esperado para o problema, ou seja,  $90^\circ$ . Nota-se, também, que a configuração para os Cortes- $\alpha$ , com  $\alpha = 0,75$ ,  $\alpha = 0,50$  e  $\alpha = 0,00$ , que gerou os maiores deslocamentos encontra-se nos extremos dos intervalos. Esse comportamento, porém, não se repete para o corte- $\alpha = 0,25$ , da quarta camada. Ângulos de  $90^\circ$  tendem a reforçar o laminado no sentido do deslocamento vertical, dessa forma conclui-se que o ponto em questão não está otimizado, ou seja, a busca realizada pelo algoritmo genético não conseguiu encontrar o ponto ótimo. Essa conclusão destaca o caráter probabilístico dos algoritmos genéticos, ou seja, não há garantia da obtenção da solução ótima em qualquer otimização realizada. Ao contrário disso, o que existe é uma certa probabilidade de convergência ao melhor resultado.

Figura 37 – Entradas *Fuzzy* para cada corte- $\alpha$  aplicado ao Ponto **Q** (5<sup>o</sup> a 8<sup>o</sup> camadas).



Outra análise possível de ser realizada é sobre o estudo que a inclusão de incertezas possui sobre diferentes ângulos nominais. Para isso, a configuração do ponto **A** foi utilizada, substituindo-se o ângulo nominal de 90<sup>o</sup> por diferentes valores. Na Fig. 38 é possível verificar o intervalo de variação para cada ângulo nominal e os diferentes graus de pertinência.

Figura 38 – Intervalo de resposta para diferentes orientação das fibras para a configuração do Ponto A.

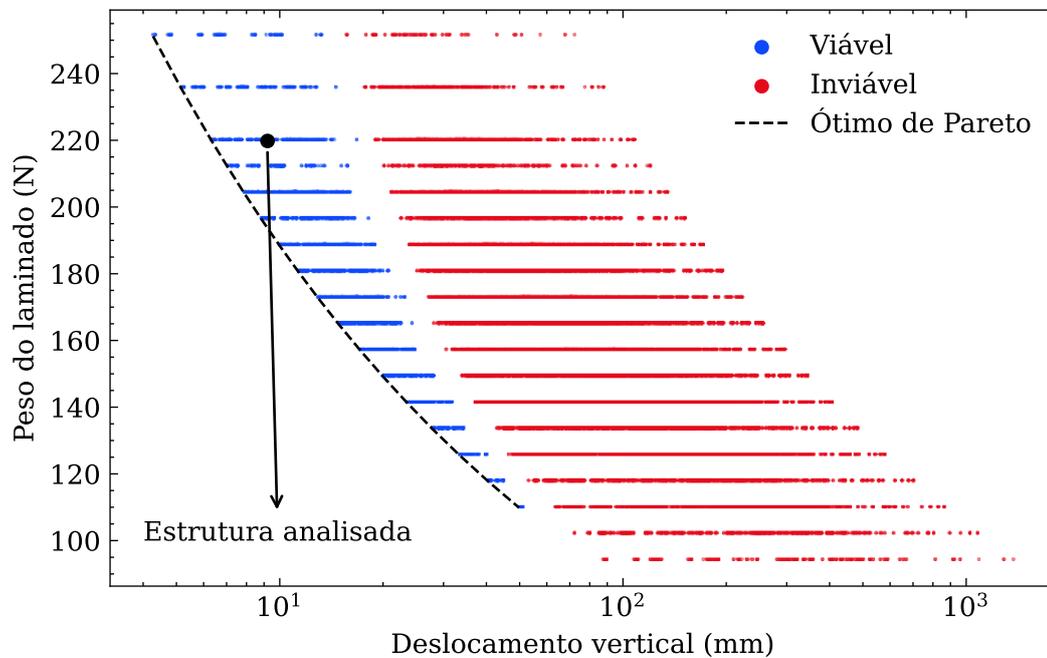


Conforme pode ser observado, o maior intervalo de resposta, ou seja, a diferença

entre o maior e o menor deslocamento vertical, se dá nos corte- $\alpha = 0$  e o menor intervalo no corte- $\alpha = 1$ . Em relação aos ângulos, verifica-se que o intervalo de saída aumenta à medida em que os ângulos de orientação das fibras aumentam de  $\theta = 0^\circ$  a  $\theta = 30^\circ$  graus e, posteriormente, diminuem quando os ângulos de orientação das camadas aumentam de  $\theta = 30^\circ$  a  $\theta = 90^\circ$  graus, independentemente do corte- $\alpha$ . Esse comportamento pode ser atribuído à variação da matriz de rigidez de membrana e da matriz de acoplamento membrana-flexão.

Utilizando a mesma metodologia, passou-se a verificar a influência que as variações dos ângulos das fibras exercem sobre as tensões presentes na placa. Para essa análise, foi utilizada a estrutura representada na Fig. 39.

Figura 39 – Indicação da estrutura a ser analisada.



Essa estrutura possui as seguintes propriedades:

**Configuração dos ângulos:**  $[90^\circ / -45^\circ / 0^\circ / 45^\circ]_S$

**Espessuras:**  $[2.00\text{mm} / 2.00\text{mm} / 2.00\text{mm} / 1.00\text{mm}]$

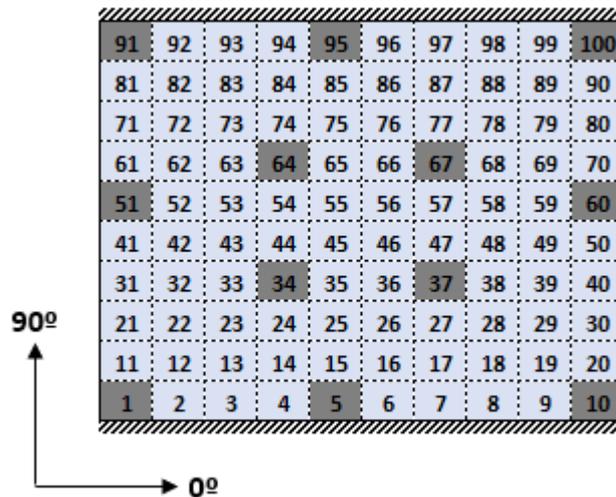
**Peso do laminado:** 219.8N

**Deslocamento vertical nominal:** 9.21mm

As tensões foram calculadas na face inferior da placa nos pontos indicados na Fig. 40. A variação de ângulos para este estudo será na ordem de  $\pm 5^\circ$ , conforme padrão da indústria de compósitos [11].

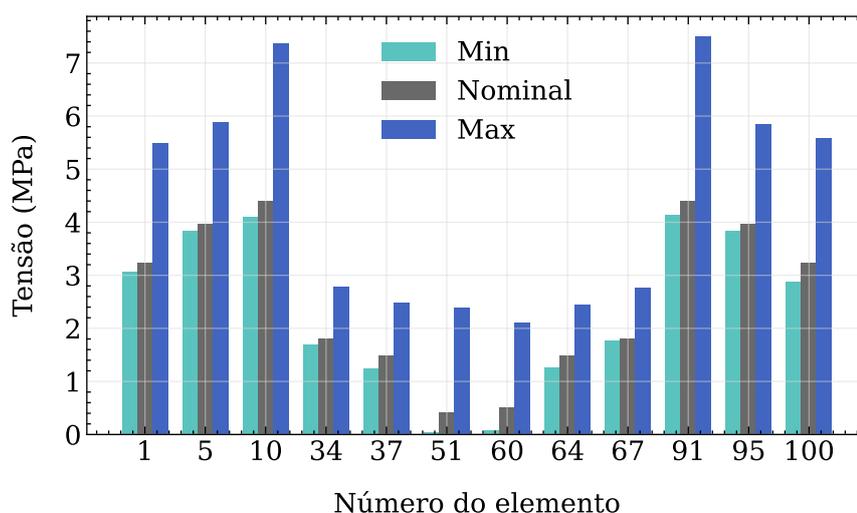
A Fig. 41 apresenta as tensões  $\sigma_{xx}$  mínimas, máximas e o valor nominal

Figura 40 – Malha de elementos finitos com indicação dos pontos de integração onde foram calculados as tensões.



resultantes da otimização por cortes- $\alpha$ . Conforme pode ser visto nesta figura, a inserção das incertezas influencia a resposta da placa de forma diferente, dependendo do ponto considerado. A variação de ângulos na ordem de  $\pm 5^\circ$  produziu tensões em média 8,99% menores (variando de -3,32% a -85,39%) para o extremo inferior de resposta e 71,44% maiores (variando de 47,32% a 465,71%) para o extremo superior de resposta em relação à média dos valores nominais de tensão.

