

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

MARCELO DRUMMOND PIMENTEL

ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES EM TUBOS PARA ARMAS AUTOMÁTICAS

**RIO DE JANEIRO
2023**

MARCELO DRUMMOND PIMENTEL

ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES EM TUBOS PARA ARMAS AUTOMÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador(es): Maurício Gruzman, D.Sc.

Rio de Janeiro

2023

©2023

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro – RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

Pimentel, Marcelo Drummond.

Atenuação de vibrações em tubos para armas automáticas / Marcelo Drummond Pimentel. – Rio de Janeiro, 2023.

73 f.

Orientador(es): Maurício Gruzman.

Dissertação (mestrado) – Instituto Militar de Engenharia, Engenharia Mecânica, 2023.

1. Otimização estrutural. 2. MEF. 3. Atenuador passivo de vibrações. 4. Carga móvel. 5. Arma automática. 6. Viga de Euler-Bernoulli. i. Gruzman, Maurício (orient.) ii. Título

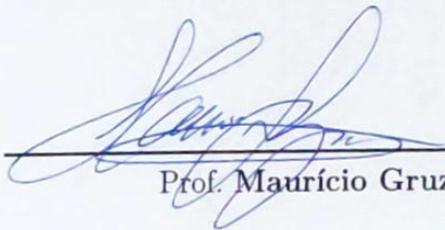
MARCELO DRUMMOND PIMENTEL

Atenuação de vibrações em tubos para armas automáticas

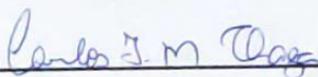
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador(es): Maurício Gruzman.

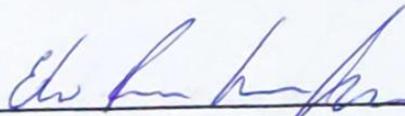
Aprovado em Rio de Janeiro, 24 de fevereiro de 2023, pela seguinte banca examinadora:



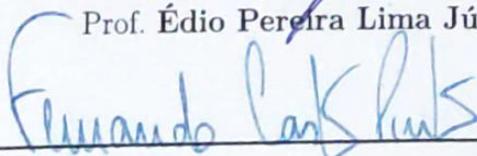
Prof. Maurício Gruzman - D.Sc. do IME - Presidente



Prof. Carlos Frederico de Matos Chagas - D.Sc. do IME



Prof. Édio Pereira Lima Júnior - D.Sc. do IME



Prof. Fernando Augusto de Noronha Castro Pinto - Dr.Ing. da UFRJ

Rio de Janeiro

2023

Esse trabalho é dedicado a você, meu filho Pedro, o maior presente que Deus me deu.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos principais são direcionados aos professores Cel Gruzman, Maj Arantes (in memoriam), Maj Édio, Maj Simão, Márcio Violante, Bruna Loiola e José Herskovits (in memoriam), todos do Instituto Militar de Engenharia, e aos professores Marcelo José Colaço e Fernando Castro Pinto, ambos da Universidade Federal do Rio de Janeiro, por todos os conhecimentos e experiências transmitidas ao longo do curso.

À todos aqueles da Marinha do Brasil que contribuíram para que a realização deste curso fosse possível, como o CMG Auro, o CF Marcelo e o CC Cleber Renan.

Aos meus pais e meus avós que contribuíram para que eu me tornasse a pessoa que sou hoje.

À minha esposa Joice por toda paciência, compreensão e apoio nos momentos em que, durante esse período excepcional das nossas vidas, em meio à pandemia e todas as dificuldades trazidas, precisei me ausentar do convívio do lar e me isolar para dar andamento aos trabalhos.

Ao meu filho Pedro que, mesmo tendo somente 2 anos de vida, transmite a mim uma enorme energia capaz de me fazer superar qualquer obstáculo.

Agradecimentos especiais são direcionados à Marinha do Brasil e ao Exército Brasileiro por permitirem essa evolução profissional em minha carreira.

“É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota.”
(Theodore Roosevelt)

RESUMO

O estudo de vibrações é importante no projeto de armas de fogo, leves ou pesadas, pois são decorrentes de efeito adverso de natureza mecânica que, se não controlado, pode prejudicar a estrutura e o desempenho do sistema. Para armas automáticas, as vibrações iniciadas em cada disparo podem não ser amortecidas o suficiente entre os disparos sucessivos, e isso pode provocar um efeito ressonante, aumentando a dispersão do tiro. A metodologia de projeto atualmente descrita na literatura prevê que, depois que o tubo seja dimensionado para resistir à pressão dos gases e outros esforços, a cadência de tiro seja limitada para evitar regimes de tiro em que a vibração extrapole níveis aceitáveis. Porém algumas pesquisas já estão sendo realizadas com o intuito de utilizar absorvedores de vibração para aumentar a faixa de cadências de tiro admissíveis sem necessitar alterações na estrutura do tubo. O objetivo principal deste trabalho é, após realizada a análise dinâmica do tiro do armamento em rajada, dimensionar, com o auxílio de técnicas de otimização, um atenuador passivo de vibrações. Será considerado como principal responsável pelas vibrações no tubo a interação entre o tubo e o projétil, sendo este modelado como uma carga móvel e considerados os efeitos gravitacionais, de inércia, e das forças centrípeta e de Coriolis.

Palavras-chave: Otimização estrutural. MEF. Atenuador passivo de vibrações. Carga móvel. Arma automática. Viga de Euler-Bernoulli.

ABSTRACT

The study of vibrations is important for light or heavy firearms design, as they are an adverse mechanical nature effect that, if not controlled, can harm the structure or the systems performance. For automatic weapons, the vibrations initiated with each shot may not be dampened enough between successive shots, and this can cause a resonant effect, increasing the dispersion of the shot. The design methodology currently described in the literature predicts that, after the tube is dimensioned to resist the gas pressure and other stresses, the fire rate is limited to avoid fire regimes where vibration extrapolates admissible levels. However, some researches are already being carried out with the intention of using vibration absorbers to increase the range of permissible firing rates without causing alterations in the tube structure. The main objective of this work is, after performing the dynamic analysis of the burst weapon fire, to design with the help of optimization techniques a passive vibration attenuator considering the interaction between the tube and the projectile as the main responsible for the vibrations in the tube, this being modeled as a mobile charge and considering the effects of gravity, inertia, and centripetal and Coriolis forces.

Keywords: Structural optimization. FEM. Passive vibration attenuator. Mobile load. Automatic weapon. Euler-Bernoulli beam.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tubo com as suas diversas regiões	20
Figura 2 – Efeito de um absorvedor de vibração não amortecido em comparação com um amortecido para um mecanismo com vibração (1)	21
Figura 3 – Ilustração de um absorvedor dinâmico de vibração amortecido	21
Figura 4 – Viga em balanço com carregamento pontual na extremidade livre	30
Figura 5 – Elemento infinitesimal de viga com representação dos esforços internos	31
Figura 6 – Ilustração da aplicação do princípio da superposição para obtenção da matriz global (2)	36
Figura 7 – Força no elemento transferida para os nós (adaptada de (3)).	39
Figura 8 – Processo iterativo DEM (adaptado de (4)).	43
Figura 9 – Comparação entre as soluções ao longo da malha	46
Figura 10 – Deflexão da viga biapoiada no instante que a carga móvel percorreu 75% do tempo total de travessia	49
Figura 11 – Canhão Bofors 40mm/L70 na versão terrestre (5)	50
Figura 12 – Canhão Bofors 40mm/L70 na versão terrestre (6)	51
Figura 13 – Visualização da F45 - Fragata União, com alguns de seus sensores e armas (7)	51
Figura 14 – Canhão Bofors 40mm/L70 utilizado pelos Fuzileiros Navais (8)	52
Figura 15 – Canhão Bofors 40mm Mk4 utilizado para adestramento de pessoal no Centro de Manutenção de Sistemas da Marinha	52
Figura 16 – Ilustração da parte do tubo considerada flexível para a simulação (9)	53
Figura 17 – Desenho da seção transversal do tubo do canhão 40mm/L60 Bofors (10).	53
Figura 18 – Tubos do canhão Bofors 40mm/L70 em medição no CMS	54
Figura 19 – Croqui de parte do tubo do canhão Bofors 40mm/L70	54
Figura 20 – Montagem do quebra-chamas ao tubo	55
Figura 21 – Croqui do quebra-chamas com as medições tomadas	55
Figura 22 – Curvas de balística interna implementadas	56
Figura 23 – Deslocamento da extremidade do tubo durante a simulação para 5 tiros	57
Figura 24 – Velocidade da extremidade do tubo durante a simulação para 5 tiros	58
Figura 25 – Posição da extremidade do tubo para o primeiro disparo	59
Figura 26 – Velocidade vertical da extremidade do tubo para o primeiro disparo	59
Figura 27 – Deslocamento da extremidade do tubo durante a simulação para 15 tiros	60
Figura 28 – Velocidade da extremidade do tubo durante a simulação para 15 tiros	61
Figura 29 – Deslocamento da extremidade do tubo com atenuador dinâmico de vibrações passivo durante a simulação de 5 disparos em rajada	62

Figura 30 – Velocidade da extremidade do tubo com atenuador dinâmico de vibrações passivo durante a simulação de 5 disparos em rajada	63
Figura 31 – Deslocamento da extremidade do tubo com atenuador dinâmico de vibrações passivo durante a simulação de 15 disparos em rajada	65
Figura 32 – Velocidade da extremidade do tubo com atenuador dinâmico de vibrações passivo durante a simulação de 15 disparos em rajada	65
Figura 33 – Exemplo de atenuador dinâmico de vibrações passivo instalado na boca do tubo de uma arma	66

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características gerais do tubo modelado	45
Tabela 2 – Comparação para a deflexão linear e angular na extremidade do tubo .	46
Tabela 3 – Resultado para as frequências naturais de interesse do tubo	47
Tabela 4 – Parâmetros da viga biapoiada simulada por (11)	48
Tabela 5 – Parâmetros do tubo do canhão Bofors 40mm/L70	56
Tabela 6 – Frequências naturais do tubo do canhão Bofors 40mm/L70	57
Tabela 7 – Resultados para a simulação do disparo nos instantes de saída do projétil pela boca do tubo	60
Tabela 8 – Limites do domínio dos parâmetros e resultado após otimização numérica	62
Tabela 9 – Amplitudes máximas da boca do tubo em rajada de 5 tiros para o instante de saída do projétil sem e com o atenuador de vibrações passivo	63
Tabela 10 – Amplitudes máximas da boca do tubo em rajada de 5 tiros para toda a simulação sem e com o atenuador de vibrações passivo	64
Tabela 11 – Parâmetros da função objetivo no tempo	65

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Método dos Elementos Finitos
CAD	Computer-Aided Design
CAE	Computer-Aided Engineering
FORTTRAN	Formula Translation
ANSYS	Analysis Systems
MATLAB	Matrix Laboratory
SolidWorks	Software de modelagem em 2D e 3D
SAP2000	Structural Analysis Program
HyperMesh	Pré-processador de elementos finitos
Radioss	Solucionador de eventos dinâmicos baseado em elementos finitos
Max	Máximo
Min	Mínimo
PRODAS	Projectile Rocket Ordnance Design and Analysis System
Mk	Mark

LISTA DE SÍMBOLOS

x	Distância do engaste à seção transversal
E	Módulo de Young do material
I	Momento de inércia de área
\bar{v}	Deflexão vertical da viga a distância "x" do engaste
ρ	Massa específica do material
A_s	Área da seção transversal do tubo
t	Tempo
$\frac{\partial f}{\partial x}$	Variação do carregamento f na direção "x"
f_{grav}	Força gravitacional que a carga móvel aplica à viga em função do tempo
M_{cm}	Massa da carga móvel
g	Aceleração gravitacional
$f_{inercia}$	Força de inércia total que a carga móvel aplica à viga em função do tempo
$\ddot{\bar{v}}_x$	Aceleração local da viga na direção vertical
$\dot{\bar{v}}'_x$	Derivada primeira da velocidade local da viga na direção vertical em relação a posição
v_{cm}	Velocidade da carga móvel
\bar{v}''_x	Derivada segunda da deflexão local da viga na direção vertical em relação a posição
a_{cm}	Aceleração da carga móvel
$f_{aplicada}$	Força aplicada considerando ambos os efeitos gravitacional e inercial
m_{ij}^e	Elemento de massa que ocupa a linha "i" e a coluna "j" da matriz elementar de inércia
L_e	Comprimento do elemento
x_e	Posição do nó no tubo no eixo "x"

$\psi_{ie}(x_e)$	Função de interpolação "i" para o elemento
k_{ij}^e	Elemento de rigidez que ocupa a linha "i" e a coluna "j" da matriz elementar de rigidez
$\psi_{ie}''(x_e)$	Derivada segunda da função de interpolação "i" para o elemento "e"
P	Vetor peso
M	Matriz global de inércia
g	Vetor aceleração da gravidade
\ddot{v}	Vetor de aceleração nodal
K	Matriz global de rigidez
v	Vetor de deflexão nodal
A	Autovetor associado à frequência angular natural
ω	Frequência angular natural
C	Matriz global de amortecimento
α	Coefficiente de amortecimento para a matriz global de inércia
β	Coefficiente de amortecimento para a matriz global de rigidez
ω_i	Frequência natural de ordem "i"
ξ_i	Fator de amortecimento modal de ordem "i"
\dot{v}	Vetor de velocidade nodal
F	Vetor de forçamento aplicado nos nós dos elementos de viga
F_{jE_i}	Carregamento aplicado ao grau de liberdade "j" do elemento "i"
x_{cmE_i}	Posição da carga móvel no elemento "i"
\hat{K}	Matriz de rigidez efetiva
$v^{t+\Delta t}$	Vetor posição nodal no instante de tempo seguinte
Δt	Variação do tempo
$\hat{R}^{t+\Delta t}$	Vetor de carregamento efetivo
$\dot{v}^{t+\Delta t}$	Vetor velocidade nodal no instante de tempo seguinte

\dot{v}^t	Vetor velocidade nodal no instante de tempo atual
δ_n	Constante "δ" de Newmark
\ddot{v}^t	Vetor aceleração nodal no instante de tempo atual
$\ddot{v}^{t+\Delta t}$	Vetor aceleração nodal no instante de tempo seguinte
v^t	Vetor posição nodal no instante de tempo atual
α_n	Constante "α" de Newmark
a_i	Constantes de Newmark utilizadas para o cálculo da rigidez efetiva e do carregamento efetivo
f_{obj}	Função objetivo
$\frac{dv}{dx}$	Salto do projétil, ou desvio angular do tubo
$v_{projétil}$	Velocidade de saída do projétil
pol	Unidade de medida de comprimento, em polegadas
GPa	Unidade de medida de elasticidade, em gigapascal
kg	Unidade de medida de massa, em quilograma
kg/m^3	Unidade de medida de massa específica, em quilograma por metro cúbico
N	Unidade de medida de força, em Newton
y	Deflexão vertical para a solução analítica
L	Comprimento da viga
θ	Deflexão angular para a solução analítica
m	Unidade de medida de comprimento, em metro
rad	Unidade de medida de ângulo, em radiano
Hz	Unidade de medida de frequência, em hertz
m^4	Unidade de medida de momento de inércia de área
m^2	Unidade de medida de área
m/s	Unidade de medida de velocidade
$kg \cdot m^2$	Unidade de medida de momento de inércia de massa

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	CONCEITO DE TUBO	19
1.2	ABSORVEDORES DE VIBRAÇÃO	20
1.3	FENÔMENOS ADVERSOS	21
1.4	DISPERSÃO DO TIRO	22
1.5	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	22
1.6	OBJETIVO	28
1.7	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	28
2	MODELAGEM	30
2.1	TUBO DA ARMA	30
2.2	CARGA MÓVEL	32
3	METODOLOGIA	35
3.1	RIGIDEZ E INÉRCIA GLOBAL	35
3.2	PESO DO TUBO	36
3.3	ANÁLISE MODAL E AMORTECIMENTO GLOBAL	37
3.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO	38
3.5	CARGA MÓVEL	38
3.6	ANÁLISE DINÂMICA	40
3.7	TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA	42
4	VALIDAÇÃO DOS MODELOS	45
4.1	ANÁLISE ESTÁTICA	45
4.2	MODOS DE VIBRAÇÃO E FREQUÊNCIAS NATURAIS CORRESPONDENTES	47
4.3	AMORTECIMENTO E ANÁLISE DINÂMICA	47
4.3.1	MATRIZ GLOBAL DE AMORTECIMENTO	48
4.3.2	CARGA MÓVEL APLICADA E ANÁLISE DINÂMICA	48
5	ESTUDO DE CASO	50
5.1	MODELO IMPLEMENTADO	53
5.2	RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES E DISCUSSÕES DE RESULTADOS	56
5.3	RESULTADOS COM O ATENUADOR DINÂMICO DE VIBRAÇÕES PASSIVO	61
6	CONCLUSÃO	67

REFERÊNCIAS	70
--------------------	-----------

1 INTRODUÇÃO

Armas automáticas apresentam grande dispersão dos tiros à medida que se mantém uma cadência de tiro elevada no armamento, e uma das principais causas são as vibrações decorrentes do tiro e a sua baixa atenuação. Quanto mais disperso, mais disparos serão necessários para alcançar o objetivo desejado. Embora a arma tenha sido projetada considerando as vibrações decorrentes do seu uso quando no tiro, conhecer essas vibrações no tubo pode fazer com que se tenha uma melhor precisão no uso do armamento, ou ainda obter um alcance eficaz maior, ao se atenuar em certas faixas, aumentando a confiabilidade do mesmo sem ser necessário realizar modificações substanciais neste.

O uso de tubos mais longos até certo limite possibilita aumentar o alcance eficaz do projétil, uma vez que aumenta o tempo em que este é acelerado pela ação da queima dos gases propelentes em seu interior, fazendo assim com que a velocidade de saída do projétil na boca do tubo seja maior. Contudo, quanto maior o seu comprimento, maior é o tempo em que o tubo sofre com os efeitos adversos decorrentes do tiro, acarretando, assim, em uma maior energia de vibração, e conseqüentemente maior deflexão da sua extremidade e aumento do ângulo de guinada do projétil ao sair do tubo, aumentando com isso a dispersão do tiro e diminuindo a sua eficiência, como citado por (12), (13), (14), (15), (16), (17) e (18). Atenuar essas vibrações também pode melhorar a precisão do disparo, fazendo com que seja possível a utilização de um tubo maior para um alcance maior.

Essas vibrações podem ser transmitidas também para a sua base, interferindo na dinâmica do movimento do meio que a transporta. Em meios de grandes dimensões como em um navio (que possui inércia alta em relação aos esforços provocados por um armamento), essa interferência pode ser considerada insignificante, mas em outros meios pode acarretar alterações na dinâmica do movimento do meio de forma a exigir um condutor mais habilidoso em certas situações (em veículos terrestres, aeronaves de asa fixa ou de asa móvel, por exemplo), ou até chegar a causar grandes perdas materiais em outras situações. Reduzir ou controlar essa vibração de forma a obter como saída uma excitação que atinja níveis admissíveis para utilização no meio para o qual foi dimensionado é uma grande contribuição para o uso eficaz do armamento e do meio que o transporta, como em (19).