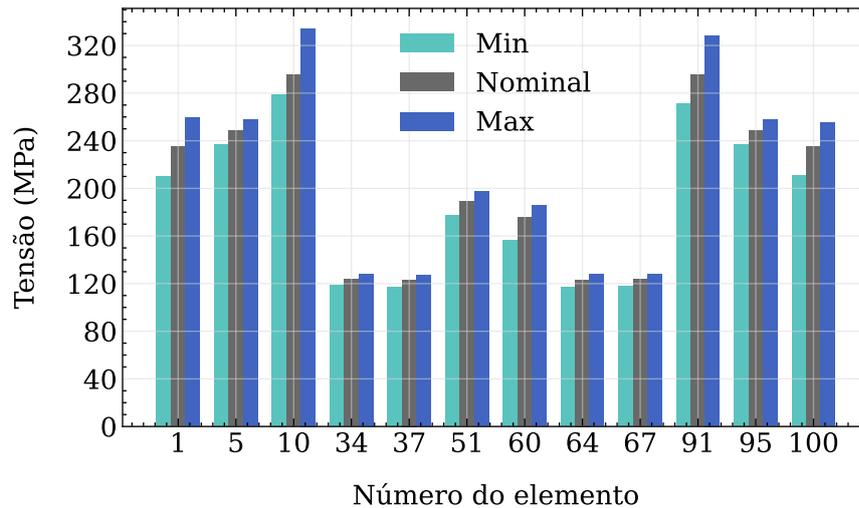
Figura 41 – Tensões  $\sigma_{XX}$  de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior.



Da mesma forma que a figura anterior, a Fig. 42 apresenta as tensões  $\sigma_{yy}$  mínimas, máximas e o valor nominal resultantes da otimização por cortes- $\alpha$ . Neste caso, a inserção das incertezas teve muito menos influência nas tensões calculados e os desvios foram muito mais simétricos, produzindo valores em média 6,91% menores (variando de

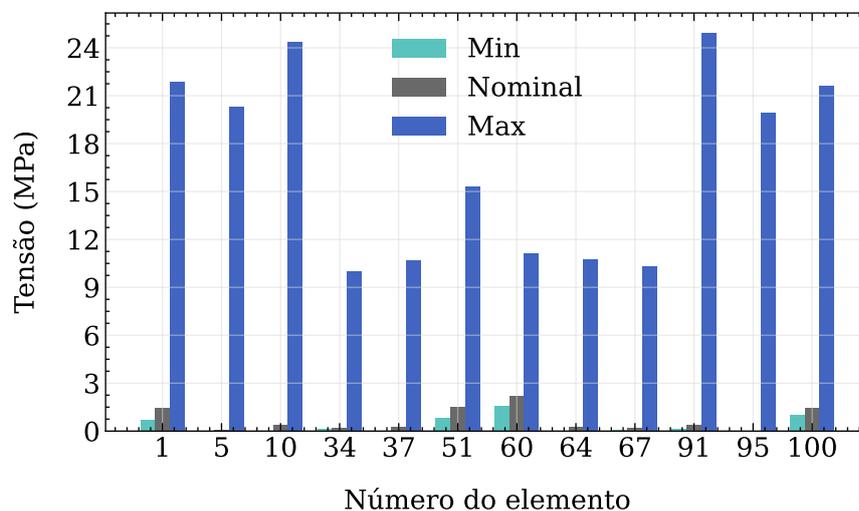
-4,2% a -10,98%) para o extremo inferior de resposta e 7,04% maiores (variando de 3,14% a 11,15%) para o extremo superior de resposta em relação à média dos valores nominais de tensão.

Figura 42 – Tensões  $\sigma_{YY}$  de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior.



Por fim, as tensões de cisalhamento foram fortemente influenciadas pelas variações nos ângulos das fibras, conforme pode ser verificado na Fig. 43. Enquanto os valores nominais e mínimos ficaram próximo de zero, o intervalo extremo superior apresentou valores muito superiores para todos os pontos considerados.

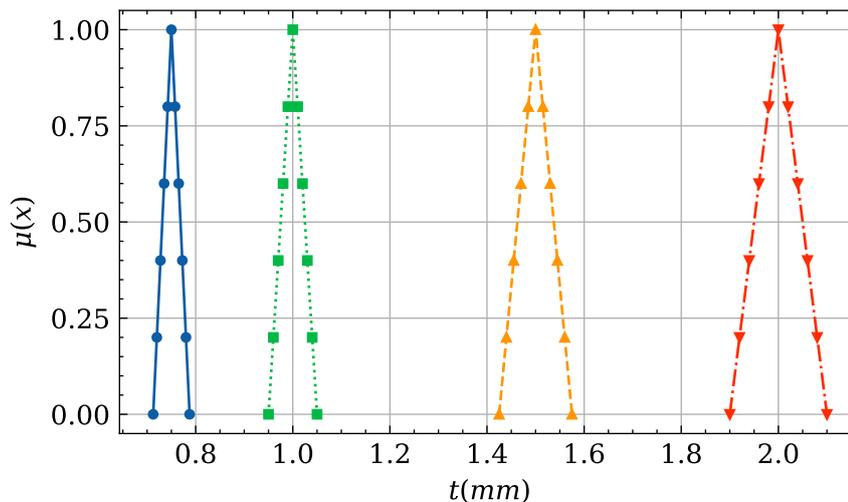
Figura 43 – Tensões de cisalhamento de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior.



### Incertezas sobre a espessura das lâminas

O próximo caso constitui em quantificar as respostas da estrutura quanto às incertezas nas espessuras das lâminas que formam o laminado em questão. Da mesma forma que o primeiro caso, cada uma das oito camadas pode ter sua espessura variando independentemente. A Fig. 44 apresenta a função de pertinência para o caso considerado.

Figura 44 – Função de pertinência para as incertezas nas espessuras das lâminas.



A função de pertinência desse problema foi definida em quatro graus, além do valor nominal, com pertinência igual a 1. Para este estudo, uma variação de  $\pm 5\%$  foi considerada em torno do valor nominal de cada valor de espessura.

A resposta da placa às incertezas nas espessuras das lâminas é apresentada na Fig. 45. Aqui, o peso do laminado foi mantido igual ao seu valor nominal, uma vez que a própria variação na espessura das lâminas causa variações do seu próprio peso.

Nota-se que a otimização dos Cortes- $\alpha$  produziu dois extremos de saída em relação ao valor nominal. Além dessa constatação, é possível verificar a simetria na resposta em relação ao valor nominal. Como no primeiro caso, estruturas mais finas são mais suscetíveis às variações nos parâmetros de entrada.

As respostas *Fuzzy* para diversos pontos são apresentadas na Fig. 46. Pode ser verificado que as funções de pertinência de resposta assemelham-se a função de pertinência das variações das espessuras, ou seja, a de um triângulo simétrico. Esse resultado contrasta com o primeiro caso, em que a função de pertinência de saída possuía uma reta vertical no lado esquerdo.