O projeto de tubos de armamentos exige cuidados com os vários fenômenos que acontecem durante o tiro, e, relacionado às vibrações, podemos citar (20) a vibração causada pelos esforços no tubo devido ao deslocamento do projétil em seu interior, pela ação dos gases decorrentes da queima dos propelentes e pelas forças de recuo. O estudo das vibrações decorrentes do tiro possui aplicações em várias situações diferentes, dentre

as quais algumas foram aqui citadas. Neste trabalho será dada maior atenção ao primeiro objeto citado, qual seja, em armas automáticas, considerando essencialmente a vibração decorrente do tiro causada pela interação entre o tubo e o projétil. Nesta interação, o principal aspecto que contribui para a dispersão do disparo é a vibração provocada pela interação entre o projétil e o tubo defletido pela ação gravitacional, de acordo com (21) que considera a distorção do tubo como o efeito principal sobre as condições iniciais de voo do projétil acelerado, ou com (3) que mostra que existe uma ampla contribuição para a dinâmica do tubo quando se consideram os efeitos inerciais da interação do tubo com o projétil, ou ainda com (16) que indica que a precisão do disparo é afetada por conta do movimento vertical provocado pela vibração do tubo durante o disparo. Sendo assim, para que essa análise fosse possível, esse trabalho foi elaborado com a modelagem do tubo do armamento utilizando a Teoria de Viga de Euler-Bernoulli considerando somente os graus de liberdade vertical e angular, seguido da modelagem do projétil como carga móvel com atuação vertical, do atenuador de vibrações acoplado ao tubo como sendo um atenuador passivo com os seus parâmetros obtidos por meio de otimização numérica, seguido de simulações numéricas com os modelos citados acoplados antes e depois da conexão do atenuador passivo de vibrações, de forma a possibilitar a comparação dos resultados e verificar a magnitude do ganho obtido. Para a solução desse modelo no espaço, foi usado o Método dos Elementos Finitos (MEF), e no tempo foi usado o Método de Integração Direta de Newmark. Para o atenuador, o passivo foi o selecionado para este trabalho, assim como em (3), (19), (16), (18), uma vez que, para a utilização do atenuador ativo, o controle durante a dinâmica do disparo é muito difícil, devido à janela de tempo estreita existente para a tomada de ação corretiva - na ordem da dezena de milissegundos, sendo necessário altos níveis de potência dos atuadores e de informações significativas de sensores em um ambiente operacional severo.

1.1 Conceito de Tubo

Trata-se de uma das partes mais importantes da arma, pois é o responsável por permitir que a energia decorrente da expansão gasosa procedente da queima do propelente seja transmitida ao projétil, além de orientar o deslocamento deste para a direção pretendida. De acordo com (20), é basicamente como um vaso de pressão tubular, fechado na culatra e aberto na boca - exceto em armas sem recuo, em que a culatra tem abertura controlada. O tubo determina as atividades iniciais do projétil. Antes do disparo, fornece espaço para o tiro completo. Durante o disparo, restringe o gás propelente em favor da direção de deslocamento do projétil para a boca do tubo, direcionando o ímpeto do gás em favor do projétil.

Os tubos podem ser de alma lisa ou alma raiada, sendo a alma a parte oca do interior do tubo, que vai desde a culatra até a boca do cano. A alma raiada apresenta sulcos

helicoidais ao longo do comprimento longitudinal e que provocam a rotação do projétil através de forçamento por atrito, enquanto a alma lisa é a alma sem raiamentos. Em tubos de alma raiada, o raiamento dá ao projétil a rotação necessária para a estabilidade do projétil durante o voo após a saída do tubo. Sintetizando, a função do tubo é direcionar o projétil contra o alvo com a velocidade especificada.

Segundo (20), basicamente 4 (quatro) regiões compõem o tubo: o anel da culatra em sua extremidade posterior, que veda o tubo e impede que os gases decorrentes da queima dos propelentes escapem e força a atuarem no projétil, em favor do seu deslocamento para a boca do tubo; a câmara ou parte posterior do tubo onde o projétil é acondicionado antes do disparo; a alma ou parte anterior, por onde o projétil se desloca após o disparo e interage com o tubo; e a boca do tubo em sua extremidade anterior, por onde o projétil é lançado em direção ao alvo. A Fig. 1 mostra um perfil simplificado de um tubo sem acessórios e com as suas principais regiões.

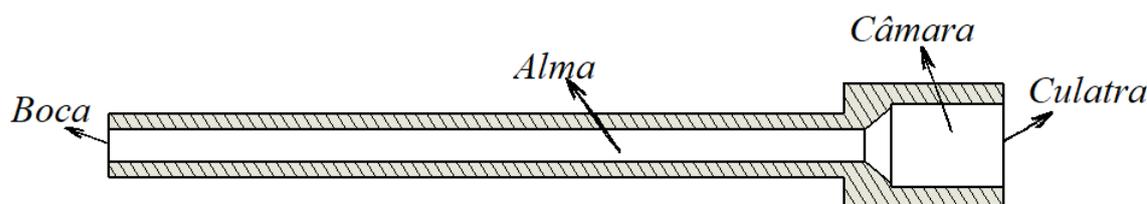


Figura 1 – Tubo com as suas diversas regiões.

1.2 Absorvedores de Vibração

Um mecanismo pode sofrer vibração excessiva se for submetido a ação de uma força cuja excitação seja próxima a de uma de suas frequências naturais, e até provocar a ressonância. Em tais situações, esse obstáculo pode ser contornado através da utilização de um artefato conhecido como absorvedor dinâmico de vibração. Trata-se de um dispositivo secundário que, acoplado ao dispositivo primário (o mecanismo que sofre a ação da força diretamente), reduz a vibração deste, de tal modo que as frequências naturais do sistema resultante se afastem da frequência de excitação.

Trata-se de um sistema massa-mola que pode ser não amortecido ou amortecido. Para o não amortecido, o dimensionamento deste absorvedor afasta a ocorrência da ressonância na aplicação da força na excitação de operação, porém acrescenta 2 (duas) outras frequências naturais ao sistema, sendo uma menor e a outra maior que a frequência de excitação da força aplicada, como ilustrado na Fig. 2 pela linha tracejada.

Isso acarreta em uma vibração excessiva do sistema durante a partida e a parada do mecanismo, ou ainda em possibilidade de a amplitude de vibração não se reduzir tanto

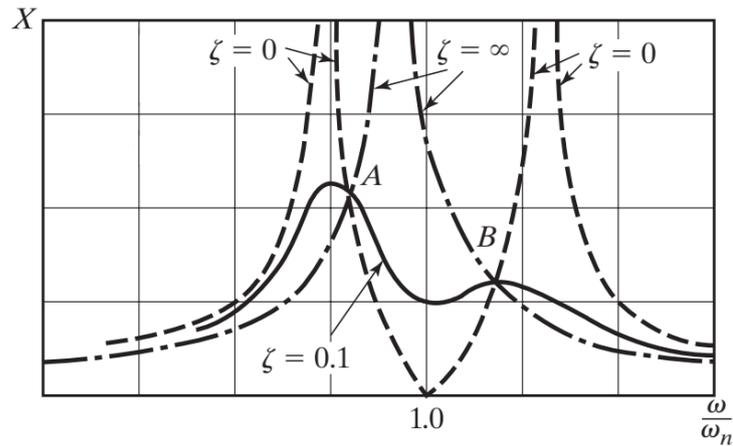


Figura 2 – Efeito de um absorvedor de vibração não amortecido em comparação com um amortecido para um mecanismo com vibração (1).

se a força de excitação tiver várias frequências. O sistema massa-mola amortecido reduz os 2 (dois) picos produzidos pelo acoplamento do atenuador, como referido pela linha cheia na Fig. 2. A Fig. 3 ilustra o atenuador dinâmico de vibrações amortecido básico.

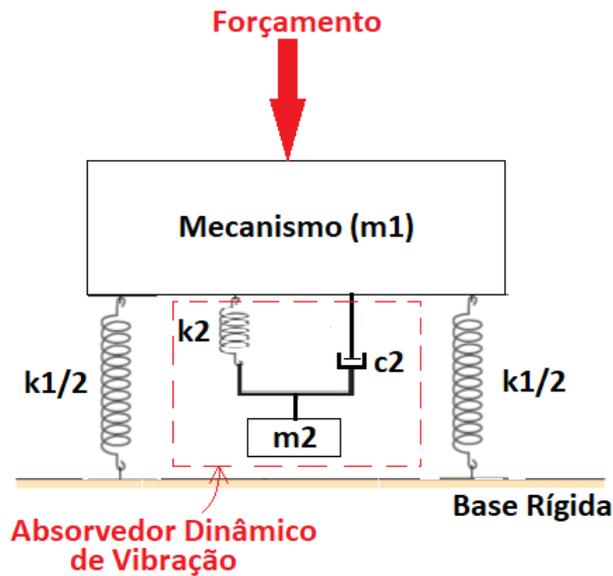


Figura 3 – Ilustração de um absorvedor dinâmico de vibração amortecido.

1.3 Fenômenos Adversos

Qualquer evento que reduza a precisão do tiro ou a velocidade de saída do tiro na boca do tubo deve ser considerado prejudicial para o tiro. Em armas automáticas, para sucessivos disparos, alguns efeitos são percebidos imediatamente, como as vibrações do tubo decorrentes do disparo e que afetam a precisão do próximo disparo, por exemplo. Outros efeitos são menos perceptíveis, pois ocorrem em uma janela de tempo da ordem

de milissegundos. Porém são muito severos e cumulativos, como a corrosão provocada por sucessivos disparos em uma arma automática e que diminui a interação entre o tubo e o projétil, afetando a rotação aplicada neste. Ou como o aumento de temperatura dos componentes do armamento em caso de disparos consecutivos em um curto intervalo de tempo, diminuindo a sua vida útil e podendo, ainda, ocasionar o efeito "cook-off". Esses e outros efeitos adversos precisam ser considerados durante o dimensionamento do tubo, de forma que possam ser minimizados.

Os principais fenômenos que afetam a precisão do tiro durante o disparo, segundo (20), são os carregamentos mecânicos que são derivados da interação entre o projétil e o tubo, da pressão dos gases decorrentes da queima do propelente, das forças de recuo das partes móveis e das vibrações resultantes dos carregamentos mecânicos citados.

1.4 Dispersão do Tiro

A dispersão do tiro é definida como sendo uma imprecisão aleatória do ponto de impacto do projétil no alvo. Sua medição se dá através de uma circunferência que contém os pontos atingidos no alvo. Em armas automáticas, esse feito se torna mais estendido. Nesse evento, vários fatores devem ser considerados durante a balística interna, a externa e a final, como as vibrações do tubo, a direção e a velocidade do vento, a inclinação do projétil ao atingir o alvo, entre outros aspectos.

Neste trabalho, o foco analisado foi o da vibração causada pela interação entre o tubo e o projétil, como já mencionado. Para uma ponderação de como essa vibração afeta a dispersão, foi observada a deflexão da extremidade do tubo.

1.5 Revisão Bibliográfica

PIMENTEL et al (2022) (22) estudaram o comportamento dinâmico que a boca do tubo do armamento apresenta quando o tubo é submetido a diferentes carregamentos não superpostos e aplicados localmente em sua extremidade na frequência da cadência de tiro a ser analisada, com o propósito de representar a interação entre o tubo e o projétil de uma forma simplificada, a fim de medir indiretamente a dispersão de um tiro para uma arma automática. Para esse estudo, foi utilizado o elemento de viga de Euler-Bernoulli com 2 (dois) graus de liberdade em cada nó como modelo, e, em sua solução, foi empregado o modelo de elementos finitos com cálculo analítico das constantes do sistema de equações do modelo. O modelo de elemento de viga, assim como o de elementos finitos, foi implementado por linguagem de programação FORTRAN. O efeito dos acessórios do tubo do armamento foi desconsiderado. Verificou-se que a forma do carregamento afeta diretamente na dinâmica da extremidade do tubo, apontando para a necessidade de um

carregamento mais complexo, devendo considerar a Teoria de Cargas Móveis.

MEDEIROS et al (2022) (23) analisaram o problema inverso de identificação do coeficiente de rigidez para vigas de Euler-Bernoulli a partir de medidas de deflexão, apresentando também os efeitos de estabilidade das soluções aproximadas com relação às medidas com diferentes níveis de perturbações através de exemplos numéricos.

O'NEIL (2022) realiza em (12) a análise de vibrações de um cano de fuzil isolado, registra o deslocamento da ponta do cano e o ângulo de rotação em cenários de tiro tanto analiticamente quanto empiricamente e faz recomendações sobre otimizações e esquemas de controle para melhorar a capacidade geral de precisão, aumentando o desempenho do armamento. Em seu trabalho, foram considerados o deslocamento e a inclinação da ponta do cano no momento de saída do projétil, bem como a sua variação de velocidade ao longo do tubo como fatores essenciais de consequência direta na precisão do tiro.

QUEROGA (2021) (13) analisou uma correlação entre a dispersão do tiro com a cadência de uma arma automática, ou seja, com a taxa de tiros por unidade de tempo de uma arma que dispara rajadas, adaptando modelagens anteriores e propondo uma metodologia para a obtenção da curva qualitativa da dispersão em função da cadência de tiro. Em seu estudo, o tubo foi modelado como uma viga de Bernoulli-Euler, sendo seu modelo resolvido no espaço pelo método dos elementos finitos e no tempo por um método de Runge-kutta. Os efeitos da balística interna no tubo foram representados por um carregamento cíclico na extremidade livre do armamento. Toda a implementação numérica foi realizada em Matlab® e os resultados obtidos foram comparados com aqueles presentes na literatura de referência para o projeto de tubos de armamento.

MARTINS et al (2020) (24) consideraram o elemento de viga de Euler-Bernoulli e aplicaram o método de Rayleigh-Ritz para obtenção da solução aproximada deste modelo, considerando uma carga distribuída em forma triangular. Dessa forma, foi possível transformar a equação diferencial resultante da aplicação da Teoria de Euler-Bernoulli em um sistema algébrico de equações. Na sequência, mostrou que esse sistema pode ser facilmente resolvível através do método da Eliminação de Gauss.

WERNECK et al (2020) (25) implementaram uma rotina computacional no software WxMaxima para estimar a frequência fundamental de vibração em vigas, com base na Teoria da Linha Elástica associada ao Quociente de Rayleigh. Para a descrição da rotina computacional, foram utilizados os dados de uma barra de aço com 80 centímetros de comprimento submetida a duas cargas: uma delas distribuída ao longo da barra e outra concentrada no meio de sua extensão; e uma simulação usando software SAP2000. Além disso, utilizou-se outro exemplo cujo sistema é composto por massas e molas discretas. Em ambos os casos os resultados mostraram satisfatória concordância com os obtidos pela rotina implementada.

CHATURVEDI (2020) (14) citou que a amplitude atingida pelo final do tubo do armamento ao vibrar influencia diretamente na precisão da arma. Seu estudo propôs como solução para redução dessa amplitude durante o tiro uma mudança em características de projeto, aumentando com isso a sua rigidez, porém levando em conta que não poderia haver incremento de peso. O tubo do armamento foi assumido como uma viga de Euler-Bernoulli em balanço, fixada na extremidade da culatra. A modelagem foi executada com auxílio de softwares comerciais CAD – CAE (SolidWorks® e ANSYS®). O efeito dos acessórios foi desconsiderado, e a principal causa das vibrações foi considerada a interação entre o tubo e o projétil.

HUBER (2019) (21) estudou os movimentos do tubo e do projétil que se influenciam mutuamente. Essas correlações dependem das distorções do tubo, da velocidade e da aceleração do projétil. A distorção do tubo se deve às ações de contato do projétil e à pressão de gases aplicada no tubo atrás do projétil. A aceleração do projétil influencia de maneira que qualquer imperfeição ou movimento do tubo terá uma forte influência no movimento do projétil e, assim, nas suas condições iniciais de voo, impactando, portanto, na precisão do disparo.

BRITO (2019) (26) analisou o cálculo da primeira frequência natural de tubos de armamento através de diferentes abordagens. Com a utilização de diferentes ferramentas, foram avaliadas diferentes metodologias para a obtenção das frequências naturais, sendo estes métodos comparados entre si e com o método utilizado como exemplo em (20), que é uma referência consagrada na literatura no que se refere ao dimensionamento de tubos de armas, e que foi referência para livros mais atuais, como (27) e (28). Demonstrou-se que a metodologia utilizada em (20), baseada na metodologia de Stodola, é capaz de apresentar resultados adequados, mas foi possível concluir que existem programas modernos que a substituem com vantagens na precisão e no fornecimento de mais parâmetros de projeto, como o ANSYS® e o programa que foi desenvolvido neste trabalho, que considerou para o tubo o modelo de viga de Euler-Bernoulli, resolvendo no espaço por Método de Elementos Finitos e realizando a análise modal por autovalores e autovetores.

APPI et al (2018) (29) mostraram que foi possível desenvolver formulações que auxiliassem o monitoramento estrutural considerando vigas com rigidez constante e sobre bases elásticas, sujeitas a cargas dinâmicas, aplicando o modelo de viga de Euler-Bernoulli. Foram aplicadas 4 (quatro) diferentes condições de contorno em seu estudo, consideradas pelos autores como sendo as mais familiares, que foram: viga engastada com extremidade livre (em balanço); viga engastada-engastada; viga engastada-apoiada; e viga apoiada-apoiada. Este modelo de tubo foi resolvido através do Método de Elementos de Contorno que, de modo resumido, é um método aplicado na solução de equações diferenciais que são transformadas em equações integrais aplicadas ao contorno do problema.

CRUZ e SOUZA (2018) (30) aplicaram o modelo de viga de Euler-Bernoulli e o

de Timoshenko a fim de possibilitar uma comparação entre ambas através de aplicação de métodos de solução numérica. Em seu trabalho, aplicou-se o Método das Diferenças Finitas, e observou-se, conforme a literatura consagrada no assunto sustenta, que, para uma razão comprimento-altura da viga alta e carga aplicada de grande magnitude, existe coincidência entre ambas as teorias, sendo desprezível a parcela da tensão cisalhante na viga. Porém, para razão comprimento-altura da viga muito baixa para cargas com valores elevados, observou-se uma discrepância entre as curvas de deflexão entre as teorias, bem como uma diferença entre o valor estipulado intuitivamente e o apresentado para uma carga concentrada.

RAMOS et al (2018) (31) utilizaram o modelo de viga de Euler-Bernoulli com um método numérico de Diferenças Finitas com distintas configurações de vinculação da viga, de forma a instituir uma relação entre a eficiência da convergência numérica e a forma de restrição dos graus de liberdade nos apoios. Em seguida, foi feito um teste de vibração aplicando um carregamento súbito para determinação dos deslocamentos transversais da viga, além de uma análise nos pontos críticos da curva de deflexão para as condições de suporte executadas. Nesse estudo concluíram que as configurações de vinculação que possuem maior rigidez apresentaram precisão inferior quando verificadas em uma malha menos refinada. Além disso, observaram também que as vinculações que acarretam em uma condição de contorno dependente de derivadas de ordens mais elevadas apresentaram uma maior dificuldade de convergir, por conta de sua complexidade. Outrossim constataram que esse comportamento não é condição exclusiva do modelo de Euler-Bernoulli e do Método de Diferenças Finitas, pois verifica-se comportamento análogo em outros modelos matemáticos de deflexão de vigas, bem como em outros métodos numéricos, sendo, assim, esse comportamento natural à vinculação.

MICHELON (2018) (3) aplicou a Teoria de Viga de Euler-Bernoulli em conjunto com o Método de Elementos Finitos para simular a vibração provocada no tubo do armamento decorrente da interação entre o tubo e o projétil ao ser disparado um tiro único, validando o seu modelo implementado com resultados alcançados na literatura, os quais apresentaram boa concordância. Isto possibilitou simular diferentes situações de disparo em canhões e verificar a influência do peso do tubo na vibração decorrente do disparo, além de verificar a contribuição das componentes de força impostas ao tubo pelo deslocamento do projétil em seu interior, indicando ampla contribuição para as forças de Coriolis e centrípeta nas vibrações. Após, foi examinada a influência da massa e da velocidade do projétil nessas vibrações, onde se atestou que a alteração da massa possui maior preponderância que a da velocidade. Por último, buscou-se a atenuação dessas vibrações através da inclusão de um absorvedor passivo de vibrações otimizado.

COSME e MERCHED (2017) (32) estudaram a modelagem matemática das vigas através dos modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, considerando somente o estado

estacionário, ou seja, não abordou o estado transiente, possibilitando uma análise comparativa de cada modelo para vários exemplos. Isto permitiu identificar os efeitos práticos das hipóteses de cada um, que são, para a Teoria de Euler-Bernoulli, seções transversais devem permanecer planas e ortogonais ao eixo neutro da barra após a flexão, o que importa que os efeitos de cisalhamento não têm implicações sobre o modelo, e para a Teoria de Timoshenko, a introdução da hipótese de cisalhamento entre as seções planas reflete-se numa melhor aplicação para vigas de comprimento curto e caracteriza a principal diferença teórica entre os dois modelos, sendo a principal consequência desta hipótese o fato de que as seções transversais, embora permaneçam planas, agora possuem uma deformação angular e, conseqüentemente, não permanecem ortogonais ao eixo da viga.