A variação de 5% ( $\alpha = 0$ ) nos valores nominais de espessura para as estruturas representadas resultaram em um deslocamento médio 9,88% menor (variando de -8,07% a -10,42%) para o extremo inferior de resposta e 11,69% maior (variando de 6,58% a 13,52%)

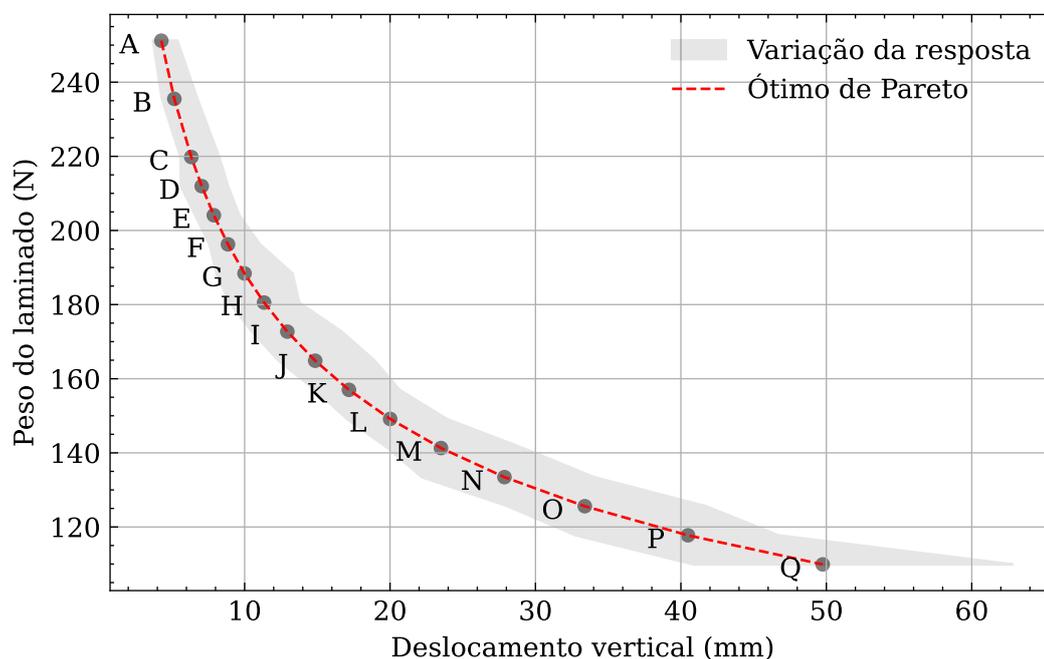
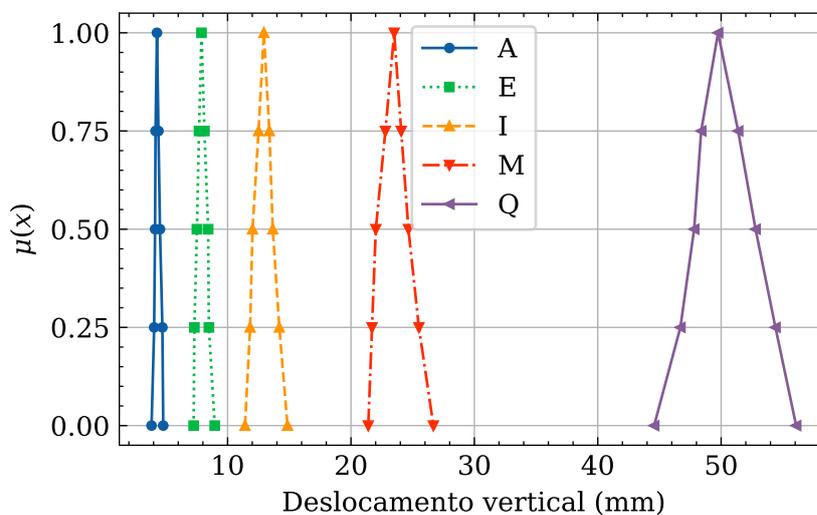
Figura 45 – Resposta da placa para variações nas espessuras das lâminas ( $\alpha = 0.00$ ).

Figura 46 – Função de pertinência de saída para diversas estruturas.

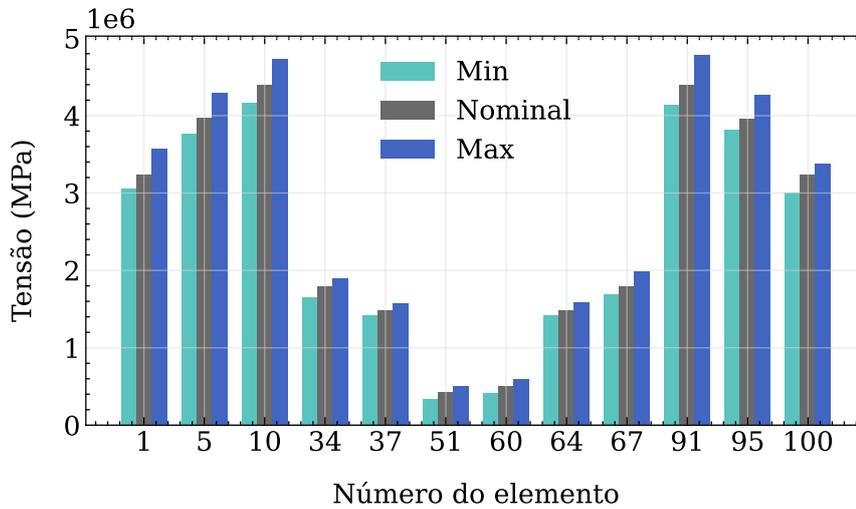


para o extremo superior em relação ao deslocamento nominal. É possível concluir, portanto, que incertezas relativas a este parâmetro (espessura), produzem variações proporcionais no deslocamento vertical das estruturas.

Continuando-se as análises observa-se que a Fig. 47 apresenta as tensões  $\sigma_{xx}$  mínimas, máximas e o valor nominal resultantes da otimização por Cortes- $\alpha$ . Conforme pode ser visto, a inserção das incertezas influencia a resposta da placa de forma diferente, dependendo do ponto considerado.

Variações de espessuras da ordem de  $\pm 5\%$  produziram tensões em média 7,36%

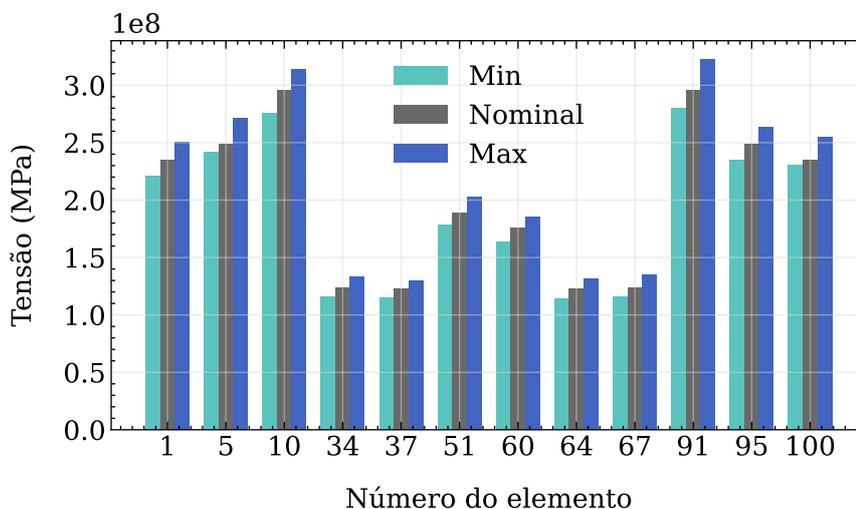
Figura 47 – Tensões  $\sigma_{XX}$  de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior.



menores (variando de -7,68% a -1,40%) para o extremo inferior de resposta e 9,80% maiores (variando de 1,61% a 9,06%) para o extremo superior de resposta em relação aos valores nominais de tensão.

Da mesma forma que a figura anterior, a Fig. 48 apresenta as tensões  $\sigma_{yy}$  mínimas, máximas e o valor nominal resultantes da otimização por Cortes- $\alpha$ . Neste caso, a inserção das incertezas produziu valores em média 6,24% menores (variando de -7,82% a -5,09%) para o extremo inferior de resposta e 6,30% maiores (variando de 3,48% a 8,22%) para o extremo superior de resposta em relação aos valores nominais de tensão.

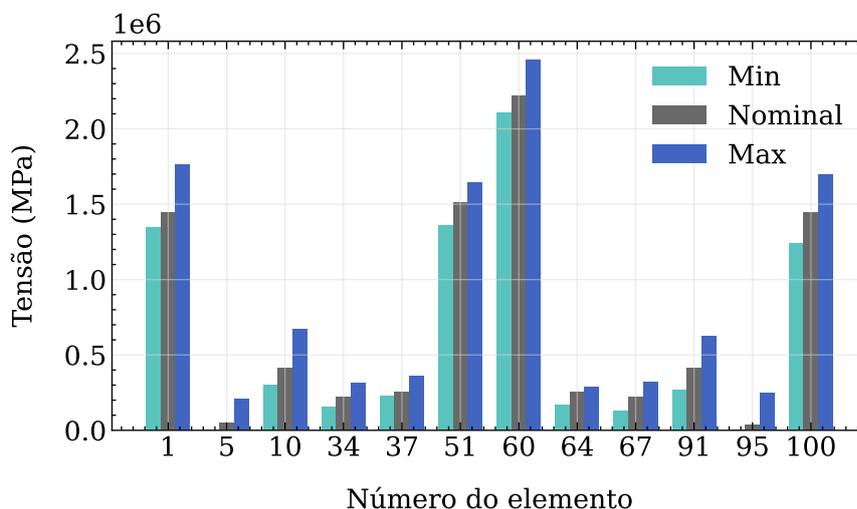
Figura 48 – Tensões  $\sigma_{YY}$  de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior.



Por fim, as incertezas produziram tensões de cisalhamento em média 31,03% menores (variando de -81,78% a -5,87%) para extremo inferior de resposta e 103,3% maiores

(variando de 8,05% a 514%) para o extremo superior de resposta. Os resultados para essa análise constam na Fig. 49.

Figura 49 – Tensões de cisalhamento de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior.



Pelos resultados obtidos, conclui-se que incertezas nas espessuras das lâminas geram respostas proporcionais as variações de espessuras nas tensões  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$ , enquanto tendem a produzir tensões de cisalhamento maiores em relação aos valores nominais.

### Incerteza sobre o módulo de elasticidade longitudinal

O próximo caso constitui-se em quantificar as respostas da estrutura quando o módulo de elasticidade longitudinal  $E_1$  apresenta variabilidades em seu valor nominal. Da mesma forma que nos outros casos, cada uma das oito camadas pode ter seu módulo de elasticidade variando independentemente. A função de pertinência desse problema foi definida em quatro graus, além do valor nominal, com pertinência igual a 1. Para este caso, uma variação de  $\pm 10\%$  serão consideradas em torno do valor nominal do módulo de elasticidade. A Fig. 50 apresenta a função de pertinência para o valor nominal de 181GPa.

A resposta da placa às incertezas é apresentada na 51. Nota-se que as incertezas geraram valores de deslocamentos simétricos em relação ao valor obtido através dos parâmetros nominais e menores em relação às incertezas nos ângulos e nas espessuras.

A resposta *Fuzzy* para o ponto **Q** são apresentadas na Fig. 52. A estrutura apresenta o mesmo comportamento em relação às incertezas nos dados de entrada, ou seja, um triângulo simétrico. É possível verificar ainda, que uma variação de 10% no módulo de elasticidade longitudinal resulta em aproximadamente 11% de desvio em relação ao deslocamento nominal da placa. Para efeitos de comparação, as incertezas na

Figura 50 – Função de pertinência para o módulo de elasticidade longitudinal.

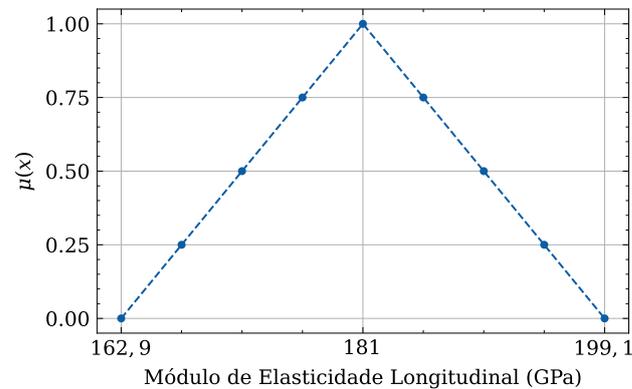
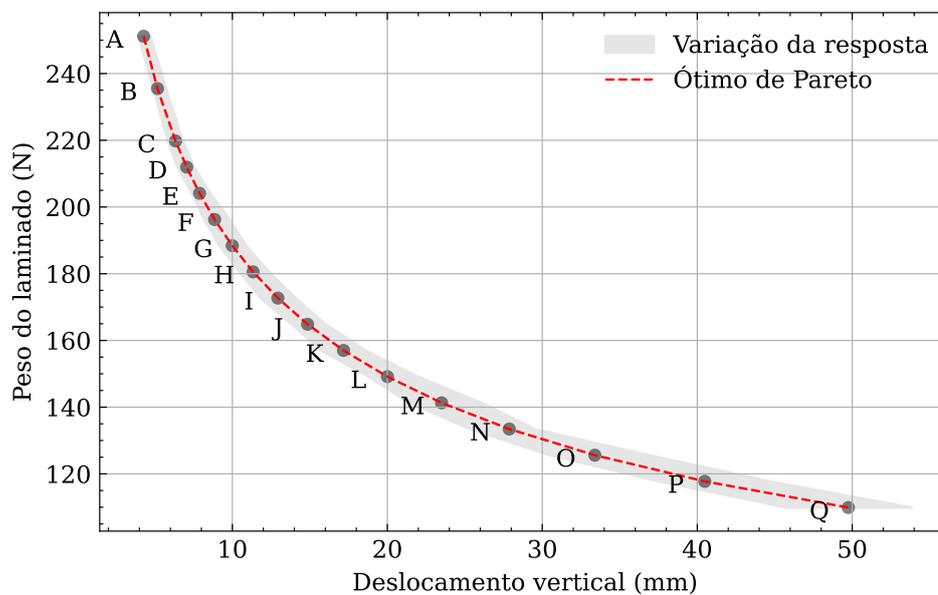


Figura 51 – Influência das incertezas sobre a deflexão da placa.

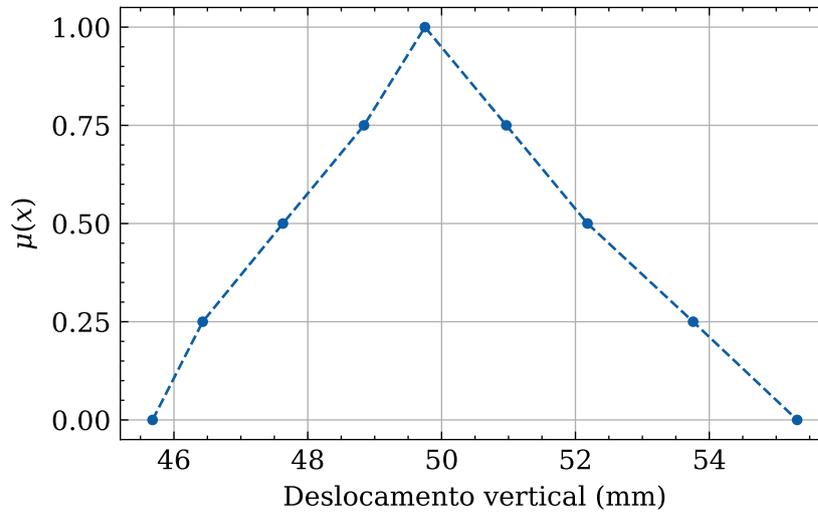
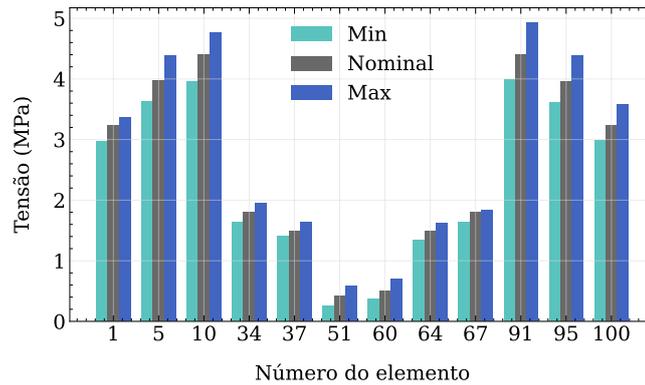


direção dos ângulos das fibras e nas espessuras das lâminas geraram 48% e 26% de desvio, respectivamente.