DURSUN et al (2017) (19) analisaram o comportamento dinâmico de um sistema de armas em um carro de combate em movimento, de forma que isso permita projetar um sistema de controle para o sistema de armas mais eficaz ao considerar os níveis de vibração que o movimento do carro acarreta ao armamento. Em seu trabalho, atestou-se que, para um sistema de armas já existente, em que modificações estruturais podem não ser possíveis, o uso de sistemas de referência da boca do tubo e absorvedores de vibrações otimizados podem ser soluções adequadas para a redução de vibrações do tubo, aumentando a precisão do tiro como consequência.

FRANCO e CHONG (2016) (33) consideraram uma viga submetida a impacto provocado por queda livre, modelada pela Teoria de Euler-Bernoulli, e compararam os resultados obtidos ao utilizar o Método de Diferenças Finitas com o Método de Elementos Finitos para esse modelo. Foi utilizado o resultado do Método de Elementos Finitos como referência em virtude de ser um método já consagrado para análises dinâmicas. Nesse estudo alcançaram um resultado que consideraram como correto e confiável para o Método de Diferenças Finitas.

LIENNARD (2015) (15) considerou, entre os fatores de impacto na dispersão do tiro (balística interna, externa e terminal), a balística interna como a principal contribuinte para os desvios do alvo, uma vez que esta etapa determina as condições de saída do projétil do tubo e, na sequência, o seu comportamento inicial de voo. O seu objetivo foi determinar os parâmetros relacionados à geometria do tubo que influenciam na dispersão. Após uma análise estatística de resultados de tiro, e de testes realizados para isolar a influência da geometria com os desvios, foi criado um modelo numérico tridimensional para que fosse possível variar os parâmetros geométricos e estudar a sua influência na dinâmica do projétil durante a balística interna.

HUA et al (2015) (16) citaram que a precisão do disparo é afetada por causa do movimento vertical provocado pela vibração no tubo durante o disparo e, conseqüentemente, pela vibração e deformação da base do armamento, que, nesse estudo, é um tripé. O conjunto arma-base foi modelado utilizando Método dos Elementos Finitos através de um software

de pré-processamento chamado HyperMesh, gerador de malha, e um "solver" chamado Radioss. Após realizada a análise modal e a dinâmica transiente, identificou o modo de vibração principal como sendo o segundo modo de vibrar, pois o primeiro modo se deu na horizontal e o segundo na vertical, e comparando as respostas entre as duas direções, concluiu que a direção vertical deveria ter mais atenção. A vibração da boca do tubo foi considerada como influenciadora direta da precisão do tiro, levando ao foco a análise da extremidade do tubo na direção vertical. Como solução para os problemas de vibração causadores da deflexão da extremidade do tubo, as frequências naturais do conjunto foram maximizadas, através de atenuadores de vibrações passivos aplicados à base, para que os fenômenos de ressonância fossem evitados, estendendo o tempo de amortecimento do sistema antes do próximo disparo, induzindo à estabilidade dinâmica. Para alcançar esse objetivo de maximizar a frequência do modo de vibração principal, foi proposta uma otimização topológica da base do armamento, obtida através das análises modal e dinâmica do armamento para encontrar a função objetivo a ser maximizada, ou seja, a frequência natural. Posteriormente foram realizadas simulações de disparo para verificação da atenuação da deflexão, concluindo com cálculo balístico externo de forma a confirmar o ganho na precisão do disparo.

MONTEIRO et al (2013) (34) objetivaram solucionar um problema de viga sujeita a ação de forças distribuídas com o emprego do Método de Elementos Finitos através de funções polinomiais interpolativas do terceiro (usual) e quinto (alternativa) graus e comparar os resultados obtidos com os calculados pela solução analítica, de maneira a se comparar as diferenças entre os deslocamentos gerados por ambas as aproximações, a usual e a alternativa propostas. Como conclusão foi visto que o desenvolvimento do elemento finito com o uso de um polinômio interpolador do quinto grau apresentou eficiência superior ao elemento finito que emprega o polinômio interpolador de grau 3 (três), visto que conduziu ao valor da solução exata em deslocamentos para o caso de carga uniforme.

CARRER et al (2012) (35) constataram em uma análise estática através da aplicação do Método de Elementos de Contorno que ambos os modelos de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko podem ser aplicados, considerando um carregamento uniformemente distribuído ao longo do comprimento da viga e as limitações de cada modelo.

ECHES et al (2009) (17) desenvolveram um modelo de elementos finitos para estudar parâmetros que afetam a precisão do disparo, considerando para isso a balística interna por considerar essa fase como a que mais contribui para a dinâmica do tiro.

LITTLEFIELD et al (2002) (18) consideraram o tubo para a modelagem pelo Método dos Elementos Finitos como sendo uma viga de Euler-Bernoulli em balanço, obtendo as matrizes de inércia e de rigidez para as equações de movimento não amortecidas. Para o amortecimento foi feita uma análise modal numérica e utilizado o conceito de amortecimento proporcional de Rayleigh. Posteriormente foi comparado o modelo numérico

obtido com uma análise modal experimental do tubo, validando o modelo para os 2 (dois) primeiros modos de vibrar. Para reduzir os efeitos de dispersão decorrentes do tiro, o ponto foco do seu estudo foi a extremidade livre (boca do tubo) em função de ser o local que possui a maior amplitude quando o tubo está em vibração no seu primeiro modo de vibração. A modelagem foi realizada através do software MATLAB® e validada por teste de impacto modal, feito no tubo isolado e com 3 (três) diferentes configurações de absorvedores de vibrações acoplados na boca do tubo. O resultado com o uso de absorvedores de vibrações apresentou reduções significativas quanto à amplitude de oscilação em torno da posição de equilíbrio estático da extremidade do tubo.

1.6 Objetivo

O objetivo deste trabalho é analisar a vibração do tubo de uma arma automática durante um disparo em rajadas em virtude somente da interação entre o tubo e o projétil, uma vez que elas contribuem para a dispersão dos disparos, bem como reduzir essa vibração através de um atenuador dinâmico passivo de vibrações, ocasionando uma redução de esforços no mecanismo que compõe a sua base e a dispersão causada nos tiros. Com a redução na dispersão, aumenta-se o alcance útil do armamento. Para esta análise será realizada a modelagem do tubo considerando-o como uma viga de Euler-Bernoulli em balanço sujeita a ação da gravidade e a uma carga móvel (o projétil). Para a discretização do tubo será empregado o Método dos Elementos Finitos. Para a geometria externa do tubo, foi considerada a variação dos parâmetros geométricos ao longo do seu comprimento longitudinal, de forma a possibilitar a análise de uma geometria complexa e, até mesmo, de acessórios instalados, desde que estes sejam axissimétricos. Em seguida foi realizada a modelagem do projétil como uma massa móvel com movimento prescrito longitudinal em relação ao tubo, considerando todas as forças transmitidas ao tubo, levando em conta os efeitos gravitacionais, de inércia, centrípeta e de Coriolis. Após, foi feita a modelagem com acoplamento do atenuador passivo de vibrações seguido da otimização dos seus parâmetros por métodos numéricos. Foram realizadas simulações dos modelos do tubo e do projétil acoplados, sem e com o atenuador de vibrações para efeitos de comparação.

1.7 Organização do Trabalho

Este trabalho foi desenvolvido de acordo com a seguinte estrutura:

O capítulo 2 trata da modelagem implementada conforme as referências citadas neste capítulo.

O capítulo 3 expõe os métodos utilizados para resolução numérica do modelo implementado e que possibilitam realizar as simulações e as análises necessárias.

O capítulo 4 apresenta, primeiramente, os resultados que possibilitam validar o modelo implementado em etapas, iniciando por uma análise mais simples (estática), seguindo para a modal e fechando com a dinâmica, todos considerando o perfil do tubo do armamento com uma geometria simples e constante. Em seguida, exibe os resultados para a aplicação do carregamento periódico através do modelo de carga móvel. Após, retrata os resultados para perfis de geometrias variáveis, etapa que possibilita implementar um estudo de caso considerando qualquer geometria de tubo. Para o estudo de caso, é utilizado o tubo do canhão BOFORS 40mm/L70 empregado nos meios navais e dos Fuzileiros Navais da Marinha do Brasil, e também no Exército Brasileiro.

O capítulo 5 apresenta e discute os resultados e as comparações para os modelos sem o acoplamento do atenuador dinâmico de vibrações e com o acoplamento deste em sua extremidade.

E, por fim, o capítulo 6 traz uma conclusão sobre o estudo realizado e sugestões para trabalhos futuros em vistas a dar continuidade na análise do assunto.

2 MODELAGEM

Inicialmente modela-se o tubo da arma desconsiderando o seu peso. Posteriormente introduz-se o carregamento implementado, sendo o modelo de carga móvel o definido.

2.1 Tubo da arma

Algumas simplificações foram empregadas, de forma a primeiramente validar um modelo mais leve computacionalmente e possibilitar avançar gradativamente em considerações diversas futuras. O modelo utilizado considerou um tubo com material isotrópico e em regime elástico linear, com geometria definida de forma que a área da seção transversal do tubo varie ao longo do seu comprimento longitudinal, assim como o seu momento de inércia de área. Esse tubo foi modelado como sendo uma viga em balanço, com a extremidade fixada sendo a parte acoplada à culatra do armamento e a extremidade em balanço como sendo a boca do tubo, assim como feito por (22), (13), (14), (26), (3) e (18). As Figuras 1 e 4 ilustram uma possível configuração para o descrito acima.



Figura 4 – Viga em balanço com carregamento pontual na extremidade livre.

O sistema de coordenadas x-y ilustrado na Fig. 4 será o sistema utilizado como referencial neste trabalho.

Por se tratar de um tubo esbelto, com o seu comprimento longitudinal sendo, no mínimo, 10 (dez) vezes maior que o maior comprimento da seção transversal, foi possível adotar para esse modelo um elemento de viga de Euler-Bernoulli, ou seja, um elemento de viga desconsiderando as deformações decorrentes do cisalhamento sem obter erros significativos na solução aproximada deste modelo. Para tubos com a relação citada com razão menor que 10 (dez), as considerações precisarão ser refeitas, e este modelo reajustado, pois os resultados podem não corresponder à realidade. Importante citar que para este estudo foi considerado um tubo idealizado, de forma que processos de fabricação diversos para tubos sem costura (laminação ou extrusão, por exemplo) podem interferir nas

propriedades do material nas diferentes direções, não podendo o material ser considerado como isotrópico.

Da teoria de mecânica dos materiais para o modelo aplicado neste trabalho, considera-se o conjunto de hipóteses a seguir que possibilitam aproximar os casos reais ao modelo adotado:

- i- troca de energia adiabática na deformação;
- ii- aplicação da carga de modo relativamente lento (ou seja, sem variação da energia cinética);
- iii- para carregamentos concentrados, os efeitos se dissipam ou se ajustam quando as distâncias são, pelo menos, iguais a maior dimensão da seção transversal;
- iv- deformações de ordem de grandeza muito menores que as dimensões do corpo;
- v- ao cessar o carregamento, considera-se que a deformação final seja nula, desprezando a deformação que ficará residual (ou seja, perfeitamente elástico); e
- vi- a relação entre a tensão e a deformação é linear até certo limite de deformação (ou seja, considerando o regime elástico linear).

Para um elemento infinitesimal, sendo m a sua massa, dx o seu comprimento, N a força normal, V a força cortante e M o momento fletor atuantes nas direções x , y e z respectivamente, tem-se que:

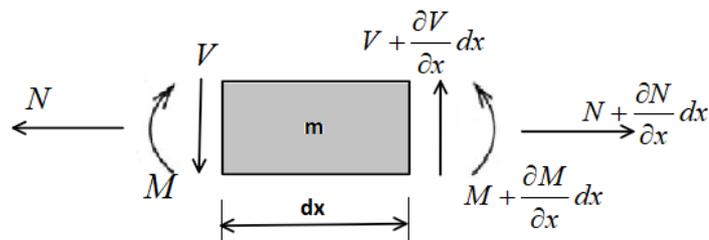


Figura 5 – Elemento infinitesimal de viga com representação dos esforços internos.

Para o equilíbrio de momentos na direção z e de forças na direção y , chega-se na equação diferencial representada pela Eq. 2.1.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) + \rho A_s \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (2.1)$$

sendo

$$M = EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

e

$$m = \rho A_s dx \quad (2.3)$$

onde:

x - distância do engaste à seção transversal;

E - módulo de Young do material;

I - momento de inércia de área;

\bar{v} - deflexão vertical da viga a distância x do engaste;

ρ - massa específica do material;

A_s - área da seção transversal do tubo;

t - tempo; e

$\frac{\partial f}{\partial x}$ - variação do carregamento f na direção x .

A equação 2.1 ilustra o modelo físico adotado para o cálculo da deflexão linear vertical e angular do tubo ao longo do seu comprimento longitudinal, considerando-o como uma viga de Euler-Bernoulli em balanço.

Para o peso do tubo, considerando-o como um tubo de material com massa específica homogênea, foi incluído no modelo como sendo um conjunto de forças uniformemente distribuídas ao longo do tubo.

2.2 Carga Móvel

Para o carregamento a ser aplicado no tubo, tendo como referência os resultados da análise dinâmica para os carregamentos apresentados em (22), foi adotado neste trabalho o carregamento periódico levando em conta a Teoria de Cargas Móveis. Foi desprezado o grau de liberdade horizontal em virtude de não haver carregamento nessa direção, tendo restado somente os graus de liberdade vertical e angular.

Cargas móveis são normalmente definidas como carregamentos aplicados em estruturas e que variam em intensidade tanto no espaço como no tempo. Tais cargas possuem um grande efeito sobre a dinâmica da estrutura a qual são aplicadas, especialmente em altas velocidades (36). Ao analisar um corpo movendo-se sobre uma estrutura, verifica-se que, de acordo com o princípio de d'Alembert, seus efeitos são duplos: o peso, ou efeito gravitacional, do corpo em movimento, e os efeitos inerciais da massa do corpo na estrutura deformada. Para uma solução aproximada, pode-se considerar somente os efeitos da força gravitacional. Porém, uma solução mais apurada exige que os efeitos inerciais sejam considerados, pois são significativos (3).

Ao se considerar que a carga movimentada-se pela viga flexionada, o efeito gravitacional é representado pelo produto entre a massa da carga e a aceleração gravitacional, como na Eq. 2.4, e as forças inerciais apresentam as componentes de coriolis, centrípeta e relativa não nulas, como na Eq. 2.5, devendo ambas ser consideradas para uma abordagem completa. Sendo assim, o efeito total que a carga móvel provoca sobre a viga ao se deslocar sobre a mesma quando flexionada é dado pela Eq. 2.6.

$$f_{grav}(t) = -M_{cm} \cdot g \quad (2.4)$$

$$f_{inercia}(t) = -M_{cm}(\ddot{v}_x + 2\dot{v}'_x v_{cm} + \bar{v}''_x (v_{cm})^2 + \bar{v}'_x a_{cm}) \quad (2.5)$$

$$f_{aplicada}(t) = f_{grav}(t) + f_{inercia}(t) \quad (2.6)$$

sendo:

f_{grav} - força gravitacional que a carga móvel aplica à viga em função do tempo;

t - tempo de aplicação da carga;

M_{cm} - massa da carga móvel;

g - aceleração gravitacional;

$f_{inercia}$ - força de inércia total que a carga móvel aplica à viga em função do tempo;

\ddot{v}_x - aceleração local da viga na direção vertical;

\dot{v}'_x - derivada primeira da velocidade local da viga na direção vertical em relação a posição;

v_{cm} - velocidade da carga móvel;

\bar{v}''_x - derivada segunda da deflexão local da viga na direção vertical em relação a posição;

a_{cm} - aceleração da carga móvel; e

$f_{aplicada}$ - força aplicada considerando ambos os efeitos gravitacional e inercial.

Na Eq. 2.5, para os termos em evidência, o primeiro termo que multiplica a massa da carga móvel refere-se ao efeito da força de inércia, o segundo à força de Coriolis, o terceiro à força centrípeta que a carga móvel efetua ao se deslocar sobre a viga flexionada, e o quarto termo à força devido à aceleração relativa (3).

Para os parâmetros de velocidade e aceleração da carga móvel, pode ser considerado o movimento uniforme em relação ao eixo longitudinal do tubo para a carga móvel, sendo neste caso um movimento de velocidade constante e aceleração nula. Pode, também, ser considerado o movimento uniformemente variado, com a velocidade variando linearmente de acordo com a aceleração, sendo esta constante. Ou ainda, podem ser considerados

movimentos aleatórios, com ambos os parâmetros obtidos através de cálculo balístico interno por outro método.

3 METODOLOGIA

Uma vez obtida a equação que governa o modelo considerado e a do carregamento a ser aplicado, parte-se para o desenvolvimento do modelo de elementos finitos, que compõe o método utilizado para encontrar as soluções desejadas de forma aproximada, mas com uma tolerância razoável. Este método consiste em dividir o domínio analisado em domínios menores, ou elementos, onde em cada uma dessas divisões as variáveis do problema são aproximadas por interpolação dos seus valores fixados no contorno. Assim, é obtido um modelo matemático com as incógnitas representando os valores das variáveis nos contornos dos elementos, chamados de nós.

3.1 Rigidez e Inércia Global

Para obter o modelo de elementos finitos citado acima, foram aplicadas 3 (três) etapas: obtenção da forma fraca da Eq. 2.1 por meio do método de Galerkin; aproximação da geometria do elemento e das variáveis de deslocamento pelo uso de funções de interpolação considerando uma abordagem isoparamétrica; e construção do sistema de equações que representa o modelo.

Aplicando as etapas acima ao modelo obtido em 2.1, a viga é discretizada em elementos com nós em suas extremidades. Como se trata de um modelo de viga unidimensional, os elementos também serão unidimensionais, com os nós em suas extremidades representando os seus graus de liberdade. Neste trabalho serão considerados 2 (dois) movimentos em cada nó, quais sejam, deslocamento vertical e deslocamento angular, atribuindo desta forma 4 (quatro) graus de liberdade para cada elemento. As equações para cada elemento referentes à inércia e à rigidez são dadas, respectivamente, por (3):

$$m_{ij}^e = \int_0^{L_e} \rho(x_e) A_s(x_e) \psi_{ie}(x_e) \psi_{je}(x_e) dx_e \quad (3.1)$$

e

$$k_{ij}^e = \int_0^{L_e} E(x_e) I(x_e) \psi_{ie}''(x_e) \psi_{je}''(x_e) dx_e, \quad (3.2)$$

com as funções de interpolação como sendo (3):

$$\psi_1(x_e) = 1 - 3 \left(\frac{x_e}{L_e} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_e}{L_e} \right)^3, \quad (3.3)$$

$$\psi_2(x_e) = L_e \left(\frac{x_e}{L_e} \right) - 2L_e \left(\frac{x_e}{L_e} \right)^2 + L_e \left(\frac{x_e}{L_e} \right)^3, \quad (3.4)$$

$$\psi_3(x_e) = 3 \left(\frac{x_e}{L_e} \right)^2 - 2 \left(\frac{x_e}{L_e} \right)^3 \quad (3.5)$$

e

$$\psi_4(x_e) = -L_e \left(\frac{x_e}{L_e} \right)^2 + L_e \left(\frac{x_e}{L_e} \right)^3, \quad (3.6)$$

onde:

L_e - comprimento do elemento; e

x_e - posição do nó no tubo no eixo “ x ”.

Considerando o material do tubo como sendo isotrópico, e a geometria com seção transversal reta variando ao longo do seu comprimento longitudinal, as integrais nas Eqs. 3.1 e 3.2 se tornam de resolução analítica muito difícil, uma vez que as funções que descrevem a área da seção transversal do tubo e o seu momento de inércia de área direcionam para uma integral extremamente complicada em ambas as equações. Sendo assim, foi utilizada uma das fórmulas de integração fechada de Newton-Cotes com quadratura de Gauss, que consiste em uma solução numérica complementada por uma classe de técnicas que melhora a estimativa obtida da integração para uma integral definida, de forma que uma função qualquer, ou ainda dados tabulados, podem ser substituídos por uma função aproximadora simples e que seja de integração trivial (37). Calculando-se as integrais para todos os elementos, segue-se para a montagem das matrizes de rigidez local e inércia local para cada elemento.