Os resultados apresentados nas Figuras 51 e 52 se complementam e mostram que a resposta da estrutura a variações neste parâmetro é aproximadamente linear em relação aos desvios em seus valores nominais.

Continuando a análise, vemos que a Fig. 53 apresenta as tensões  $\sigma_{xx}$  mínimas, máximas e o valor nominal resultantes da otimização por Cortes- $\alpha$ . Conforme pode ser visto nesta figura, a inserção das incertezas influencia a resposta da placa de forma diferente, dependendo do ponto considerado. A variação do módulo de elasticidade longitudinal na ordem de  $\pm 10\%$  produziram tensões em média 12,29% menores (variando de -37,4% a -6,81%) para o extremo inferior de resposta e 11,34% maiores (variando de 3,11% a 23,74%) para o extremo superior de resposta em relação aos valores nominais de tensão.

Figura 52 – Função de pertinência de saída para o Ponto Q.

Figura 53 – Tensões  $\sigma_{XX}$  de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior.

Da mesma forma que a figura anterior, a Fig. 54 apresenta as tensões  $\sigma_{yy}$  mínimas, máximas e o valor nominal resultantes da otimização por cortes- $\alpha$ . Neste caso, a inserção das incertezas teve muito menos influência nas tensões calculadas e os desvios foram muito mais simétricos, produzindo valores em média 4,81% menores (variando de -5,89% a -2,32%) para o extremo inferior de resposta e 4,03% maiores (variando de 2,40% a 5,28%) para o extremo superior de resposta em relação aos valores nominais de tensão.

Por fim, as tensões de cisalhamento foram fortemente influenciadas pelas variações no módulo de elasticidade longitudinal, conforme pode ser verificado na Fig. 55. Neste caso, a inserção das incertezas produziu valores em média 55,63% menores (variando de -93,42% a -5,25%) para o extremo inferior de resposta e 150,61% maiores (variando de 20,3% a 861,18%) para o extremo superior de resposta em relação aos valores nominais de tensão.

As Tabelas 8 e 9, apresentam os extremos das respostas em relação as tensões  $\sigma_{xx}$

Figura 54 – Tensões  $\sigma_{YY}$  de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior.

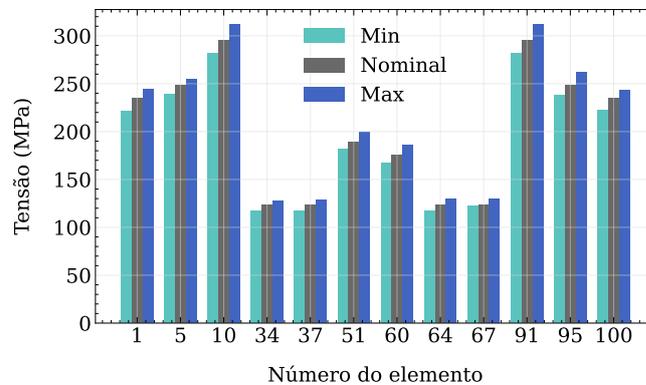
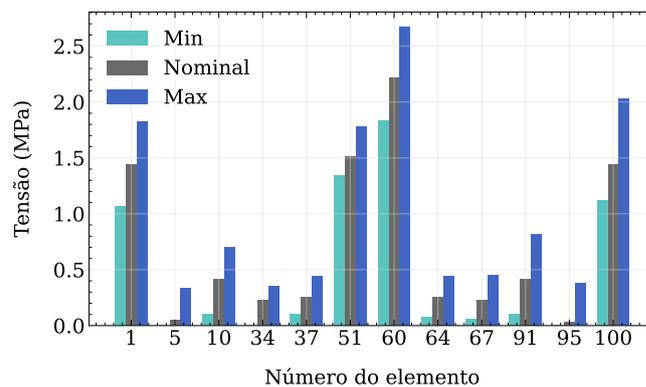


Figura 55 – Tensões de cisalhamento de saída em função das variações nos ângulos das fibras para a lâmina inferior.



e  $\sigma_{yy}$  respectivamente para os três casos considerados neste estudo em diversos elementos da placa.

As informações apresentadas nestas tabelas oferecem uma visão detalhada de como as incertezas nos dados de entrada se propagam pela estrutura e como essas incertezas influenciam as tensões a que estão submetidas as diversas partes da estrutura. Essas informações podem ser utilizadas, ainda na fase do projeto, no sentido de fortalecer determinadas partes da estrutura, ou ainda para verificar quais parâmetros devem ter suas variabilidades e incertezas controladas de forma mais intensiva.

### Incertezas combinadas

Por fim, as incertezas analisadas anteriormente (ângulos de orientação das fibras, espessura das lâminas e o módulo de elasticidade longitudinal) combinadas são objetos de análise. Novamente, cada uma das oito camadas pode variar independentemente em relação aos parâmetros incertos. Têm-se, dessa forma, 24 variáveis que são otimizadas simultaneamente. As funções de pertinência desta análise foram as mesmas das análises

Elemento	Ângulos	Espessuras	Módulo de Elasticidade
1	[-5,23% / +69,56%]	[-4,74% / +8,70%]	[-9,53% / +9,30%]
5	[-3,54% / +47,90%]	[-6,25% / +6,61%]	[-8,12% / +9,23%]
10	[-6,69% / +67,43%]	[-6,35% / +6,70%]	[-9,92% / +11,85%]
34	[-5,25% / +54,89%]	[-3,52% / +6,99%]	[-7,52% / +8,37%]
37	[-16,44% / +67,01%]	[-4,32% / +9,06%]	[-8,70% / +7,12%]
51	[-88,42% / +465,71%]	[-2,03% / +29,74%]	[-30,20% / +46,20%]
60	[-85,39% / +316,51%]	[-14,06% / +16,10%]	[-30,12% / +16,46%]
64	[-15,83% / +64,55%]	[-6,49% / +7,14%]	[-9,43% / +9,09%]
67	[-1,30% / +53,81%]	[-7,29% / +4,37%]	[-6,92% / +10,96%]
91	[-5,75% / +70,66%]	[-4,55% / +6,98%]	[-9,81% / +9,07%]
95	[-3,32% / +47,33%]	[-2,79% / +6,29%]	[-8,19% / +10,75%]
100	[-11,38% / +72,65%]	[-7,68% / +8,94%]	[-8,24% / +9,91%]
<b>Média</b>	[-20,71% / +116,51%]	[-7,36% / +9,81%]	[-11,22% / +13,96%]

Tabela 8 – Extremos de respostas para as tensões  $\sigma_{xx}$  para os diversos elementos da placa.

Elemento	Ângulos	Espessuras	Módulo de Elasticidade
1	[-10,55% / +10,35%]	[-6,84% / +6,40%]	[-4,52% / +5,38%]
5	[-4,54% / +3,60%]	[-5,22% / +7,63%]	[-5,29% / +5,01%]
10	[-5,58% / +13,20%]	[-6,44% / +8,22%]	[-2,70% / +5,28%]
34	[-4,20% / +3,60%]	[-6,77% / +5,35%]	[-5,01% / +5,00%]
37	[-4,91% / +3,14%]	[-5,09% / +7,02%]	[-4,76% / +5,15%]
51	[-6,16% / +4,40%]	[-6,11% / +7,48%]	[-3,65% / +5,12%]
60	[-10,98% / +5,41%]	[-5,68% / +7,94%]	[-3,28% / +4,96%]
64	[-5,06% / +3,94%]	[-7,18% / +3,48%]	[-4,11% / +3,56%]
67	[-4,74% / +3,33%]	[-5,57% / +6,39%]	[-4,34% / +4,08%]
91	[-8,14% / +11,15%]	[-6,68% / +3,69%]	[-2,93% / +5,25%]
95	[-4,81% / +3,72%]	[-7,82% / +6,93%]	[-5,26% / +3,64%]
100	[-10,20% / +8,72%]	[-5,49% / +5,08%]	[-5,28% / +6,03%]
<b>Média</b>	[-20,71% / +116,51%]	[-6,24% / +6,30%]	[-4,26% / +4,87%]

Tabela 9 – Extremos de resposta para as tensões  $\sigma_{xx}$  para os diversos elementos da placa.

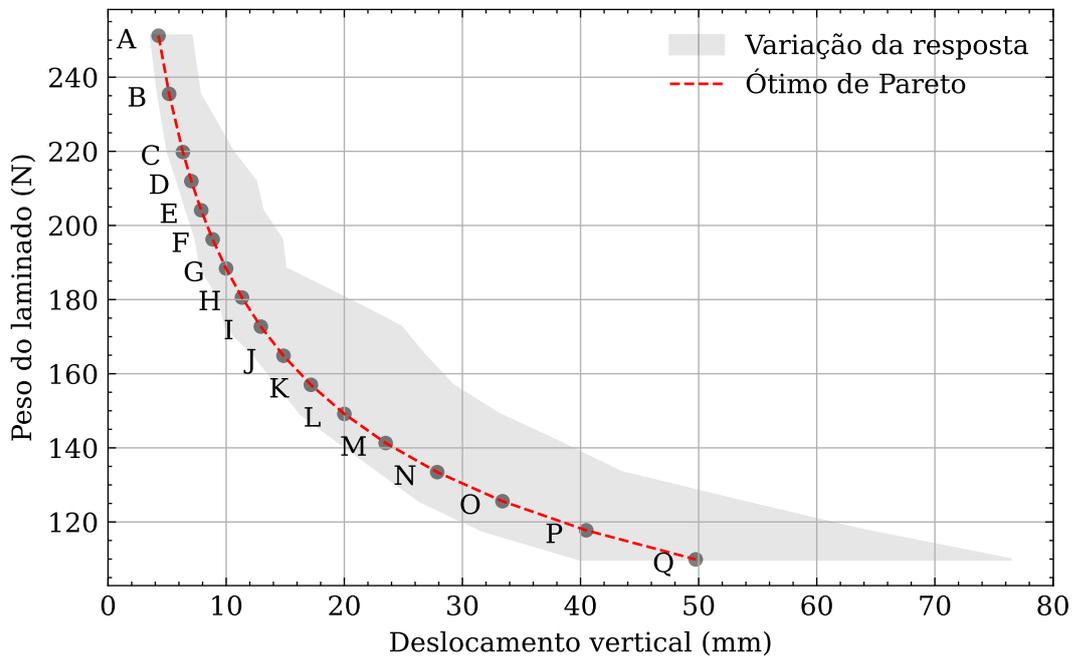
anteriores (Figuras 33, 44 e 50).

A Fig. 56 apresenta o intervalo de resposta para as diversas estruturas pertencentes ao Ótimo de Pareto.

Pode ser verificado por esta figura que existe uma assimetria nos intervalos de resposta no sentido de se produzir maiores deslocamentos verticais, ou seja, as incertezas combinadas tendem a fragilizar a estrutura.

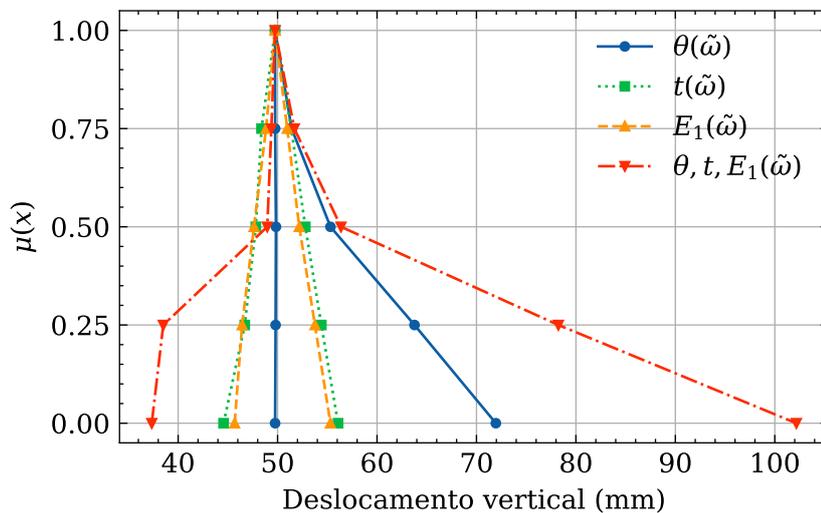
A resposta *Fuzzy* para o ponto **Q** é apresentada na Fig. 57. Nesta figura estão

Figura 56 – Influência das incertezas sobre a deflexão da placa.



representadas as saídas *Fuzzy* dos parâmetros incertos individualmente assim como para o caso das incertezas combinadas.

Figura 57 – Função de pertinência de saída para o Ponto Q.



## 5 CONCLUSÕES

Alinhado com a tendência atual em aprimorar materiais para aplicações de alto desempenho, neste trabalho foram desenvolvidos uma metodologia e um programa computacional capazes de auxiliar um projeto de estruturas que envolvam materiais compósitos. Utilizando técnicas de inteligência artificial e elaborando um programa especializado em análise estrutural, construiu-se uma ferramenta capaz de otimizar as propriedades dos compósitos e fornecer informações sobre as respostas das estruturas otimizadas na presença de dados incertos de entrada. Esta ferramenta foi construída de forma a torná-la extremamente robusta e flexível, podendo abordar diversos tipos de problemas, manipular uma ampla gama de variáveis, lidar simultaneamente com múltiplos objetivos e analisar estruturas complexas utilizando o método de elementos finitos.

Inicialmente, foi desenvolvido o Programa de Análise Estrutural (PAE) baseado no método de elementos finitos e na Teoria de Placa Laminada por Deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem. Essa combinação foi escolhida devido à necessidade de realizar um grande número de análises pelos algoritmos de otimização, resultando em um equilíbrio favorável entre a precisão dos resultados e a eficiência computacional. As diversas capacidades do programa foram testadas e aprovadas por meio de comparações com exemplos encontrados na literatura.

Os resultados obtidos pelo PAE foram comparados com trabalhos já publicados e foram realizados estudos para avaliar os deslocamentos e tensões apresentados pelas estruturas quando submetidas a forças externas, tanto em casos lineares como em casos com grandes deslocamentos e não-linearidades. Os resultados obtidos foram confrontados com outros métodos, entre eles o método fechado de Navier baseado na Teoria da Deformação Cisalhante de Terceira Ordem - third-order shear deformation theory (TSDT) e a Teoria de Deformação de Cisalhamento Hiperbólico Inverso - inverse hyperbolic shear deformation (IHSDT), conhecidos pela boa precisão de seus resultados. Os valores de deslocamentos obtidos pelo programa apresentaram um desvio médio de apenas 1,22% em relação aos valores da literatura, sendo que tal desvio tende a ser ainda menor em placas mais delgadas e compostas por um maior número de camadas. Em relação as tensões, a diferença média foi menor que 1%. Concluiu-se, portanto, que o modelo desenvolvido demonstra uma excelente precisão em relação aos deslocamentos e tensões sofridas pelas estruturas, especialmente para placas finas e formadas por um grande número de lâminas.