As matrizes globais de rigidez e de inércia foram obtidas através da aplicação do princípio da superposição, conforme ilustrado na Fig. 6, onde Ei representa a matriz elementar “ i ”, com “ i ” variando de 1 à “ n ”.

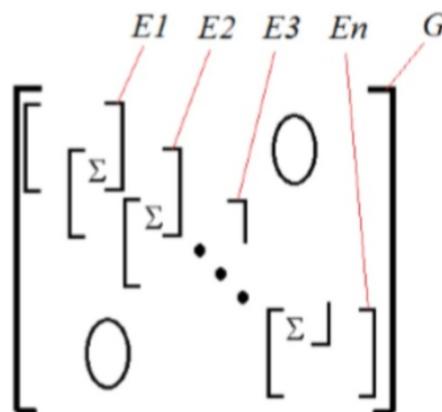


Figura 6 – Ilustração da aplicação do princípio da superposição para obtenção da matriz global (2).

3.2 Peso do Tubo

Após a montagem da matriz de inércia, o vetor de carregamento $\{P\}$ aplicado ao tubo e que representa o peso uniformemente distribuído é obtido através do produto

entre a matriz de inércia $[M]$ e o vetor de aceleração gravitacional $\{g\}$, sendo este um vetor com os coeficientes de ordem ímpar (representando os graus de liberdade verticais de cada nó) contendo o valor do módulo da aceleração gravitacional e os demais coeficientes (representando os graus de liberdade angulares de cada nó) nulos. Assim, esse carregamento assume a forma da Eq. 3.7.

$$\{P\} = -[M]\{g\}. \quad (3.7)$$

Como o eixo de orientação utilizado neste trabalho apresenta o sentido positivo como sendo a vertical de baixo para cima, conforme a Fig. 4, este carregamento precisa ter o sinal negativo para correção da orientação do carregamento em questão.

3.3 Análise Modal e Amortecimento Global

Para a matriz global de amortecimento $[C]$, foi usado o conceito de amortecimento proporcional de Rayleigh, sendo necessária uma análise modal do sistema obtido sem amortecimento e sem forçamento, qual seja:

$$[M]\ddot{v} + [K]v = 0. \quad (3.8)$$

Para a obtenção dos modos de vibração e das frequências naturais correspondentes, considerando como solução genérica para a Eq. 3.8 uma função senoidal como a Eq. 3.9, e aplicando essa solução na própria Eq. 3.8, chega-se ao problema de autovalor e autovetor da Eq. 3.10 que determina os modos de vibrar e as suas frequências concorrentes, com ω sendo a frequência angular natural da estrutura e o vetor A o modo de vibrar associado.

$$\{v\} = \{A\} \text{sen}(\omega t), e \quad (3.9)$$

$$([K] - \omega^2 [M]) \{A\} = \{0\}. \quad (3.10)$$

Após obtenção dos modos de vibração e das frequências naturais correspondentes a cada modo, foram tomadas a primeira e quarta frequências naturais para o cálculo do fator de amortecimento, assim como em (38). Esses parâmetros foram aplicados nas Eqs. 3.12 e 3.13 para determinar os coeficientes que multiplicam a matriz de inércia e de rigidez respectivamente, possibilitando uma combinação linear dessas matrizes e gerando a matriz global de amortecimento.

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K], \quad (3.11)$$

$$\alpha = \frac{2\omega_i\omega_j(\xi_i\omega_j - \xi_j\omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (3.12)$$

e

$$\beta = \frac{2(\xi_j\omega_j - \xi_i\omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (3.13)$$

Os parâmetros α e β são os coeficientes de amortecimento, e ω_i e ω_j são as frequências naturais cujos fatores de amortecimento relacionados são ξ_i e ξ_j .

A equação de estados para a análise dinâmica assume, então, a forma da Eq. 3.14, sendo $[M]$ a matriz de inércia global, $[C]$ a matriz de amortecimento global, $[K]$ a matriz de rigidez global, $\{F\}$ o vetor de forçamento nos graus de liberdade do modelo, e v , \dot{v} e \ddot{v} os vetores de posição, velocidade e aceleração de cada nó da viga discretizada em elementos, respectivamente.

$$[M] \ddot{v} + [C] \dot{v} + [K] v = \{F\}, \quad (3.14)$$

3.4 Condições de Contorno

Uma vez obtidas as matrizes globais que modelam o sistema, aplicam-se as condições de contorno. Para o tubo modelado neste trabalho, as condições de contorno são de deslocamento vertical e angular nulo na extremidade engastada, o que pode ser implementado ao sistema pelo método da eliminação dos graus de liberdade, de acordo com a numeração aplicada aos nós e aos graus de liberdade, simplesmente eliminando as 2 (duas) primeiras linhas e colunas das matrizes globais de inércia, amortecimento e rigidez, bem como as 2 (duas) primeiras linhas do vetor de forçamento, obtendo um novo sistema de equações representativo do modelo para análise dinâmica.

3.5 Carga Móvel

Para o carregamento modelado de acordo com a Eq. 2.6, que considera para a Eq. 2.5 a deflexão, a velocidade e a aceleração como funções da posição e do tempo, os valores para o carregamento aplicado em cada elemento é representado como a soma dos carregamentos transpostos aos nós do referido elemento através da aplicação de funções de interpolação. A Fig. 7 e as Eqs. 3.15 a 3.18 ilustram graficamente e algebricamente o acima transcrito.

$$F_{1E_i} = f_{aplicada}(t) \cdot \psi_1(x_{cmE_i}) \quad (3.15)$$

$$F_{2E_i} = f_{aplicada}(t) \cdot \psi_2(x_{cmE_i}) \quad (3.16)$$

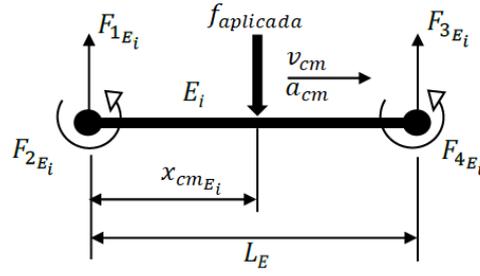


Figura 7 – Força no elemento transferida para os nós (adaptada de (3)).

$$F_{3E_i} = f_{aplicada}(t) \cdot \psi_3(x_{cmE_i}) \quad (3.17)$$

$$F_{4E_i} = f_{aplicada}(t) \cdot \psi_4(x_{cmE_i}) \quad (3.18)$$

Seja $f_{aplicada}$, dado pela Eq. 2.6, com \ddot{v}_x , \dot{v}'_x , \bar{v}''_x e \bar{v}'_x dados pelas Eqs. 3.19, 3.20, 3.21 e 3.22 respectivamente. Considerando a análise no domínio de um elemento i , com j representando os graus de liberdade neste elemento, temos que, após algumas operações algébricas, $f_{aplicada}$ para o elemento i pode ser representado pela Eq. 3.23.

$$\ddot{v}_x = \sum_{j=1}^4 \ddot{v}_{x_j} \cdot \psi_j(x) \quad (3.19)$$

$$\dot{v}'_x = \sum_{j=1}^4 \dot{v}_{x_j} \cdot \psi'_j(x) \quad (3.20)$$

$$\bar{v}''_x = \sum_{j=1}^4 \bar{v}_{x_j} \cdot \psi''_j(x) \quad (3.21)$$

$$\bar{v}'_x = \sum_{j=1}^4 \bar{v}_{x_j} \cdot \psi'_j(x) \quad (3.22)$$

$$f_{aplicada}(t) = -M_{cm} \cdot g - M_{cm} \left[\sum_{j=1}^4 \ddot{v}_{x_j} \psi_j(x) \right] - 2M_{cm} \cdot v_{cm} \left[\sum_{j=1}^4 \dot{v}_{x_j} \psi'_j(x) \right] \quad (3.23)$$

$$-M_{cm} \cdot v_{cm}^2 \left[\sum_{j=1}^4 \bar{v}_{x_j} \psi''_j(x) \right] - M_{cm} \cdot a_{cm} \left[\sum_{j=1}^4 \bar{v}_{x_j} \psi'_j(x) \right]$$

Estes cálculos resultam no vetor local de carregamento em virtude da ação gravitacional e da inércia da carga móvel no tubo. Para a montagem do vetor global de carregamento, considera-se o vetor local de carregamento obtido e armazenado nos graus

de liberdade correspondentes, e nulo nos demais elementos. Como a posição da carga móvel é uma função do tempo, o vetor local varia com o tempo em intensidade e em local de aplicação também, fazendo com que o vetor global de carregamento também varie.

3.6 Análise Dinâmica

Em seguida, para a análise dinâmica do sistema apresentado pela Eq. 3.14 com as condições de contorno impostas, aplicou-se o método implícito de integração direta de Newmark, que transforma o sistema de equações diferenciais em um sistema de equações lineares da forma

$$\hat{K}v^{t+\Delta t} = \hat{R}^{t+\Delta t}, \quad (3.24)$$

onde:

\hat{K} - matriz de rigidez efetiva;

$v^{t+\Delta t}$ - vetor posição no instante de tempo seguinte; e

$\hat{R}^{t+\Delta t}$ - vetor de carregamento efetivo.

Para a aplicação deste método, utiliza-se como aproximação para os vetores de velocidade e posição no instante de tempo seguinte, respectivamente, as Eqs. 3.25 e 3.26.

$$\dot{v}^{t+\Delta t} = \dot{v}^t + \left[(1 - \delta_n) \ddot{v}^t + \delta_n \ddot{v}^{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (3.25)$$

$$v^{t+\Delta t} = v^t + \dot{v}^t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha_n \right) \ddot{v}^t + \alpha_n \ddot{v}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (3.26)$$

onde:

$\dot{v}^{t+\Delta t}$ - vetor velocidade no instante de tempo seguinte;

$\ddot{v}^{t+\Delta t}$ - vetor aceleração no instante de tempo seguinte; e

α_n e δ_n - parâmetros que são utilizados para obter precisão e estabilidade na integração.

Em relação aos parâmetros α_n e δ_n , os valores de 1/6 e 1/2 respectivamente fazem com que as Eqs. 3.25 e 3.26 correspondam ao método de aceleração linear, e os valores de 1/4 e 1/2 ao método de aceleração média constante, método esse proposto por Newmark como um esquema incondicionalmente estável (39).

A matriz de rigidez efetiva é obtida a partir da seguinte combinação das matrizes de rigidez, inércia e amortecimento:

$$\hat{K} = [K] + a_0 [M] + a_1 [C]. \quad (3.27)$$

Como neste trabalho o efeito de inércia da carga móvel é considerado para a viga defletida, as matrizes de rigidez, de amortecimento e de inércia variam com o tempo. Sendo assim, a matriz de rigidez efetiva representada pela Eq. 3.27 varia com o tempo.

O vetor de carregamento efetivo também varia com o tempo, como apresentado na Eq. 3.28.

$$\hat{R}^{t+\Delta t} = R^{t+\Delta t} + [M] (a_0 v^t + a_2 \dot{v}^t + a_3 \ddot{v}^t) + [C] (a_1 v^t + a_4 \dot{v}^t + a_5 \ddot{v}^t). \quad (3.28)$$

Para as constantes a_i utilizadas nas equações 3.27 e 3.28 temos:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha_n \Delta t^2}, \quad (3.29)$$

$$a_1 = \frac{\delta_n}{\alpha_n \Delta t}, \quad (3.30)$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha_n \Delta t}, \quad (3.31)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha_n} - 1, \quad (3.32)$$

$$a_4 = \frac{\delta_n}{\alpha_n} - 1, \quad (3.33)$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta_n}{\alpha_n} - 2 \right), \quad (3.34)$$

$$a_6 = \Delta t (1 - \delta_n), e \quad (3.35)$$

$$a_7 = \delta_n \Delta t. \quad (3.36)$$

A solução desse sistema de equações apresentado pela equação 3.24 fornece um vetor com as posições de cada ponto da malha ao longo do tempo. Se for necessário, é possível obter também, através deste vetor solução, os vetores velocidade e aceleração de cada um desses pontos. As constantes a_6 e a_7 das equações 3.35 e 3.36 são utilizadas nesse cálculo da velocidade e aceleração.

A solução aproximada obtida através da utilização do Método dos Elementos Finitos atende aos deslocamentos verticais e angulares nos nós utilizados na discretização, bem como as reações de apoio que porventura possam existir. Porém, é possível obter os valores de deslocamento linear e angular em qualquer ponto do tubo utilizando as funções de interpolação de terceiro grau usadas na obtenção das matrizes locais de inércia e de rigidez.

3.7 Técnicas de Otimização Numérica

As técnicas de otimização numérica geralmente são aplicadas em problemas em que se deseja maximizar ou minimizar uma função objetivo, às vezes denominada função de custo, de forma que sejam ajustados os parâmetros para que se alcance determinado resultado. No entanto, para estes ajustes, torna-se necessária a consideração de algumas limitações, que podem ser de natureza financeira, espacial, geométrica, material, ou outra a critério do projeto ou do material. Levando isto em conta, torna-se possível encontrar os parâmetros ajustados de um atenuador dinâmico de vibrações a ser instalado na extremidade em balanço do tubo de uma arma para se obter a maior dissipação de energia possível em determinadas condições através da minimização da função objetivo, como o pretendido neste estudo.

Esta maior dissipação de energia pode ser encontrada em diferentes combinações de ajustes dos parâmetros do atenuador dinâmico, resultando em possibilidade de haver mais de 1 (uma) configuração para a resposta desejada. Em outras palavras, a função objetivo pode acarretar em mais de 1 (um) mínimo global para o domínio atribuído. Os algoritmos heurísticos podem convergir para máximos e mínimos globais, porém podem requerer muitas avaliações da função objetivo, tornando este método pouco prático. Os métodos determinísticos, em geral, são métodos computacionalmente mais rápidos do que os métodos heurísticos. Contudo, podem convergir para um mínimo ou máximo local (4). A depender do desempenho computacional, da quantidade de análises a serem feitas, do tempo disponível para realizar as análises da função objetivo e dos parâmetros iniciais dimensionados para o atenuador, por exemplo, escolhe-se entre um método e outro.

Como definição da função objetivo, um dos primeiros passos na implementação de técnicas de otimização numérica, neste estudo foi considerada a função ilustrada na Eq. 3.37.

$$f_{obj} = \left[Max \left(\frac{dv}{dx} + \frac{\dot{v}}{v_{projetil}} \right) \right] - \left[Min \left(\frac{dv}{dx} + \frac{\dot{v}}{v_{projetil}} \right) \right]. \quad (3.37)$$

Nesta função objetivo, o fator dv/dx representa o salto do projétil (ou o desvio angular que o projétil apresenta ao sair da boca do tubo em comparação à direção de mira), o fator \dot{v} a velocidade transversal da boca do tubo no instante em que o projétil sai pela boca do tubo, considerando que saia tangente à linha elástica do tubo, e o fator $v_{projetil}$ a velocidade linear do projétil no mesmo instante. A partir destes dados, foi feita uma comparação entre o máximo e o mínimo entre eles tomando a soma do salto com a razão entre a velocidade transversal do tubo e a velocidade de saída do projétil para cada disparo. Esta combinação possibilitou minimizar em uma única função objetivo 2 (dois) parâmetros, o salto e a velocidade transversal da boca do tubo. Estes parâmetros influenciam diretamente na dispersão do tiro, uma vez que afetam as condições iniciais de

voos do projétil.

Para a consecução da minimização da Eq. 3.37, em virtude do curto tempo necessário para a simulação dos carregamentos aplicados e analisados no modelo implementado neste trabalho (da ordem de 30 segundos), foi utilizado um método heurístico, o *Differential Evolution Method*, ou também chamado de *Algoritmo Genético Modificado*, pois possibilita convergir ao mínimo global para o domínio estabelecido. O método inicia com uma população gerada aleatoriamente no domínio de interesse, que é armazenada em uma matriz P . Esta população é aplicada ao modelo e é verificado o resultado da função objetivo para cada membro desta população. Então, sucessivas combinações e mutações são feitas, criando-se novas populações, e novos resultados da função objetivo. Os resultados são comparados entre si e os melhores valores (como se trata de uma minimização, neste caso serão os menores) fazem com que a população responsável por estes se sobreponha aos demais, atualizando a matriz P . Este cálculo segue como um processo iterativo até que o resultado convirja para a solução ótima ou para um máximo de iterações previamente definido. A Fig. 8 ilustra o processo iterativo descrito (4).

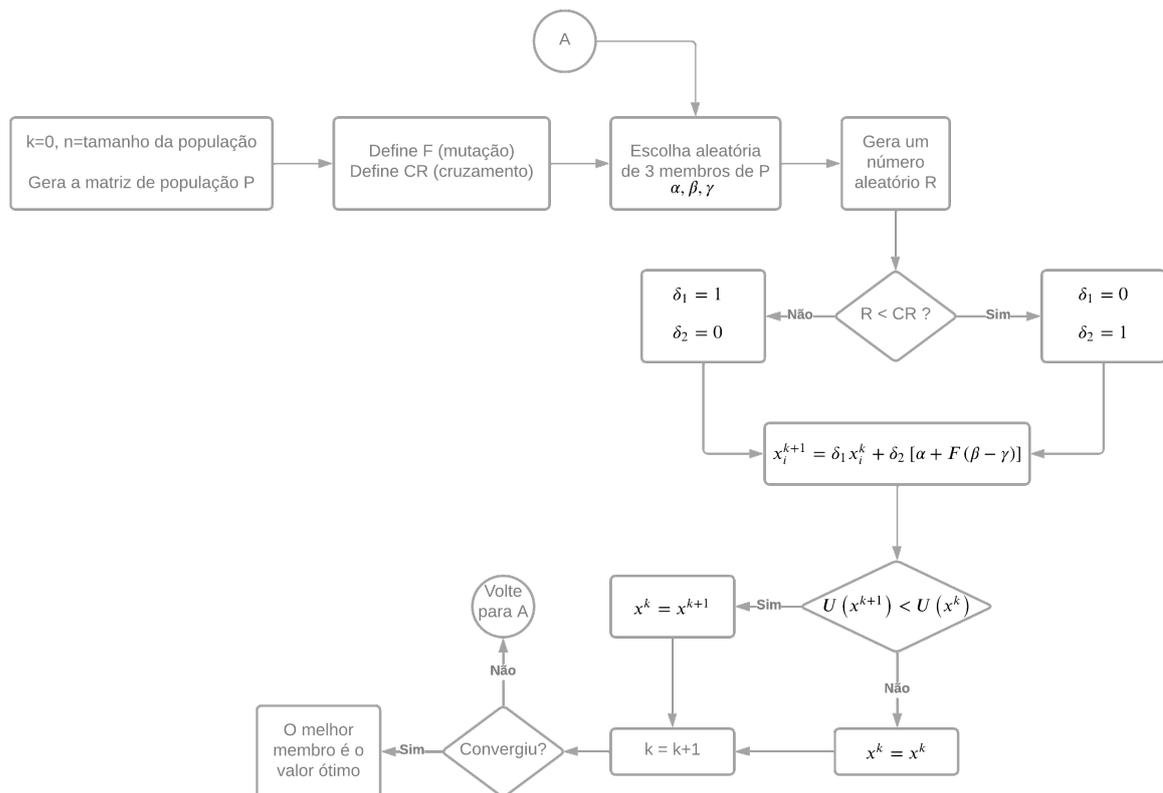


Figura 8 – Processo iterativo DEM (adaptado de (4)).

Detalhando a mutação dos indivíduos da população deste método, uma vez gerada, ou atualizada, a matriz de população P , para cada elemento desta matriz faz-se a escolha de 3 (três) indivíduos aleatoriamente e, então, combina-se estes indivíduos entre si através

de uma operação matemática juntamente ao fator de mutação F . Em seguida, gera-se um número aleatório entre 0 (zero) e 1 (um) para que, a partir de um critério de aceitação, definido no diagrama de blocos como CR , a mutação seja aceita ou não. Caso a mutação não seja aceita, o indivíduo é mantido como sendo o elemento inicial desta etapa. A aceitação da mutação foi definida nesta aplicação do método como sendo uma forma binomial de aceitação, onde os fatores δ_1 e δ_2 já definidos na Fig. 8 indicam a aceitação. Uma outra possibilidade seria a forma randômica normal, onde o δ_1 é gerado como um número aleatório entre 0 (zero) e 1 (um), e o δ_2 é a diferença entre a unidade e o δ_1 . Neste caso, não seria necessária a etapa de aceitação da mutação e os indivíduos sempre teriam mutação genética.

Como o domínio de interesse é informado no início do processo e, em muitos casos, se dá em função de limitações diversas, a população gerada e posteriormente modificada precisa manter-se dentro deste domínio. Uma forma de manter este domínio é eliminando a mutação gerada que ultrapassar os seus limites, mantendo o indivíduo da etapa em questão. Outra forma seria trazendo este indivíduo de fora do limite para a fronteira deste, a fim de que não desperdice nenhuma etapa do processo iterativo, já que a fronteira pode ser um local de mínimo ou máximo. Neste trabalho, foi aplicada esta última forma.

4 VALIDAÇÃO DOS MODELOS

Neste capítulo são apresentados os resultados atingidos e que validam sequencialmente os modelos obtidos, viabilizando dar prosseguimento com o estudo e com o incremento de considerações para aperfeiçoamento destes modelos. Em seguida, são analisados os modelos de viga e de carga móvel ao estudo de caso.

Primeiramente, o tubo foi modelado, utilizando a linguagem de programação FORTRAN, como um elemento de viga de Euler-Bernoulli, conforme já apresentado em capítulo anterior. Os resultados decorrentes da implementação desse modelo são abordados em 2 (duas) principais partes, sendo a implementação inicial validada através de comparação com resultados analíticos para a deflexão nodal oriunda de um carregamento pontual quase-estático na extremidade de um tubo cilíndrico com furo transpassante ao longo do seu comprimento longitudinal representando o calibre, e a continuação validada por meio de comparação com resultados obtidos através da solução analítica do problema de autovalor da Eq. 3.8 como mostrado no capítulo 8 de (1).

Em seguida, analisa-se a implementação da carga móvel considerando os efeitos gravitacionais e inerciais da carga em uma viga biapoiada para validação por comparação com resultado reproduzido em literatura.

4.1 Análise Estática

Os parâmetros físicos e geométricos do tubo que foram considerados nestas simulações iniciais são os apresentados na Tab. 1. Para esta situação, o tubo apresenta 1 (um) único segmento com diâmetro externo constante, assim como o diâmetro interno (calibre).

Tabela 1 – Características gerais do tubo modelado

Parâmetros	Medidas
Diâmetro externo, em m	0,03556
Diâmetro interno (calibre), em m	0,0127
Comprimento longitudinal total, em m	1,016
Módulo de Young, em GPa	200,0
Massa específica do tubo, em kg/m^3	7850,0
Módulo do carregamento, em N	10,0

Após a obtenção das matrizes globais de rigidez e de inércia, utilizando as equações 3.1 a 3.6 e o princípio da superposição ilustrado pela Fig. 6, foi aplicado um carregamento vertical e constante em sua extremidade em balanço (ou seja, no seu último nó) e na direção vertical, como ilustrado na Fig. 4, resultando a modelagem em um sistema de equações na forma

$$[K] \{x\} = \{F\} \quad (4.1)$$

onde $\{x\}$ é o vetor de deflexão dos nós da viga discretizada.

Para validação do modelo, apesar de terem sido obtidas as matrizes de rigidez e inércia, o peso do tubo não foi considerado por simplificação. A solução analítica apresentou a forma das Eqs. 4.2 e 4.3, sendo a primeira para a deflexão linear e a segunda para a angular.

$$y = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \quad (4.2)$$

$$\theta = \frac{Px}{2EI}(2L - x) \quad (4.3)$$

A Tabela 2 mostra o comparativo entre os resultados para as soluções analíticas e numéricas para a deflexão na extremidade da viga, considerando o modelo de elementos finitos com 10 nós, uma vez que esta foi a que obteve o maior desvio relativo absoluto.

Tabela 2 – Comparação para a deflexão linear e angular na extremidade do tubo

Deflexão	Solução analítica	Solução numérica	Desvio relativo (%)
Linear, em m	$-2,26380 \times 10^{-4}$	$-2,26379 \times 10^{-4}$	$4,41735 \times 10^{-4}$
Angular, em rad	$-3,34220 \times 10^{-4}$	$-3,34221 \times 10^{-4}$	$2,99204 \times 10^{-4}$

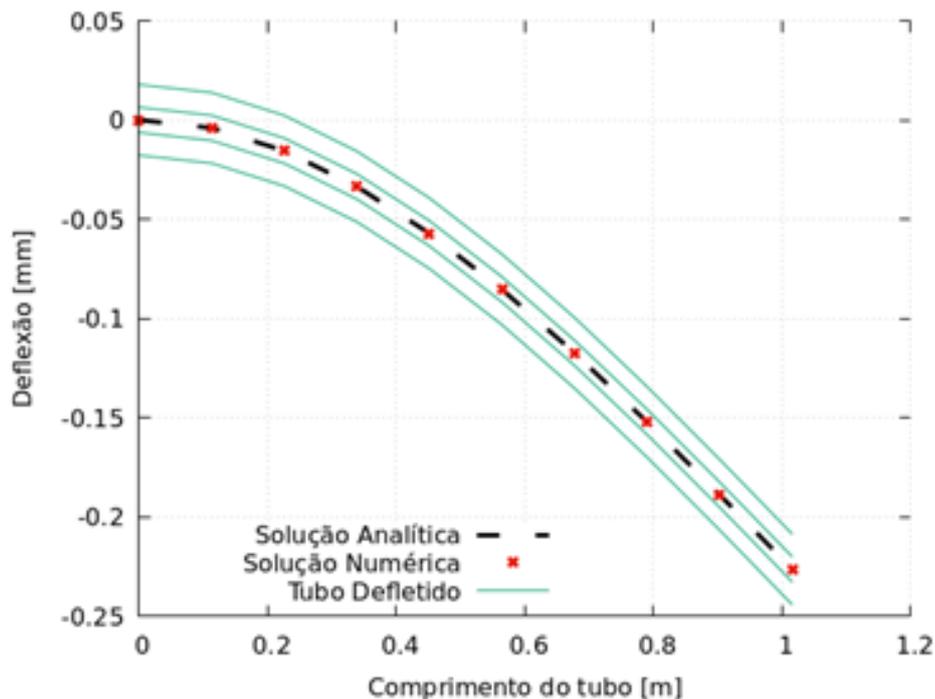


Figura 9 – Comparação entre as soluções ao longo da malha.

Como os resultados numéricos se mostraram coerentes com os obtidos analiticamente, o modelo foi validado e seguiu-se para a próxima etapa. A Fig. 9 ilustra graficamente as duas soluções ao longo do comprimento para efeitos de comparação. Para a análise de convergência quanto ao número de elementos, foram considerados modelos com 10, 20 e 50 nós e, comparando o resultado ao analítico, foi obtido um resultado com diferença máxima menor que 0,001% para a deflexão linear vertical para as 3 configurações de malha, mostrando que a solução convergiu.

4.2 Modos de vibração e frequências naturais correspondentes

Uma vez obtidas as matrizes de rigidez e de inércia do modelo, pode-se obter os modos de vibração do tubo e as suas frequências naturais através da solução do problema de autovalores e autovetores da matriz oriunda da Eq. 3.8.

De acordo com a teoria de sistemas dinâmicos, a primeira frequência natural de um corpo é, em geral, a mais danosa à estrutura, uma vez que possui o maior nível de energia. A frequência de excitação provocada por um armamento de disparo automático dificilmente atinge os níveis das próximas frequências naturais. Por este motivo, e levando em consideração o estudo de (38) para a análise modal em tubos de grandes diâmetros, a análise neste trabalho considerará somente a primeira e a quarta frequências naturais, correspondentes ao primeiro e quarto modos de vibrar do tubo, nesta ordem.

Após realização dos cálculos através do modelo implementado em FORTRAN, foi realizada a análise modal da mesma geometria analiticamente para comparação de resultados, obtendo os dados mostrados na Tab. 3.

Tabela 3 – Resultado para as frequências naturais de interesse do tubo

Frequência Natural, em Hz	Solução via FORTRAN	Solução Analítica	Desvio relativo (%)
1º modo de vibrar	25,83057	25,83100	0,00166
4º modo de vibrar	889,48080	888,21060	0,14301

Sendo os resultados numéricos obtidos coerentes com os resultados analíticos, esta etapa valida a implementação dos fatores de amortecimento e, conseqüentemente, da matriz de amortecimento, que será discutida a seguir. Estes 2 (dois) modos de vibrar do tubo foram utilizados posteriormente no cálculo para a montagem da matriz de amortecimento proporcional.

4.3 Amortecimento e Análise Dinâmica

Visto que foram validados os modelos implementados para a montagem das matrizes de rigidez e de inércia, bem como para a obtenção das frequências naturais e seus respectivos

modos de vibração, utilizou-se o conceito de amortecimento proporcional de Raileigh para a obtenção da matriz global de amortecimento, apresentado na Eq. 3.11. E para a análise dinâmica, foi implementado o caso tratado em (11) para validação da carga móvel considerando os efeitos gravitacional e de inércia.

4.3.1 Matriz Global de Amortecimento

Neste trabalho foram considerados o primeiro e o quarto modos de vibrar para a seleção das frequências naturais ω_1 e ω_4 , como em (38), e os fatores de amortecimento modais ξ_1 e ξ_4 iguais a 2% e 3% nas Eqs. 3.12 e 3.13, como em (40). Com isso, tem-se formado quase completamente o sistema representado pela Eq. 3.14, restando definir o vetor de forçamentos que será aplicado ao sistema.

4.3.2 Carga Móvel Aplicada e Análise Dinâmica

Para a validação da carga móvel aplicada, foi realizada a simulação do caso citado em (11) que considera uma carga com velocidade constante se deslocando através de uma viga biapoiada. Sendo assim, a condição de contorno foi aplicada para deslocamento linear vertical nulo nos graus de liberdade do primeiro e do último nó. Os dados de entrada desta simulação estão na Tab. 4, retirados de (11).

Tabela 4 – Parâmetros da viga biapoiada simulada por (11)

Parâmetros	Medidas
Comprimento, em m	4,352
Módulo de Young, em GPa	205,0
Momento de inércia de área, em $10^{-7}m^4$	5,71
Área da seção transversal, em $10^{-3}m^2$	1,31
Massa da carga móvel, em kg,	21,80
Velocidade da carga móvel, em m/s	27,49

A viga nesta simulação foi discretizada em 15 (quinze) elementos finitos e os fatores utilizados na solução temporal numérica foram, para passos temporais de $10^{-5}s$, as constantes $\alpha = 0,25$ e $\beta = 0,5$, como em (11). A solução apresentada na Fig. 10 corresponde à representação gráfica da viga flexionada quando o tempo de travessia da carga móvel sobre a viga corresponde a 75% do tempo total para completar a travessia, e comparada com a solução apresentada por (11).

Para esta simulação, foi considerada a condição inicial nula para velocidade e posição da viga, desconsiderando a aplicação da força peso para a sua deflexão inicial. Além disso, o amortecimento também foi desconsiderado.

Na simulação realizada por (11), para o instante considerado, o ponto de máxima deflexão se encontra a $0,53L$ de distância da extremidade de onde a carga móvel partiu,

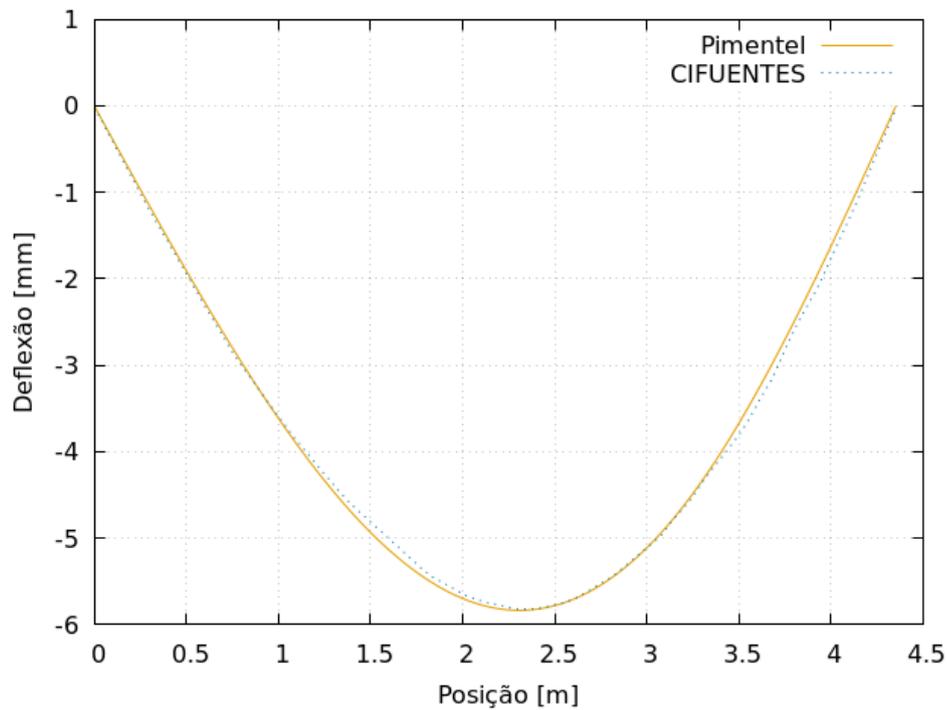


Figura 10 – Deflexão da viga biapoiada no instante que a carga móvel percorreu 75% do tempo total de travessia.

sendo L o comprimento da viga biapoiada e que é percorrido pela carga móvel, o que dá, aproximadamente, $2,307m$. Neste momento, a deflexão obtida é de $-5,842mm$. Na simulação executada com estes parâmetros introduzidos no modelo aqui implementado, o ponto de máxima deflexão encontra-se a $2,300m$ do ponto de partida da carga móvel, com uma deflexão deste ponto atingindo $-5,835mm$, obtida através de interpolação polinomial entre os nós do elemento em questão. A comparação entre estes valores de deflexão mostra um desvio relativo menor que $0,12\%$, validando, desta forma, a implementação da carga móvel com os efeitos inerciais e gravitacionais.

5 ESTUDO DE CASO

Validados os modelos implementados, este trabalho seguiu na direção de simular um disparo realizado pelo canhão multipropósito Bofors 40mm/L70. Trata-se de um armamento utilizado em larga escala tanto pela Marinha do Brasil quanto pelo Exército Brasileiro, de fabricação sueca com projeto original sendo o modelo anti-aéreo 40mm/L60 da década de 1930 e atualizado para multipropósito 40mm/L70 em meados de 1947, após a segunda guerra mundial. Esta atualização consistiu de, entre outros fatores, o aumento da cadência de tiro para 300 (trezentos) tiros por minuto, com um tubo estendido de 60 (sessenta) para 70 (setenta) vezes o calibre da arma. O presente fator, aliado ao fato de que a munição desta versão possui o estojo maior (365mm contra os 310,8mm anteriores) e contendo mais propelente, possibilita que seja alcançada uma maior velocidade de saída do projétil pela boca do tubo, cerca de 1025m/s, enquanto antes era de cerca de 890m/s, representando um aumento de mais de 15% na sua velocidade inicial. Isto permitiu um aumento no alcance máximo de 9,5km para 12,62km para a sua versão terrestre, e para 12,5km para a sua versão naval, representada pela sigla *SAK* (10). A Fig. 11 ilustra o armamento em sua versão terrestre, ou "land service model type A", como definido pelo fabricante *BAE Systems Bofors*.



Figura 11 – Canhão Bofors 40mm/L70 na versão terrestre (5).

O Exército Brasileiro, por meio de sua artilharia, provendo apoio de fogo à Força Terrestre, fazendo a defesa antiaérea ou contra operações navais inimigas em áreas próximas ao litoral ou em águas interiores, utiliza de diferentes meios para a consecução do sucesso da missão e, entre eles, está o canhão Bofors 40mm/L70, como ilustrado na Fig. 12.



Figura 12 – Canhão Bofors 40mm/L70 na versão terrestre (6).

Na Marinha do Brasil, este armamento equipa os meios navais e terrestres nos modelos 40mm/L60 e 40mm/L70 há quase 50 (cinquenta) anos. Em sua versão naval, é o armamento de maior vulto para defesa e ataque em alguns navios de pequeno porte, como em navios-patrulha, instalados na proa, e também equipa alguns navios de maior porte, como corvetas e fragatas, instalados em seus bordos e trabalhando em conjunto com outras armas e sensores que compõem o sistema de combate do navio. A Fig. 13 ilustra a *Fragata União*, onde é possível visualizar algumas de suas armas, incluindo o canhão Bofors 40mm/L70, e sensores. Os Fuzileiros Navais o utilizam na versão terrestre integrado com um radar em suas unidades de busca e vigilância do espaço aéreo. A Fig. 14 mostra o armamento utilizado pelos Fuzileiros.



Figura 13 – Visualização da F45 - Fragata União, com alguns de seus sensores e armas (7).

Atualmente, a *BAE Systems Bofors* comercializa um tipo atualizado deste arma-



Figura 14 – Canhão Bofors 40mm/L70 utilizado pelos Fuzileiros Navais (8).

mento, o canhão 40mm Mk4, apresentado na Fig. 15, e que irá compor o sistema de armas dos navios-patrolha oceânico classe macaé da Marinha do Brasil. Foram realizadas diversas modificações neste modelo com o objetivo de possibilitar se adaptar a diferentes funções e cenários utilizando o mesmo armamento. Contudo, todas as armas aqui citadas possuem em comum uma das suas partes mais importantes, um tubo de 2800mm de comprimento total com um quebra-chamas instalado em sua extremidade livre e fixação por rosca igual em todos os modelos. Portanto, o estudo estrutural realizado neste trabalho, que considera este tubo modelado para aplicação do carregamento balístico, se aplica a todos os modelos citados.



Figura 15 – Canhão Bofors 40mm Mk4 utilizado para adestramento de pessoal no Centro de Manutenção de Sistemas da Marinha.

5.1 Modelo implementado

Nesta análise foi considerada flexível a região do tubo que se apresenta em balanço no armamento, como ilustrado na Fig. 16, onde a seta vermelha representa, no mesmo sentido, o início da região do tubo citada. A Fig. 17, embora seja do tubo do canhão Bofors 40mm/L60, é semelhante ao do canhão Bofors 40mm/L70, e a região considerada flexível neste trabalho está ilustrada a partir da região representada por (10) como colar.



Figura 16 – Ilustração da parte do tubo considerada flexível para a simulação (9).

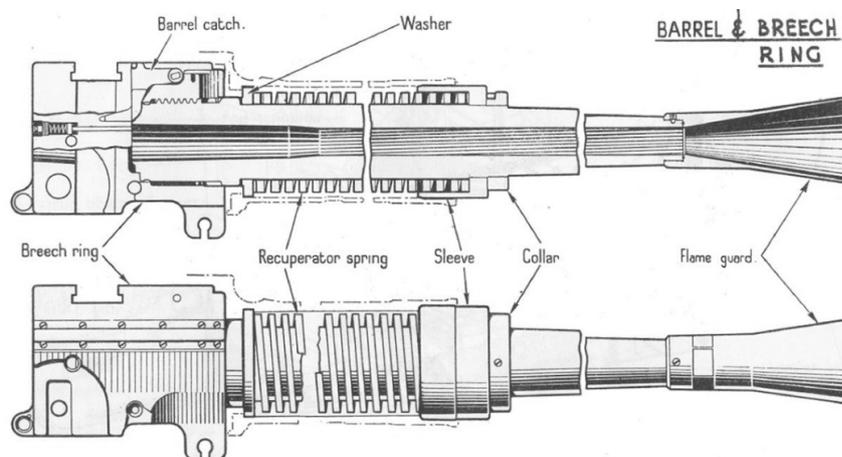


Figura 17 – Desenho da seção transversal do tubo do canhão 40mm/L60 Bofors (10).