Um algoritmo de otimização utilizando AG foi configurado para identificar as estruturas que apresentavam o menor peso e o menor deslocamento vertical de uma placa formada por oito lâminas simétricas e sujeita a um carregamento transversal de pressão. O

espaço de pesquisa foi definido em quatro ângulos e quatro espessuras possíveis para cada lâmina, resultando em um total de 65.536 combinações possíveis para o laminado. A análise de todas as estruturas revelou a existência de 251 estruturas ótimas, formando o conjunto conhecido como Ótimo de Pareto. O AG demonstrou uma probabilidade superior a 95% de encontrar todas as combinações ótimas em uma única execução, além de apresentar um excelente desempenho computacional. Para identificar os 251 pontos mais eficientes em uma população total de 65.536 indivíduos (representando 0,38% do total), o AG analisou, em média, 2164 estruturas, o que corresponde a aproximadamente 3,3% da população total. Foi empregado o *framework pymoo*, uma biblioteca de otimização multiobjetivo de código aberto escrita em *Python*. As implementações da biblioteca são personalizáveis e os algoritmos podem ser modificados/estendidos fornecendo operadores personalizados, se adequando, desta maneira, às necessidades deste trabalho.

Por fim, a quantificação das incertezas foi realizada utilizando a metodologia de Cortes- $\alpha$  em conjunto com o algoritmo NSGA-II, com o objetivo de explorar combinações de variáveis que resultassem nos pontos de saída mais extremos. Três casos foram apresentados, nos quais as incertezas estavam relacionadas ao ângulo de orientação das fibras, à espessura das lâminas e ao módulo de elasticidade longitudinal, além do caso combinado. Duas variáveis de saída, o deslocamento do ponto central e as tensões em diferentes elementos da placa, foram analisadas. Funções triangulares foram utilizadas para representar o conhecimento sobre as incertezas nos dados de entrada. A metodologia de Cortes- $\alpha$  foi aplicada aos 251 pontos pertencentes ao Ótimo de Pareto, demonstrando como a consideração das incertezas pode afetar os resultados de uma otimização multiobjetivo. Além disso, foi mostrado como é possível utilizar essa metodologia para obter informações sobre o comportamento de diferentes estruturas. A forma de codificação das incertezas desenvolvida neste trabalho, no contexto do algoritmo genético, resultou em uma redução significativa do custo computacional de busca, ao mesmo tempo em que proporcionou maior flexibilidade ao método.

Por meio deste trabalho, foi possível ter um entendimento muito preciso e detalhado de como uma estrutura se comporta perante as variabilidades nos valores das variáveis de entrada. A metodologia desenvolvida pode ser estendida para estruturas mais complexas e para outras variáveis, fornecendo importantes informações para o projeto de materiais estruturais formados por polímeros. Além disso, o trabalho não apenas oferece um novo horizonte de possibilidades para a compreensão das incertezas em materiais compósitos, mas também serve como um exemplo de como a combinação adequada de métodos avançados pode levar a resultados valiosos. A metodologia proposta não apenas enriquece o conhecimento teórico, mas também tem o potencial de ter um impacto prático e significativo na indústria e na pesquisa em materiais compósitos, promovendo avanços tanto na confiabilidade das estruturas quanto na tomada de decisões informadas.

## REFERÊNCIAS

- 1 LUBIN, G. *Handbook of composites*. 1982. ed. New York, NY: Springer, 2013.
- 2 BLANK, J.; DEB, K. Pymoo: Multi-objective optimization in python. *IEEE Access*, v. 8, p. 89497–89509, 2020.
- 3 CHAWLA, K. K. *Composite Materials*. 3. ed. New York, NY: Springer, 2013.
- 4 BARBERO, J. *Introduction to composite materials design, second edition*. 2. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2010. (Composite Materials).
- 5 SCHAEGLER, F.; ALMEIDA, D. E. *Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Laminados utilizando Algoritmos Genéticos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2006.
- 6 AWRUCH, M. D. de F. *Análise de incertezas no controle de vibração em sistemas de materiais compósitos com atuação piezolétrica*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, BR-RS, 2016.
- 7 MORTON, S. K.; WEBBER, J. Uncertainty reasoning applied to the assesment of composite materials for structural design. *Engineering Optimization*, Taylor Francis, v. 16, n. 1, p. 43–77, 1990.
- 8 HAMI, A. E.; BOUCHAIB, R. *Uncertainty and optimization in structural mechanics*. [S.l.]: Wiley-Iste, 2013. (Focus).
- 9 SCARTH, C.; ADHIKARI, S. Modeling spatially varying uncertainty in composite structures using lamination parameters. *AIAA Journal*, v. 55, n. 11, p. 3951–3965, 2017.
- 10 LAL, A.; SINGH, B. Stochastic free vibration of laminated composite plates in thermal environments. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, v. 23, n. 1, p. 57–77, 2010.
- 11 DEY, S.; MUKHOPADHYAY, T.; ADHIKARI, S. *Uncertainty quantification in laminated composites*. New York, NY: Productivity Press, 2018.
- 12 MÖLLER, B.; BEER, M. *Fuzzy randomness*. 2004. ed. Berlin, Germany: Springer, 2004.
- 13 ZHANG, H. *Nondeterministic Linear Static Finite Element Analysis: An Interval Approach*. Tese (Doutorado) — Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA-US, 2005.
- 14 VENINI, P.; MARIANI, C. Free vibrations of uncertain composite plates via stochastic rayleigh-ritz approach. *Computers Structures*, v. 64, n. 1, p. 407–423, 1997. Computational Structures Technology.
- 15 OH, D.; LIBRESCU, L. Free vibration and reliability of composite cantilevers featuring uncertain properties. *Reliability Engineering System Safety*, v. 56, n. 3, p. 265–272, 1997. ISSN 0951-8320. Reliability of composite materials components. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832096000385>>.

- 16 SINGH, B. N.; YADAV, D.; IYENGAR, N. G. R. Free vibration of composite cylindrical panels with random material properties. *Composite Structures*, v. 58, p. 435–442, 2002.
- 17 WANG, X.; ZHAO, J. Monte-carlo simulation to the tensile mechanical behaviors of unidirectional composites at low temperature. *Cryogenics*, v. 41, n. 9, p. 683–691, 2001.
- 18 ONKAR, A. K.; YADAV, D. Forced nonlinear vibration of laminated composite plates with random material properties. *Composite Structures*, v. 70, n. 3, p. 334–342, 2005. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822304003034>>.
- 19 ALLEGRI, G.; CORRADI, S.; MARCHETTI, M. Stochastic analysis of the vibrations of an uncertain composite truss for space applications. *Composites Science and Technology*, v. 66, n. 2, p. 273–282, 2006. ISSN 0266-3538. Experimental Techniques and Design in Composite Materials. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353805001478>>.
- 20 GAO, W.; ZHANG, N.; JI, J. A new method for random vibration analysis of stochastic truss structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 45, n. 3, p. 190–199, 2009. ISSN 0168-874X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X08001479>>.
- 21 MÖLLER, B.; GRAF, W.; BEER, M. Fuzzy structural analysis using  $\alpha$ -level optimization. *Comput. Mech.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 26, n. 6, p. 547–565, dez. 2000.
- 22 HANSS, M. The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 130, n. 3, p. 277–289, 2002. ISSN 0165-0114. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011402000453>>.
- 23 HANSS, M. The extended transformation method for the simulation and analysis of fuzzy-parameterized models. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, v. 11, n. 06, p. 711–727, 2003.
- 24 QIU, Z.; HU, J. Two non-probabilistic set-theoretical models to predict the transient vibrations of cross-ply plates with uncertainty. *Applied Mathematical Modelling*, v. 32, n. 12, p. 2872–2887, 2008. ISSN 0307-904X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X07002570>>.
- 25 MOENS, D.; HANSS, M. Non-probabilistic finite element analysis for parametric uncertainty treatment in applied mechanics: Recent advances. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 47, n. 1, p. 4–16, 2011. ISSN 0168-874X. Uncertainty in Structural Dynamics. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X10001149>>.
- 26 PAWAR, P. M.; JUNG, S. N.; RONGE, B. P. Fuzzy approach for uncertainty analysis of thin walled composite beams. *Aircr. Eng.*, Emerald, v. 84, n. 1, p. 13–22, jan. 2012.