O tubo foi modelado em Solidworks, a partir da região considerada, baseado em medições in loco realizadas no Centro de Manutenção de Sistemas da Marinha (CMS), uma organização militar da Marinha do Brasil que, dentre as suas diversas tarefas, realiza a manutenção dos canhões de 40mm empregues em seus meios navais e terrestres. Como se trata de um estudo complementar a um trabalho prévio (3), porém sem pretensão de esgotar o assunto, em que algumas simplificações foram consideradas, as medições não foram realizadas com grande precisão, mas somente de modo a manter o estudo verossímil. Estas medições foram tomadas pela utilização de uma trena de metal e um paquímetro, e uma dessas etapas está exibida na Fig. 18.



Figura 18 – Tubos do canhão Bofors 40mm/L70 em medição no CMS.

A medição e posterior modelagem do tubo no Solidworks possibilitou representar o modelo introduzido ao código em que foi simulado, além de viabilizar a obtenção das propriedades de massa do quebra-chamas acoplado à sua boca. Para esta medição, foram feitas medidas do diâmetro externo em 5 (cinco) pontos do tubo, além da boca e da região engastada. O diâmetro interno é o calibre, 40mm. A Fig. 19 mostra um croqui do desenho técnico do tubo. Nele, foi considerada uma geometria tronco-cônica entre os diâmetros medidos da boca à extremidade fixada, e para esta extremidade foi considerada uma geometria cilíndrica.

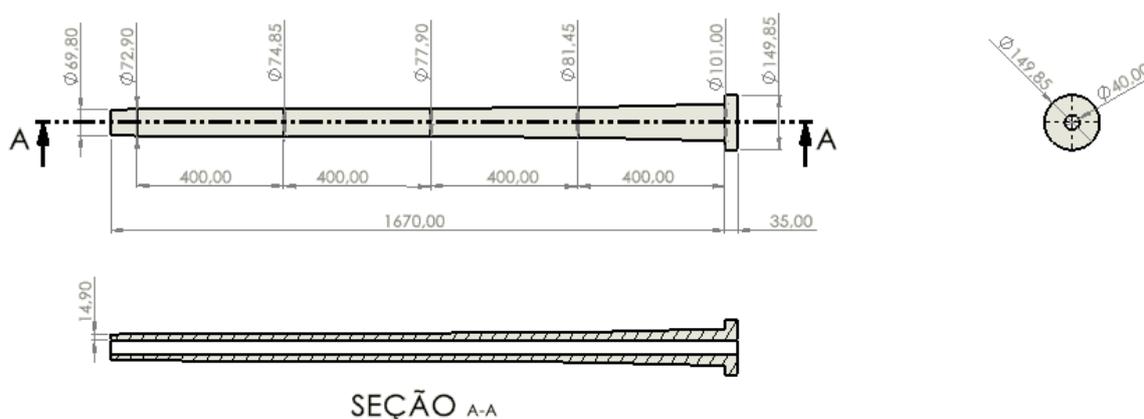


Figura 19 – Croqui de parte do tubo do canhão Bofors 40mm/L70.

A Fig. 20 exibe a montagem do tubo com o quebra-chamas, o qual possui as medidas expostas no croqui da Fig. 21.

Para o carregamento, foram utilizados os dados de balística interna provenientes do software PRODAS, que possibilitou obter a posição do projétil no interior do tubo ao longo do tempo após o disparo, bem como a variação da velocidade e da aceleração deste. Os dados são fornecidos tabelados e consideram um comprimento de tubo para deslocamento do projétil a partir da culatra do armamento, sendo, assim, maior que o

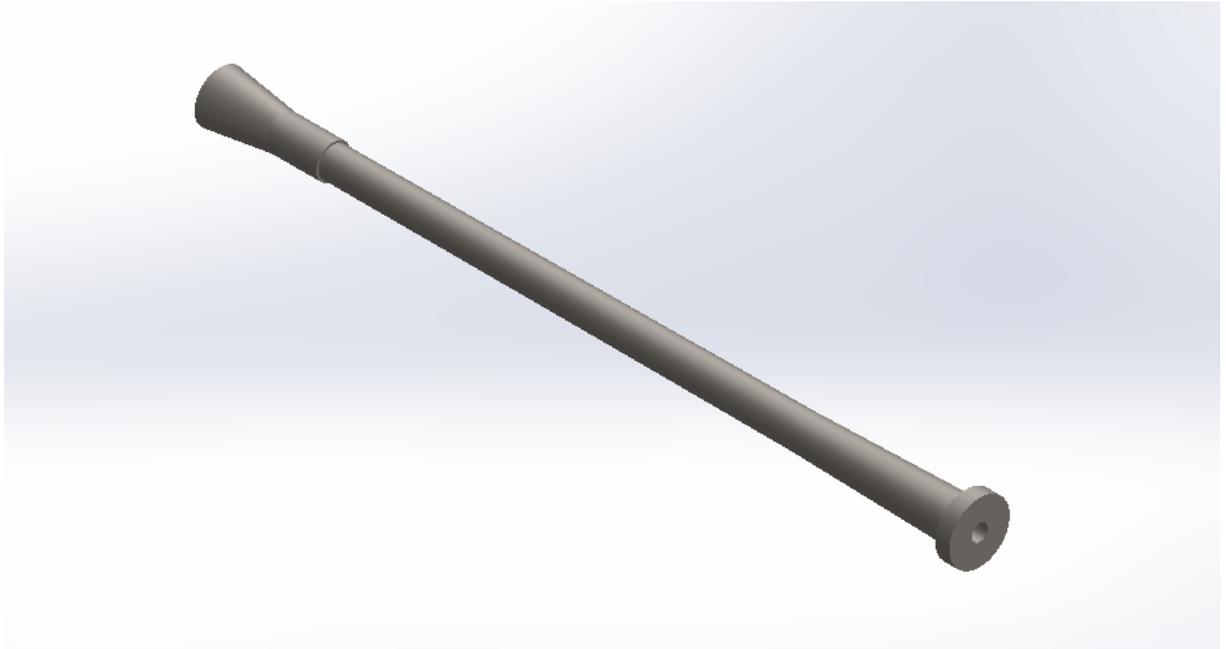


Figura 20 – Montagem do quebra-chamas ao tubo.

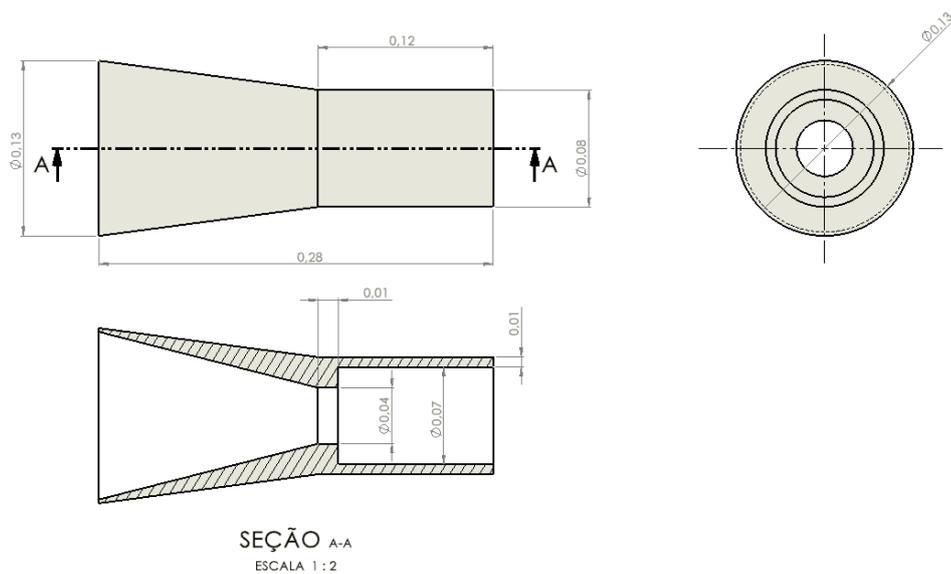


Figura 21 – Croqui do quebra-chamas com as medições tomadas.

modelado neste estudo. Por esse motivo, os dados foram interpolados pelo método de interpolação por spline cúbica e, em seguida, foram ajustados de modo que a posição inicial seja no momento em que o projétil passa pela extremidade engastada do tubo, possuindo velocidade e aceleração não nulos para este ponto. A Fig. 22 mostra as curvas de posição, velocidade e aceleração obtidas através do PRODAS e implementadas na balística interna deste trabalho. Todas as unidades estão no SI.

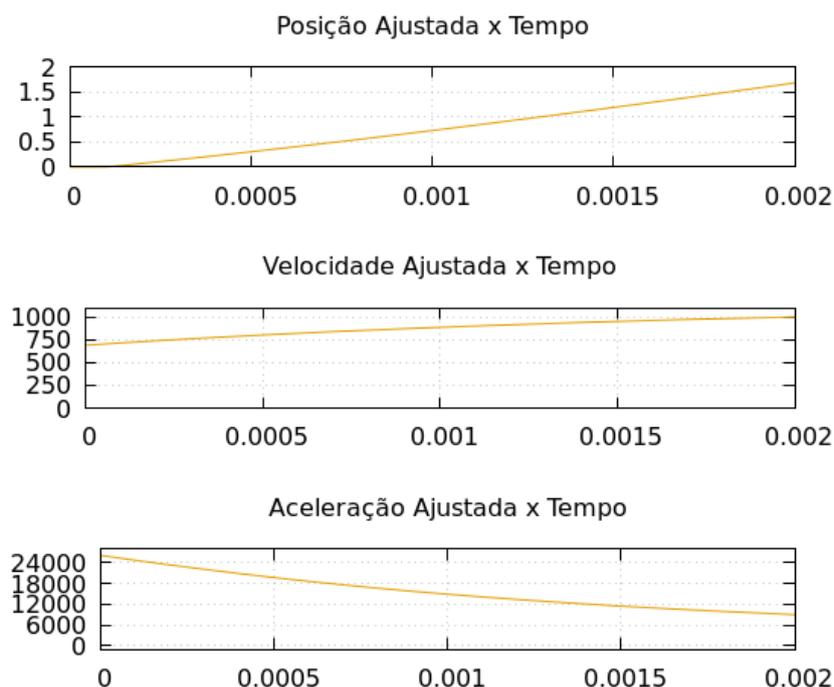


Figura 22 – Curvas de balística interna implementadas.

5.2 Resultados das simulações e discussões de resultados

A análise modal numérica do tubo aqui analisado, considerando nulo o carregamento aplicado sobre este, a sua geometria sem o quebra-chamas e o material sendo o aço comum, possibilitou obter a sua frequência fundamental. Para uma cadência de 300 (trezentos) tiros por minuto, tem-se a aplicação do carregamento devido a interação entre o projétil e o tubo a uma frequência de $5Hz$, contra os aproximadamente $23Hz$ de frequência natural obtidos pela simulação, atestando que a recomendação citada por (20), onde a razão entre a frequência natural do tubo e a cadência de tiro do armamento deve ser acima de 3,5 para que se tenha uma dispersão tolerável, foi considerada durante a fase de dimensionamento do tubo. Seguindo esta recomendação, a frequência natural para uma cadência de $5Hz$ deverá ser acima de $17,5Hz$. A Tab. 5 apresenta as principais características físicas e geométricas do tubo simulado.

Tabela 5 – Parâmetros do tubo do canhão Bofors 40mm/L70

Parâmetros	Medidas
Comprimento longitudinal, em m	1,705
Módulo de Young, em GPa	200,0
Diâmetro interno (calibre), em m	0,04
Massa específica do tubo, em kg/m^3	7850,0

Este modelo foi montado considerando uma malha de 10 (dez) nós para o elemento de viga que representa o tubo, sendo o primeiro nó o da extremidade fixa do tubo. Como

são 2 (dois) graus de liberdade por nó, o modelo possui um total de 20 (vinte) graus de liberdade, sendo os 2 (dois) primeiros fixos. Portanto, foram obtidas 18 (dezoito) frequências naturais com os seus respectivos modos de vibrar para este modelo. A Tab. 6 mostra a primeira e a quarta frequências naturais, pois foram as utilizadas no cálculo do amortecimento proporcional.

Tabela 6 – Frequências naturais do tubo do canhão Bofors 40mm/L70

Parâmetros	Valores obtidos
Primeira frequência natural, em Hz	23,056
Quarta frequência natural, em Hz	668,047

Para a solução do problema no tempo, foi considerado o passo temporal de $10^{-5}s$, uma vez que o projétil, de acordo com a Fig. 22, leva cerca de $2ms$ para percorrer todo o trajeto no interior do tubo modelado, que foi discretizado em 9 (nove) elementos. O fator de amortecimento modal utilizado neste estudo foi de 2% para a primeira frequência e de 3% para a quarta frequência natural, assim como em (40) para estruturas. Para as constantes α e δ das Eqs. 3.25 e 3.26, foram atribuídos os valores $1/4$ e $1/2$ respectivamente, de forma a utilizar um esquema incondicionalmente estável (39). A carga foi aplicada ao tubo na frequência de $5Hz$ durante $1s$, de forma que fossem disparados 5 tiros em rajada, e a simulação teve a duração de $5s$.

A resposta do sistema no tempo para a extremidade em balanço do tubo nos primeiros $2s$ de simulação está representada nas Figs. 23 e 24 para deflexão vertical, deflexão angular e velocidade, respectivamente.

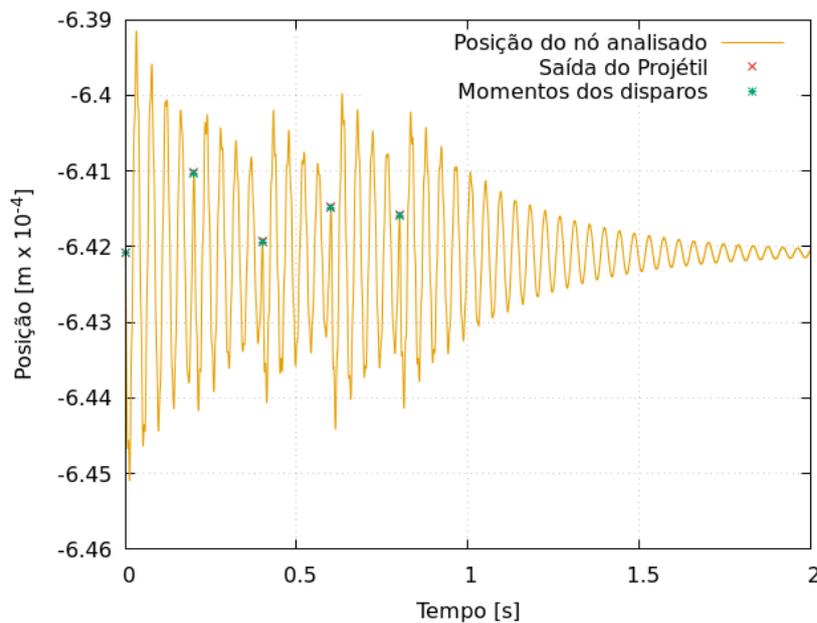


Figura 23 – Deslocamento da extremidade do tubo durante a simulação para 5 tiros.

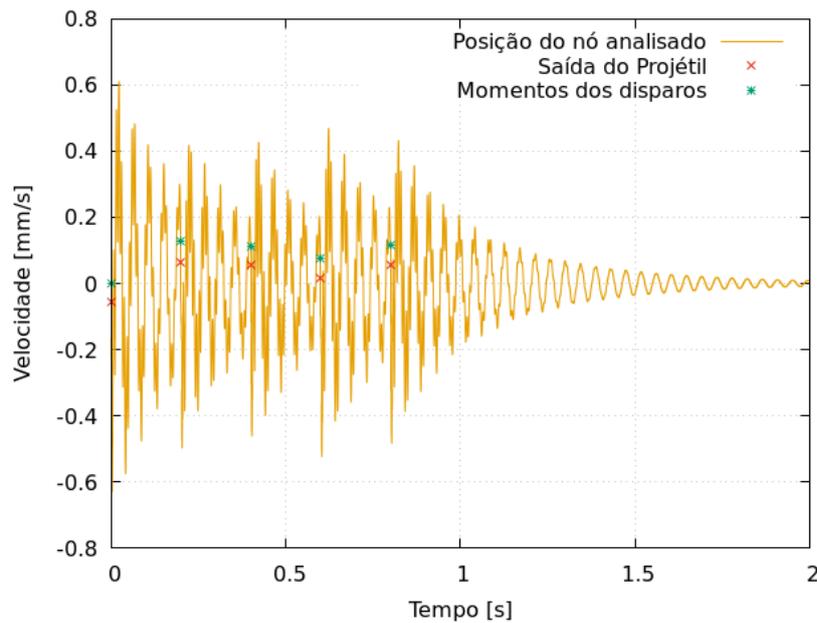


Figura 24 – Velocidade da extremidade do tubo durante a simulação para 5 tiros.

Para estas figuras, a linha cheia representa a respectiva grandeza obtida para a extremidade em balanço do tubo, as cruzes verdes simbolizam os parâmetros no momento em que o disparo foi efetuado, e as cruzes vermelhas refletem os dados calculados no momento em que o projétil alcançou a boca do tubo. Nesta resolução, foi considerado o quebra-chamas acoplado à boca do tubo, de forma que o modelo de elementos finitos implementado nesta simulação admitiu o quebra-chamas como sendo um elemento de massa, não o discretizando em virtude de este não apresentar interação com o projétil. Sendo assim, o quebra-chamas foi introduzido ao modelo de elementos finitos como uma massa de, aproximadamente, $5,93kg$, com momento de inércia de massa de $4,3 \times 10^{-2}kg \cdot m^2$ para o eixo z , considerando o referencial para esses cálculos como sendo o último nó do modelo, ou a boca do tubo. Para os produtos de inércia, estes apresentam valor nulo, considerando a simetria do modelo em relação aos eixos y e z .

O tubo apresentou deflexão máxima na sua boca variando entre $-6,42083 \times 10^{-4}m$ e $-6,41009 \times 10^{-4}m$ para os instantes em que a carga móvel atinge a sua extremidade em balanço, representando os momentos em que o projétil deixa o tubo. Estes momentos ocorrem para o primeiro e segundo disparos respectivamente, e revelam uma amplitude de $1,07400 \times 10^{-6}m$. Analisando todo o tempo da simulação durante a execução dos disparos em rajada, a deflexão da extremidade em balanço do tubo foi maior após o projétil deixar o tubo, tendo a deflexão máxima variado entre $-6,39152 \times 10^{-4}m$ e $-6,45089 \times 10^{-4}m$ e obtidas entre o primeiro e o segundo disparos, dando uma amplitude de $5,93700 \times 10^{-6}m$, quase 6 (seis) vezes maior que a obtida para os instantes do primeiro e segundo disparos. A Fig. 25 mostra em detalhes o que foi descrito.

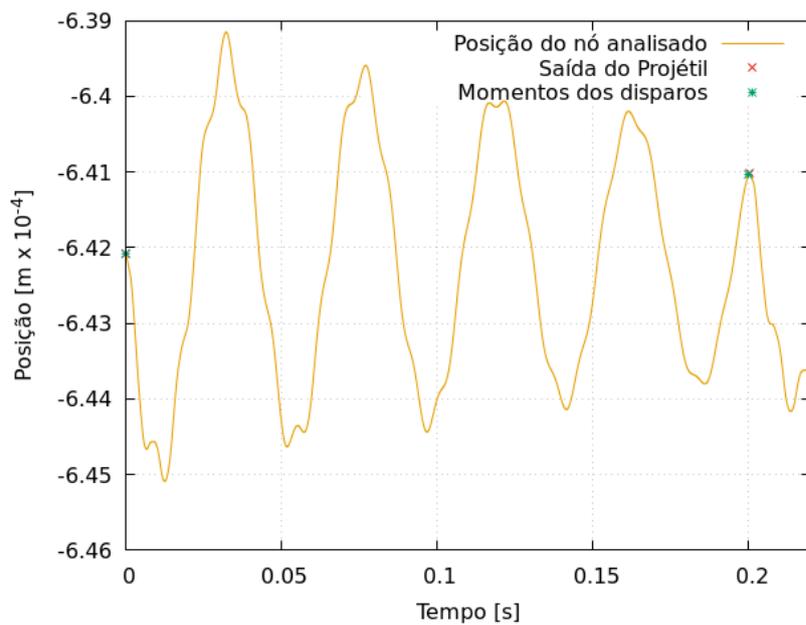


Figura 25 – Posição da extremidade do tubo para o primeiro disparo.