- 27 SERAFINSKA, A.; GRAF, W.; KALISKE, M. A multi-objective optimization approach with a view to robustness improvement. In: *Proceedings of 5th International Conference on Reliable Engineering Computing, Brno, Czech Republic, Springer*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 483–498.
- 28 SEÇGIN, A. Modal and response bound predictions of uncertain rectangular composite plates based on an extreme value model. *Journal of Sound and Vibration*, v. 332, n. 5, p. 1306–1323, 2013. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X12008279>>.
- 29 LOBATO VALDER STEFFEN JR, A. J. d. S. N. F. S. Técnicas de inteligência computacional com aplicações em problemas inversos de engenharia. In: \_\_\_\_\_. [S.l.: s.n.]. cap. Capítulo 11 - Análise Estrutural Considerando Incertezas Paramétricas Fuzzy.
- 30 ARAÚJO, A. et al. Interval analysis methodology in the vibration control of a smart structure with laminated composite uncertainties. 2015.
- 31 LEITÃO, E. da S. *Caracterização Mecânica de Compostos Poliméricos Bobinados em Diferentes Orientações de Reforço*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, SP, 2007.
- 32 TERRA, B. M. *Caracterização da Etapa de Estabilização do Processo Produtivo de Fibra de Carbono a partir da Poliacrilonitrila utilizando algoritmos inteligentes*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, SP, 2021.
- 33 KIM, J.-K.; MAI, Y.-W. Preface. In: KIM, J.-K.; MAI, Y.-W.; MAI, Y.-W. (Ed.). *Engineered Interfaces in Fiber Reinforced Composites*. Oxford: Elsevier Science Ltd, 1998. p. vii–viii. ISBN 978-0-08-042695-2. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080426952500014>>.
- 34 KAW, A. K. *Mechanics of composite materials, second edition*. 2. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2005. (Mechanical and Aerospace Engineering Series).
- 35 RAHAMAN, M.; ISMAIL, A.; MUSTAFA, A. A review of heat treatment on polyacrylonitrile fiber. *Polymer Degradation and Stability*, v. 92, n. 8, p. 1421–1432, 2007.
- 36 KOZUB, V. *Otimização robusta multiobjetivo de compósitos constituídos por polímero reforçado por fibra*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Cambridge, MA, março 2016.
- 37 DANIEL, I. M.; ISHAI, O. *Engineering mechanics of composite materials*. 2. ed. New York, NY: Oxford University Press, 2004.
- 38 REDDY, J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells*. 2. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2003.
- 39 MALLICK, P. K. *Fiber-reinforced composites*. 3. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2007. (Mechanical Engineering).
- 40 FERREIRA, A. J. M. *MATLAB codes for finite element analysis*. 2009. ed. New York, NY: Springer, 2009. (Solid mechanics and its applications).

- 41 OCHOA, O. O.; REDDY, J. N. *Finite element analysis of composite laminates*. 1992. ed. Dordrecht, Netherlands: Springer, 1992. (Solid Mechanics and Its Applications).
- 42 BATHE, K.-J. *Finite element procedures*. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 1995.
- 43 TAHA, H. A. *Pesquisa operacional*. [S.l.: s.n.], 2008.
- 44 BERTSEKAS, D. P. *Abstract dynamic programming*. [S.l.: s.n.], 2018.
- 45 BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. *Nonlinear programming*. 3. ed. Nashville, TN: John Wiley & Sons, 2006.
- 46 MICHALEWICZ, Z. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*. 2. ed. Berlin, Germany: Springer, 1994.
- 47 RAO, S. S. *Engineering Optimization: Theory and Practice: Fourth Edition*. [S.l.: s.n.], 2009.
- 48 GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. New York: Addison-Wesley, 1989.
- 49 HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press, 1975. Second edition, 1992.
- 50 SOREMEKUN, G. A. E. *Genetic Algorithms for Composite Laminate Design and Optimization*. 1997.
- 51 KATOCH, S.; CHAUHAN, S. S.; KUMAR, V. A review on genetic algorithm: past, present, and future. *Multimedia Tools and Applications*, v. 80, 2021. ISSN 15737721.
- 52 SIVANANDAM, S. N.; DEEPA, S. N. *Introduction to Genetic Algorithms*. 1st. ed. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2007. ISBN 354073189X.
- 53 RICHE, R. L.; AND, E. R. J. *Optimization of Composite Structures by Genetic Algorithms*. 1994.
- 54 JÚNIOR, G. P. *Métodos de otimização multiobjetivo e de simulação aplicados ao problema de planejamento operacional de lavra em minas a céu aberto*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, 2011.
- 55 OLIVEIRA, L. S. d.; SARAMAGO, S. F. P. Multiobjective optimization techniques applied to engineering problems. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 32, n. 1, p. 94–105, mar. 2010.
- 56 PALAKONDA, V.; GHORBANPOUR, S.; MALLIPEDDI, R. Pareto dominance-based moea with multiple ranking methods for many-objective optimization. In: *2018 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 958–964.
- 57 EMMERICH, M. T. M.; DEUTZ, A. H. A tutorial on multiobjective optimization: fundamentals and evolutionary methods. *Natural Computing*, v. 17, n. 3, p. 585–609, 2018.
- 58 LI, B. et al. Many-objective evolutionary algorithms: A survey. *ACM Comput. Surv.*, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 48, n. 1, sep 2015. ISSN 0360-0300. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/2792984>>.

- 59 EL-MIHOUB, T. A. et al. *Hybrid Genetic Algorithms: A Review*. 2006.
- 60 DEB, K. et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 6, 2002. ISSN 1089778X.
- 61 ZITZLER, E.; THIELE, L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 3, n. 4, p. 257–271, 1999.
- 62 ZHANG, Q.; LI, H. Moea/d: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 11, n. 6, p. 712–731, 2007.
- 63 DEB, K.; JAIN, H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part i: Solving problems with box constraints. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 18, n. 4, p. 577–601, 2014.
- 64 WANG, Z.; SOBEY, A. A comparative review between genetic algorithm use in composite optimisation and the state-of-the-art in evolutionary computation. *Compos. Struct.*, Elsevier BV, v. 233, n. 111739, p. 111739, fev. 2020.
- 65 MENDEL, J. M. Fuzzy logic systems for engineering: A tutorial. *Proceedings of the IEEE*, v. 83, p. 345–377, 1995. ISSN 15582256.
- 66 POLES, S.; FU, Y.; RIGONI, E. The effect of initial population sampling on the convergence of multi-objective genetic algorithms. In: BARICHARD, V. et al. (Ed.). *Multiobjective Programming and Goal Programming*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 123–133. ISBN 978-3-540-85646-7.
- 67 MITCHELL, M. *An introduction to genetic algorithms*. London, England: MIT Press, 1996. (Complex adaptive systems).
- 68 HARRIS, C. R. et al. Array programming with NumPy. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 585, n. 7825, p. 357–362, set. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>>.
- 69 HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2d graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, IEEE COMPUTER SOC, v. 9, n. 3, p. 90–95, 2007.
- 70 LIAO, C.-L. *An incremental total Lagrangian formulation for general anisotropic shell-type structures*. Tese (Doutorado) — Virginia Polytechnic Institute and State University, 1987.
- 71 VERMA, S. et al. Geometrically nonlinear flexural analysis of multilayered composite plate using polynomial and non-polynomial shear deformation theories. *Aerospace Science and Technology*, v. 112, p. 106635, 2021. ISSN 1270-9638. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1270963821001450>>.
- 72 YEOM, C.; LEE, S. An assumed strain finite element model for large deflection composite shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 28, n. 8, p. 1749–1768, 1989.

---

---

**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES**  
Diretoria de Pesquisa, Desenvolvimento e Ensino  
Av. Prof. Lineu Prestes, 2242 – Cidade Universitária CEP: 05508-000  
Fone/Fax(0XX11) 3133-8908  
SÃO PAULO – São Paulo – Brasil  
<http://www.ipen.br>

O IPEN é uma Autarquia vinculada à Secretaria de Desenvolvimento, associada à Universidade de São Paulo e gerida técnica e administrativamente pela Comissão Nacional de Energia Nuclear, órgão do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações.

---

---