Fato semelhante observou-se em relação à velocidade vertical da extremidade do tubo. A velocidade variou entre $-5,46235 \times 10^{-5} m/s$ e $6,51523 \times 10^{-5} m/s$ entre o primeiro e segundo disparos, respectivamente, ainda considerando o instante em que o projétil atinge a extremidade livre do tubo. Isto confere uma amplitude de $11,97758 \times 10^{-5} m/s$. Para todos os instantes da simulação, a velocidade vertical da extremidade livre do tubo atingiu os valores máximos de $-2,78071 \times 10^{-4} m/s$ e $6,09550 \times 10^{-4} m/s$, acarretando em uma amplitude de $8,87621 \times 10^{-4} m/s$. A Fig. 26 possibilita visualizar o exposto.

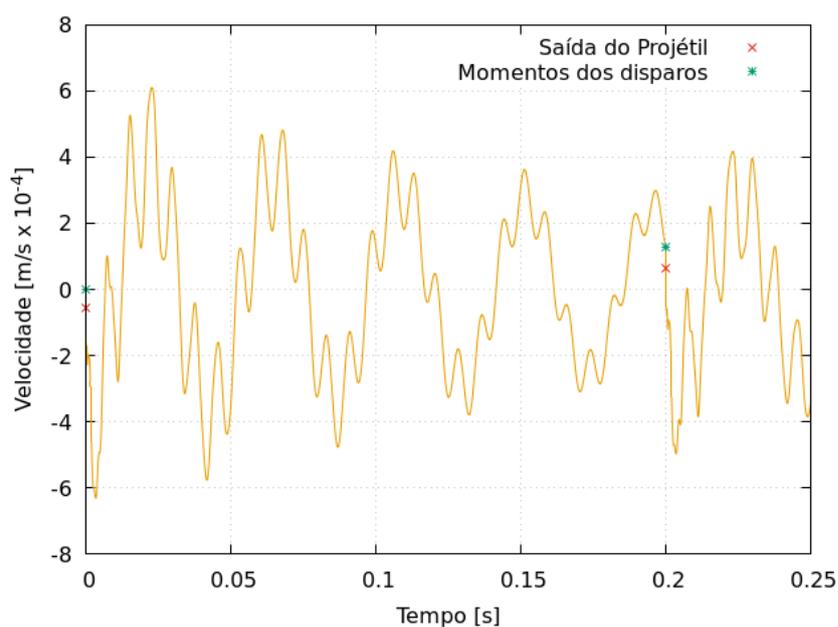


Figura 26 – Velocidade vertical da extremidade do tubo para o primeiro disparo.

Assim como para a posição, estas amplitudes máximas foram alcançadas entre o primeiro e o segundo disparos. Em comparação com a amplitude entre os momentos que o projétil sai do tubo, esta é superior em mais de 7 (sete) vezes a anterior. A Tab. 7 exhibe os valores obtidos para a posição e a velocidade da extremidade livre do tubo nos momentos em que o projétil sai pela boca do tubo.

Tabela 7 – Resultados para a simulação do disparo nos instantes de saída do projétil pela boca do tubo

Disparo	Tempo, em s	Posição, em $m \times 10^{-4}$	Velocidade, em $m/s \times 10^{-5}$
Primeiro	0,00209	-6,42083	-5,46235
Segundo	0,20209	-6,41009	6,51523
Terceiro	0,40209	-6,41924	5,55103
Quarto	0,60210	-6,41471	1,55468
Quinto	0,80210	-6,41575	5,52262

Estes resultados foram, em seguida, comparados com os resultados obtidos da simulação do disparo em rajada de 15 (quinze) tiros, considerando as mesmas condições anteriores em todos os aspectos, exceto pelo fato de que agora a carga foi aplicada ao tubo por um intervalo de 3s. As Figs. 27 e 28 mostram os resultados para a deflexão vertical e velocidade, respectivamente.

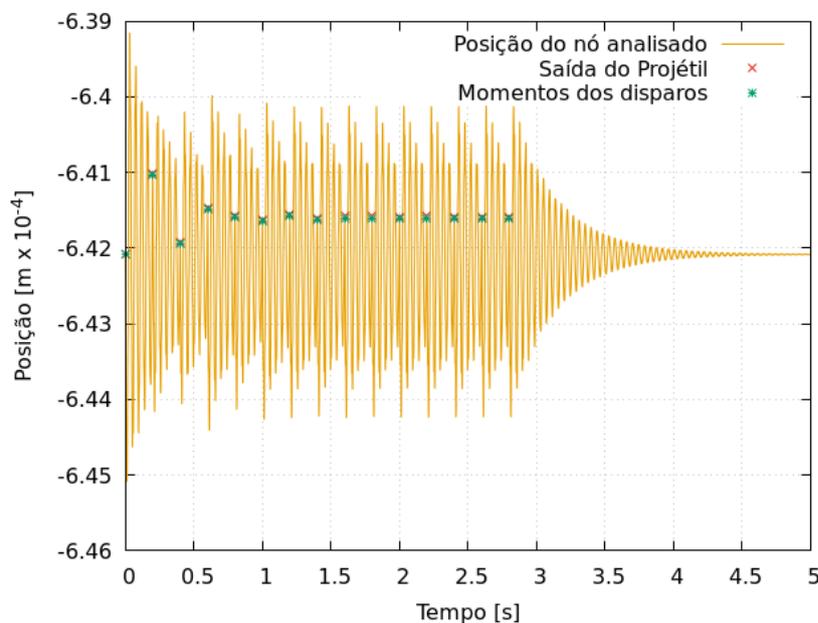


Figura 27 – Deslocamento da extremidade do tubo durante a simulação para 15 tiros.

Esta simulação, que teve a duração total de 5s, assim como a simulação de 5 tiros, possibilitou a análise da dinâmica do tubo em regime permanente e a comparação dos resultados entre os regimes permanente e transiente, sem e com a aplicação do atenuador

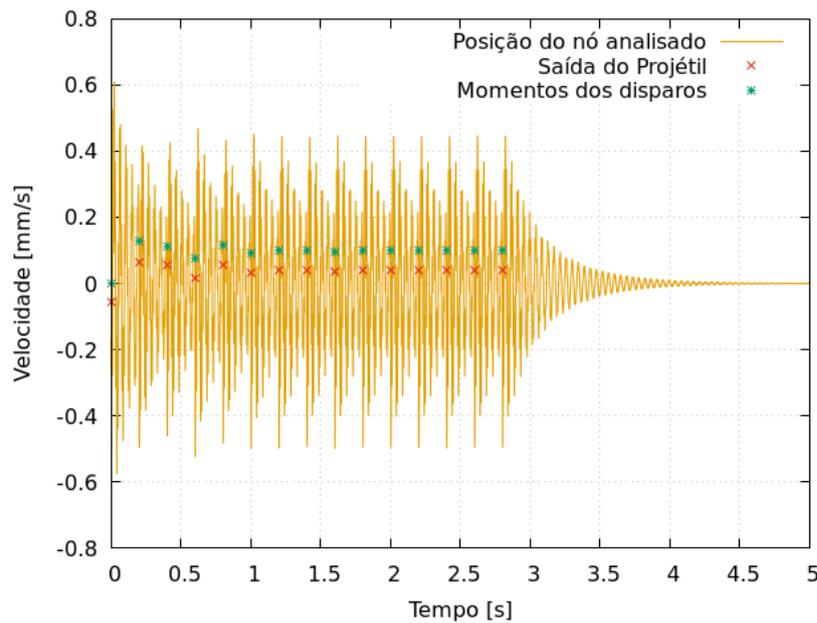


Figura 28 – Velocidade da extremidade do tubo durante a simulação para 15 tiros.

dinâmico passivo. Para os parâmetros do atenuador, utilizou-se os obtidos na otimização para a rajada de 5 tiros.

Nesta rajada de 15 tiros, o tubo apresentou os mesmos resultados de deflexão vertical e velocidade para os 5 tiros iniciais quando comparados aos resultados da simulação de rajada de 5 tiros, como era esperado. Além disso, a deflexão vertical e a velocidade transversal da boca do tubo praticamente estabilizaram após 2,0s do início da rajada, apresentando amplitude máxima de $4,8310 \times 10^{-9}m$ e $3,39227 \times 10^{-7}m/s$ após este período inicial.

5.3 Resultados com o Atenuador Dinâmico de Vibrações Passivo

Para o local de instalação do dispositivo atenuador dinâmico de vibrações passivo, foi selecionada a boca do tubo em virtude de ser o local que possui a maior amplitude quando está no primeiro modo de vibrar (18). Em relação ao seu dimensionamento, foi definido um domínio para os parâmetros de massa, amortecimento e rigidez, conforme o utilizado por (3), e submetido ao método de otimização por algoritmo genético modificado, com uma população de 40 (quarenta) indivíduos para uma rajada de 5 tiros. A Tab. 8 apresenta os limites do domínio para os parâmetros do atenuador dinâmico de vibrações, e os seus parâmetros obtidos após a otimização numérica.

O fator de mutação definido por F na Fig. 8 normalmente varia entre 0,5 e 1, sendo amplamente utilizado o fator 0,8 (4). Para o fator de aceitação da mutação definido por CR na Fig. 8, foi aplicada uma aceitação de 90%.

Tabela 8 – Limites do domínio dos parâmetros e resultado após otimização numérica

Parâmetros	Mínimos	Máximos	Valores obtidos
Massa, em kg	5,0	25,0	23,17
Amortecimento, em $N.s/m$	85,0	$8,5 \times 10^4$	$1,68 \times 10^3$
Rigidez, em N/m	$2,2 \times 10^3$	$2,2 \times 10^9$	$2,2 \times 10^3$

Em relação aos critérios de parada, foi definido um limite de 300 (trezentas) iterações, ou um valor menor ou igual a 10^{-14} para a diferença entre os resultados para a função objetivo dada pela Eq. 3.37 para cada indivíduo da população, ou o momento em que a função objetivo alcançar o valor nulo por qualquer um dos seus indivíduos, o que ocorrer primeiro. O último critério de parada se estabeleceu devido ao fato de que a função objetivo utilizada calcula a diferença entre os valores máximo e mínimo obtidos por todos os indivíduos em cada simulação, e o menor valor que esta função objetivo poderá alcançar é o valor 0 (zero). As Figs. 29 e 30 apresentam os resultados da dinâmica do tubo com o atenuador acoplado à sua boca para uma rajada de 5 (cinco) tiros.

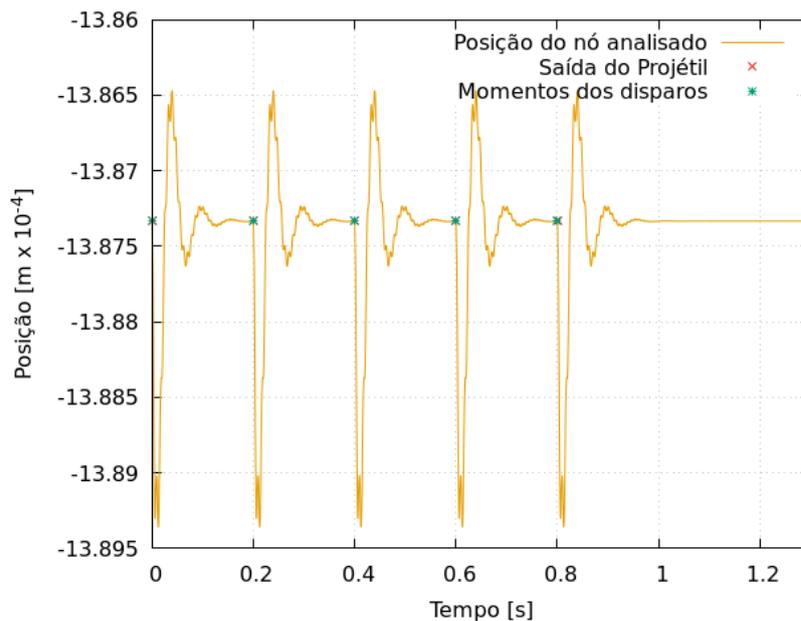


Figura 29 – Deslocamento da extremidade do tubo com atenuador dinâmico de vibrações passivo durante a simulação de 5 disparos em rajada.

Nesta nova configuração, a função objetivo atingiu o valor nulo como resultado, alcançando um de seus mínimos globais e mostrando que a aplicação do método de otimização numérica por algoritmo genético modificado foi satisfatória para a simulação em questão. A deflexão vertical na extremidade em balanço do tubo foi de aproximadamente $-1,38733 \times 10^{-3}m$ para todos os 5 (cinco) instantes em que a carga móvel atinge esta extremidade, representando os momentos em que o projétil deixa o tubo. Com isso, a amplitude da deflexão entre os instantes que o projétil sai do tubo se tornou praticamente

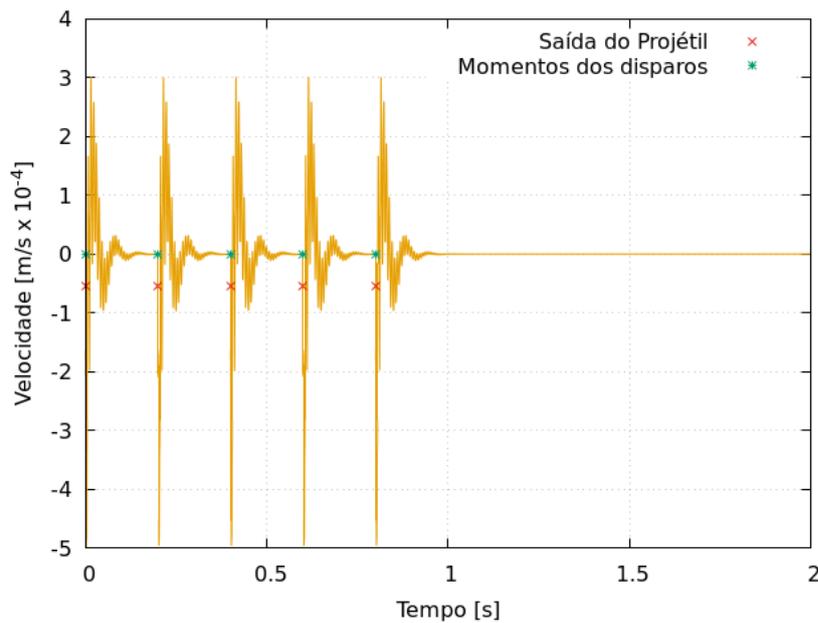


Figura 30 – Velocidade da extremidade do tubo com atenuador dinâmico de vibrações passivo durante a simulação de 5 disparos em rajada.

nula. Isto se deu devido ao fato de que as vibrações foram quase que completamente atenuadas entre os tiros nesta simulação.

Analisando todo o tempo da simulação durante a execução dos disparos em rajada, a deflexão da extremidade em balanço do tubo foi maior após o projétil deixar o tubo, como anteriormente, tendo a deflexão máxima variado entre $-1,38647 \times 10^{-3}m$ e $-1,38936 \times 10^{-3}m$, dando uma amplitude de $2,890 \times 10^{-5}m$.

Sobre a velocidade da sua extremidade no momento em que o projétil deixa o tubo, foram obtidos os valores limites de $-5,45678 \times 10^{-5}m/s$ e $-5,44935 \times 10^{-5}m/s$ para os instantes do primeiro e segundo disparos respectivamente, dando uma amplitude máxima de $7,430 \times 10^{-7}m/s$. Para todo o período de simulação, os limites obtidos foram de $3,23336 \times 10^{-4}$ e $-5,07562 \times 10^{-4}$, resultando em uma amplitude de $8,30898 \times 10^{-3}$.

Para efeitos de comparação, a Tab. 9 mostra a amplitude máxima obtida para a extremidade do tubo sem o atenuador e com o atenuador para a posição e a velocidade do tubo no instante que o projétil sai pela sua boca, e a Tab 10 mostra os limites alcançados durante toda a simulação.

Tabela 9 – Amplitudes máximas da boca do tubo em rajada de 5 tiros para o instante de saída do projétil sem e com o atenuador de vibrações passivo

Parâmetros	Sem o atenuador	Com o atenuador	Desvio (%)
Posição, em m	$1,074 \times 10^{-6}$	$2,40023 \times 10^{-11}$	99,99
Velocidade, em m/s	$11,97758 \times 10^{-5}$	$7,430 \times 10^{-7}$	99,38

Tabela 10 – Amplitudes máximas da boca do tubo em rajada de 5 tiros para toda a simulação sem e com o atenuador de vibrações passivo

Parâmetros	Sem o atenuador	Com o atenuador	Desvio (%)
Posição, em m	$5,9370 \times 10^{-6}$	$2,890 \times 10^{-5}$	386,78
Velocidade, em m/s	$8,87621 \times 10^{-4}$	$8,30898 \times 10^{-3}$	836,09

A comparação entre os instantes que o projétil sai do tubo mostraram uma redução expressiva em relação à amplitude em virtude da atuação do atenuador de vibrações otimizado. Porém, a comparação apresentada na Tab. 10 mostra um aumento na amplitude e isto se deveu ao acréscimo de massa na extremidade em balanço da viga. Em vistas a minimizar este efeito, pode-se acrescentar restrições ao modelo de otimização, de forma a limitar a massa do atenuador, o seu deslocamento, a sua velocidade, ou outro parâmetro da função objetivo.

Importante observar que, após a incorporação do atenuador dinâmico de vibrações passivo, a posição de equilíbrio do tubo se alterou em virtude do peso que foi acrescentado a sua extremidade. Porém, isto não impacta na dispersão do tiro, uma vez que esta é caracterizada pelo agrupamento dos disparos. De forma a melhorar a precisão do disparo, existem correções que podem ser aplicadas para a posição inicial do tubo para compensar o desvio, como elevar o tubo em certa inclinação antes do disparo, por exemplo.

Para a análise da rajada de 15 (quinze) tiros, utilizou-se o atenuador dinâmico passivo com os mesmos parâmetros obtidos para a rajada de 5 (cinco) tiros, uma vez que a dinâmica inicial do tubo é idêntica em ambos os casos, e a deflexão e velocidade máximas ocorrem na fase inicial da simulação. As Figs. 31 e 32 mostram os resultados desta análise.

Nesta simulação, a função objetivo também atingiu o valor nulo como resultado, revelando a aplicação geral do atenuador dinâmico de vibrações passivo para este armamento, qualquer que seja a sua modalidade de operação, considerando mantidas as configurações aqui apresentadas para o armamento (mesmo projétil, mesma cadência de tiro, mesmo tubo, etc).

A amplitude máxima para a posição e velocidade da boca do tubo nos instantes em que o projétil deixa o tubo é a mesma já citada na Tab. 9, uma vez que estes parâmetros alcançam seus valores máximos nos disparos iniciais, e a vibração é praticamente atenuada por completo entre os disparos em virtude do atenuador. O mesmo ocorre para a análise da extremidade do tubo para toda a simulação, análise esta que considera também o comportamento do tubo nos momentos após a saída do projétil.

Os valores obtidos para os parâmetros que compõem a função objetivo, Eq. 3.37, para um dos mínimos globais atingidos pelo método de otimização, considerando uma rajada de 5 tiros, estão expostos na Tab. 11., e a Fig. 33 ilustra um exemplo de atenuador passivo instalado na boca do tubo de uma arma.

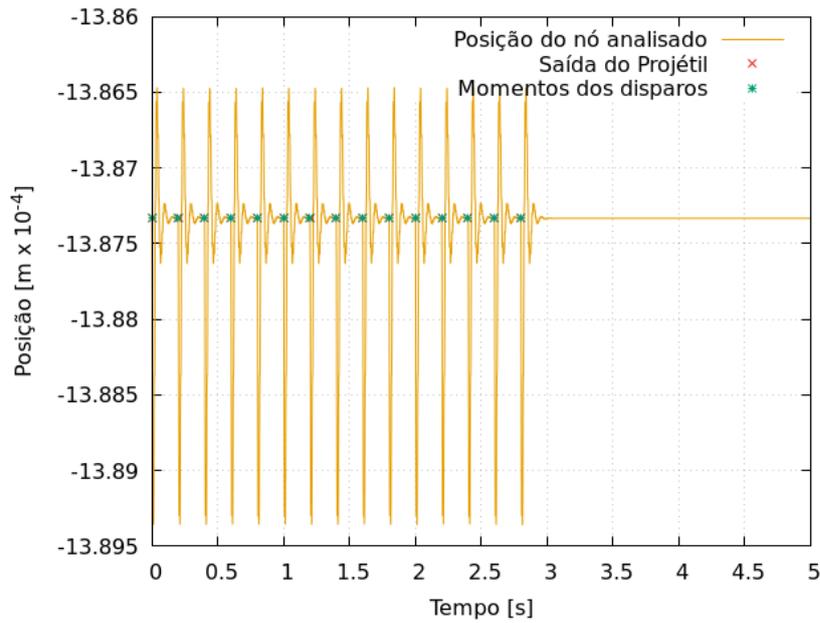


Figura 31 – Deslocamento da extremidade do tubo com atenuador dinâmico de vibrações passivo durante a simulação de 15 disparos em rajada.

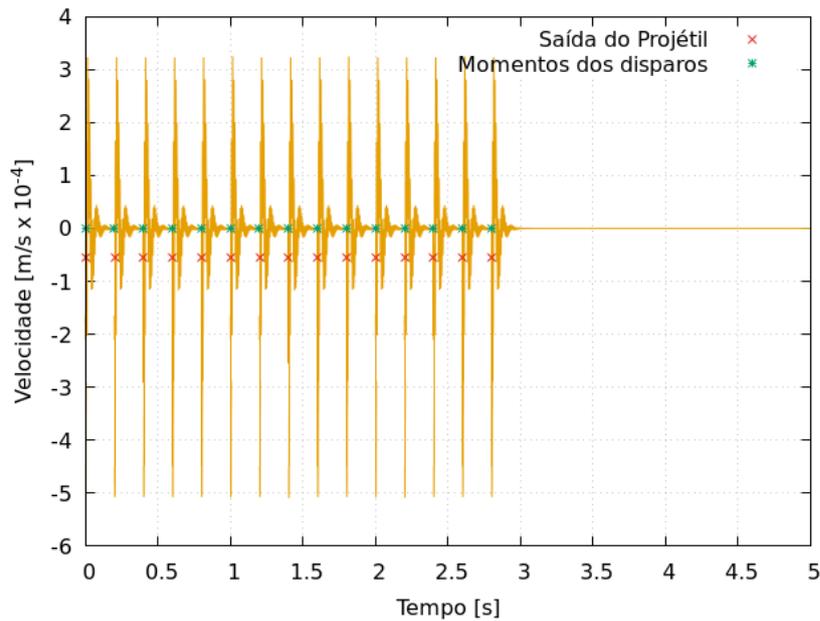


Figura 32 – Velocidade da extremidade do tubo com atenuador dinâmico de vibrações passivo durante a simulação de 15 disparos em rajada.

Tabela 11 – Parâmetros da função objetivo no tempo

Tempo, em s	Salto do projétil, em rad	Velocidade relativa
0,00209	-0,10471	$-5,45334 \times 10^{-8}$
0,20209	-0,10471	$-5,45334 \times 10^{-8}$
0,40209	-0,10471	$-5,44592 \times 10^{-8}$
0,60210	-0,10471	$-5,44603 \times 10^{-8}$
0,80210	-0,10471	$-5,44603 \times 10^{-8}$

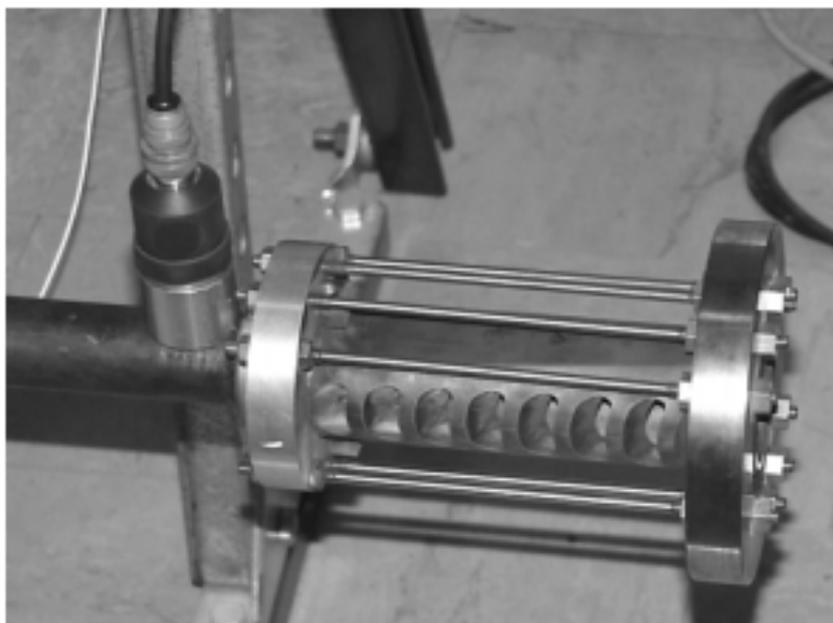


Figura 33 – Exemplo de atenuador dinâmico de vibrações passivo instalado na boca do tubo de uma arma

6 CONCLUSÃO

Os objetivos principais deste trabalho foram, conforme citado na seção de resumo:

1. Analisar as vibrações no tubo decorrentes da interação entre o tubo e o projétil para um armamento de disparo automático, de forma a possibilitar conhecer parte da dinâmica do tiro através da deflexão da extremidade do tubo, deflexão esta que é utilizada como referência para o grau de dispersão que será causado no tiro como consequência desta mesma deflexão;
2. Considerar o tubo de forma que, através da teoria de cargas móveis, fossem obtidos os esforços provocados pelo projétil no tubo ao longo do deslocamento daquele no interior deste; e
3. Reduzir as vibrações causadas pela interação entre o tubo e o projétil decorrentes do disparo por meio de um atenuador dinâmico de vibrações passivo, com parâmetros obtidos por meio de técnicas de otimização, de forma a obter uma dispersão do tiro menor.

Conforme os resultados validados mostraram, o modelo de viga de Euler-Bernoulli, utilizado para representar o tubo do armamento, mostrou-se adequado para as análises em questão, uma vez que o seu comprimento longitudinal é muito maior que o maior comprimento da sua seção transversal, possibilitando desprezar as deformações decorrentes das tensões de cisalhamento. Tal modelo é amplamente utilizado para simulações envolvendo análise dinâmica em armamentos, como mostrado nas referências aqui citadas.

As simulações apresentaram resultados satisfatórios, apresentando soluções coerentes com os da literatura aqui apresentadas para a validação das análises estática, modal e dinâmica, levando em consideração que os atributos físicos e geométricos do tubo neste modelo implementado podem variar ao longo do seu comprimento longitudinal, comprovando que a metodologia aqui utilizada é adequada.

A análise modal numérica do tubo do canhão Bofors $40mm/L70$ revelou que a recomendação de (20) em limitar as cadências admissíveis para um tubo com características já definidas em função da sua frequência natural fundamental foi observada durante o projeto do mesmo.

Durante a etapa de obtenção dos parâmetros do atenuador dinâmico passivo de vibrações por método de otimização numérica para o tubo do canhão Bofors $40mm/L70$, verificou-se que, para a função objetivo aplicada, o método de algoritmo genético modificado atingiu diferentes pontos de mínimo desta função objetivo, mostrando que existe mais

de uma configuração possível para alcançar o propósito aqui pretendido. Estes mínimos, definidos como globais, são alcançados quando a função atinge o valor nulo como resultado para as interações, pois esta função trata de uma diferença entre o máximo e o mínimo dos resultados alcançados para alguns parâmetros específicos definidos em 3.37.

A função objetivo utilizada neste trabalho, Eq. 3.37, considerou a variação no tempo da diferença entre os valores do salto do projétil e da velocidade relativa e toma os valores de máximo e mínimo para o seu cálculo. Em um ponto de mínimo global, esses valores de máximo e mínimo podem apresentar o mesmo número e, sendo assim, anular a diferença. Pelos resultados obtidos neste trabalho para o tubo do canhão Bofors 40mm/L70, apresentados na Tab. 11, observou-se que o salto do projétil é muito maior que a velocidade relativa, mostrando, com isso, uma influência expressiva daquele no resultado da função objetivo e na dispersão do tiro.

Os resultados apresentados nas Figs. 29 e 30 para rajadas de 5 (cinco) tiros, e numericamente representados nas Tabs. 9 e 10, bem como nas Figs. 31 e 32 para rajadas de 15 (quinze) tiros, mostraram que o método algoritmo genético modificado de otimização numérica mostrou-se eficaz.

Comparando as amplitudes para as rajadas de 5 (cinco) e 15 (quinze) tiros antes de acoplar o atenuador dinâmico passivo de vibrações ao tubo do canhão Bofors 40mm/L70, verifica-se que a amplitude máxima ocorre no início da simulação, nos primeiros disparos, retratando que o estudo do regime transiente e a atenuação das vibrações que ocorrem durante este período é suficiente para a diminuição da dispersão, não sendo necessário realizar uma simulação extensa.

A máxima amplitude da boca do tubo foi observada após o projétil deixar o tubo, ocasionando uma espécie de "chicote", sinalizando que a interferência no próximo disparo é devido a esta amplitude elevada. A redução desta amplitude, ou deste "chicote", que ocorre depois da saída do projétil do tubo pode ser um ótimo foco para a redução da dispersão do tiro. Isto se consegue através do aumento da rigidez do tubo, ou do amortecimento da vibração decorrente do disparo, ou de uma combinação de ambos, através de modificações na estrutura do tubo, seja acrescentando materiais em sua estrutura, seja retirando e alterando as características de projeto.

Por semelhança ao apontado por (41), para pequenos ângulos, da ordem de $1mrad$, em alvos a 12,62km de distância, que é o alcance máximo do canhão analisado neste trabalho, o desvio linear é da ordem de 12,6m. Como a Tab. 11 mostrou, o salto do projétil com o atenuador dinâmico de vibrações acoplado à extremidade do tubo é de $-0,10471rad$, mostrando que a dispersão do tiro pode ser considerada significativa para os resultados obtidos nestas simulações.

O estudo em questão possibilitou obter diversas considerações acerca da análise

dinâmica do tubo de um armamento automático, com resultados consistentes. Porém, algumas simplificações se fizeram necessárias para esta abordagem, o que indica que o caminho natural para a continuidade deste trabalho seja a aprimoração deste modelo através da inclusão de considerações tais como:

- Considerar a variação das características físicas e geométricas do tubo com a temperatura e o impacto na dinâmica do tubo;
- Utilizar dados de balística experimental para os parâmetros de balística interna, de forma a possibilitar uma comparação com o modelo aqui utilizado;
- Implementar um sistema de atenuador de vibrações ativo, uma vez que o tempo de atuação se dá entre os disparos, que, no caso do armamento considerado neste trabalho, com cadência de 300 (trezentos) tiros por minuto, é de pouco menos de 0,2s (como exemplo de atenuador ativo, tem-se a utilização de furos no quebra-chamas com abertura controlada pelo atuador, ou a utilização de eletroímãs que induzem forças magnéticas de acordo com as excitações do tubo);
- Considerar as consequências decorrentes da força a qual o tubo é submetido após a saída do projétil devido ao efeito dos gases decorrentes da queima do propelente na boca do tubo e verificar a forma como isto influencia nas vibrações do tubo;
- Realizar a análise modal experimental para validar os parâmetros modais implementados neste estudo.

REFERÊNCIAS

- 1 RAO, S. S. *Vibrações Mecânicas*. 4. ed. São Paulo, SP, BRA: Pearson Education do Brasil, 2009. 424 p.
- 2 GRUZMAN, M. *Notas de aula do curso de vibrações*. Rio de Janeiro, RJ, BRA: [s.n.], 2022.
- 3 MICHELON, M. A. *Vibrações em tubos flexíveis de armamentos ocasionadas pelo disparo*. 117 p. Mestrado em Engenharia Mecânica — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2018. 18 dez. de 2018. Disponível em: <http://www.ime.eb.mil.br/images/arquivos/pos-graduacao/mecanica/2018_Dissertacao_Matheus_A_Michelon.pdf>.
- 4 COLAÇO, M. J.; ORLANDE, H. R.; DULIKRAVICH, G. S. Inverse and optimization problems in heat transfer. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 28, p. 1–24, 2006.
- 5 WIKIPEDIA. *Bofors 40 mm Automatic Gun L/70 - Wikipedia*. 2023. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Bofors_40_mm_Automatic_Gun_L/70>. Acesso em: 10 janeiro 2023.
- 6 COMANDOS EDITORIAL. *Operacional*. 2023. Disponível em: <<https://www.revistaoperacional.com.br/esacosaae-realiza-exercicio-de-tiro-real-no-estande-do-centro-de-avaliacoes->>. Acesso em: 10 janeiro 2023.
- 7 REDAÇÃO FORÇAS DE DEFESA. *VÍDEO: Projeto Fênix - Fragata União faz teste de sistema de armas - Poder Naval*. 2023. Disponível em: <<https://www.naval.com.br/blog/2022/05/10/video-projeto-fenix-fragata-uniao-faz-teste-de-sistema-de-armas/>>. Acesso em: 10 janeiro 2023.
- 8 SIMPLE MACHINE. *PAT 40 mm L-70 BOFORS sa LRU - Page*. 2023. Disponível em: <<https://www.paluba.info/smf/index.php?topic=4536.0>>. Acesso em: 10 janeiro 2023.
- 9 LUIZ PADILHA. *BAE Systems Bofors AB: canhão naval Bofors 40 Mk4 – Defesa Aérea & Naval*. 2023. Disponível em: <<https://www.defesaareanaval.com.br/defesa/bae-systems-bofors-ab-canhao-naval-bofors-40-mk4-amp>>. Acesso em: 10 janeiro 2023.
- 10 GANDER, T. *The Bofors Gun*. [S.l.]: Pen and Sword, 2013.
- 11 CIFUENTES, A. O. Dynamic response of a beam excited by a moving mass. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, v. 5, n. 3, p. 237–246, 1989.
- 12 O'NEIL, D. *The Optimization of Rifle Barrel Harmonics*. Tese (Doutorado) — The University of Vermont, 2022.
- 13 QUEROGA, J. P. C. *Metodologia para a Obtenção da Curva de Dispersão em Função da Razão de Frequências para Tubos de Armas Automáticas*. 48 p. Monografia (Bacharel em Engenharia Mecânica e de Armamento) — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2021.

- 14 CHATURVEDI, E. Numerical investigation of dynamic interaction with projectile and harmonic behaviour for t-finned machine gun barrels. *Defence Technology*, Elsevier, v. 16, n. 2, p. 460–469, 2020.
- 15 LIENNARD, M. *Dynamique des tubes parcourus à grande vitesse: influence de la géométrie des tubes et leur environnement sur la justesse et la dispersion*. Tese (Doutorado) — Université d'Orléans, 2015.
- 16 HUA, H.; LIAO, Z.; SONG, J. Vibration reduction and firing accuracy improvement by natural frequency optimization of a machine gun system. *Journal of Mechanical Science and Technology*, Springer, v. 29, n. 9, p. 3635–3643, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s12206-015-0807-5>>.
- 17 ECHES, N.; COSSON, D.; LAMBERT, Q.; LANGLET, A.; RENARD, J. Modelling of the dynamics of a 40 mm gun and ammunition system during firing. In: *7th European LS-DYNA conference, DYNAmore GmbH, Germany*. [S.l.: s.n.], 2009.
- 18 LITTLEFIELD, A.; KATHE, E.; MESSIER, R.; OLSEN, K. *Gun Barrel Vibration Absorber to Increase Accuracy*. New Jersey, 2002. 19 p.
- 19 DURSUN, T.; BüYÜKCİVELEK, F.; UTLU Çagrihan. A review on the gun barrel vibrations and control for a main battle tank. In: *Defence Technology*. Turkey: Science Direct, 2020. p. 353–359. 29 jul. de 2019. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214914716301234>>.
- 20 USAMC. *Research and Development of Materiel - Engineering Design Handbook - Guns Series Gun Tubes*. Washington, 1964. Disponível em: <<https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/AD0830297.pdf>>.
- 21 HUBER, B. *Influence de facteurs géométriques du tube sur la dynamique et la précision des tirs*. Tese (Doutorado) — Institut polytechnique de Paris, 2019.
- 22 PIMENTEL, M. D.; TAVARES, B. da S.; BASSI, A. A. Investigação da relação entre a dispersão do tiro e a razão de frequência do tubo. In: *Associação Brasileira de Ciências Mecânicas e Engenharia*. Brasil: ABCM, 2022. 07 ago. de 2022.
- 23 MEDEIROS, E. F.; CEZARO, A. D.; CEZARO, F. T. D. Métodos iterativos de regularização para identificação do coeficiente de rigidez na equação de euler-bernoulli para vigas. In: *Trends in Computational and Applied Mathematics [online]*. Brasil: SBMAC, 2022. p. 363–382. 27 jun. de 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.5540/tcam.2022.023.02.00363>>.
- 24 MARTINS, A. D.; MOLTER, A.; PETERSEN, C. Z. Utilização do método de rayleigh-ritz para encontrar soluções para o modelo da viga de euler-bernoulli. *Brazilian Journal of Development*, v. 6, n. 4, p. 19846–19858, 2020.
- 25 WERNECK, L. de P.; ARAÚJO, V. A.; FARIA, Y. T.; FERNANDES, W. L. Estimativa da frequência fundamental de vibração em vigas a partir da teoria da linha elástica associada ao quociente de rayleigh. *Brazilian Journal of Development*, v. 6, n. 7, p. 50450–50470, 2020.
- 26 BRITO, G. D. D. C. *Métodos para a análise modal de tubos de armamento automático*. 76 p. Monografia (Bacharel em Engenharia Mecânica e de Armamento) — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2019.

- 27 PETER, H. *Mechanical Engineering: Principles of Armament Design*. [S.l.]: Trafford on Demand Pub, 2006. ISBN 9781412027656.
- 28 CARLUCCI, D.; JACOBSON, S. *Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition, Third Edition*. [S.l.]: CRC Press, 2018. ISBN 9781351678667.
- 29 APPI, J. N.; CARRER, J. A. M.; LACERDA, L. A. de. Análise estática de vigas de euler-bernoulli.
- 30 CRUZ, G. G.; SOUZA, C. P. G. de. Análise comparativa das teorias de euler-bernoulli e timoshenko via método das diferenças finitas com implementação computacional em scilab. *Revista Tecnologia*, v. 39, n. 1, p. 1–12, 2018.
- 31 RAMOS, A. d. M. R. S.; AMARAL, L. A. do; SOUZA, P. R. de; PINHEIRO, V. P.; NEVES, N. S. das; CANDIDO, D. C. de M. Análise dinâmica do modelo de viga de euler-bernoulli via método das diferenças finitas. *Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica*, v. 4, n. 1, p. 21–39, 2018.
- 32 COSME, C. M. M.; MERCHED, P. G. C. Estudo comparativo entre os modelos de vigas de euler-bernoulli e de timoshenko. In: *13ª SEMANA DE CIÊNCIA & TECNOLOGIA 2017-CEFET-MG*. [S.l.: s.n.], 2017.
- 33 FRANCO, B. C.; CHONG, W. Análise dinâmica de uma viga de euler-bernoulli submetida a impacto no centro após queda livre através do método de diferenças finitas. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 4, n. 1, 2016.
- 34 MONTEIRO, A. B.; WOLENSKY, A. R. V.; CHRISTOFORO, A. L. Avaliação dos deslocamentos em vigas pelo método dos elementos finitos. *Ciência & Tecnologia*, v. 5, n. 1, 2013.
- 35 CARRER, J.; MANSUR, W.; SCUCIATO, R.; FLEISCHFRESSER, S. Analysis of euler-bernoulli and timoshenko beams by the boundary element method. In: *10th World Congress on Computational Mechanics*. [S.l.: s.n.], 2012.
- 36 FRÝBA, L. *Vibration of solids and structures under moving loads*. [S.l.]: Springer science & business media, 2013. v. 1.
- 37 CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. Quadratura de gauss. In: _____. *Métodos Numéricos para Engenharia*. 5ª. ed. São Paulo: McGraw-Hill Companies, Inc, 2011. p. 534–540.
- 38 BASSI, A. A.; ANDRADE, B. L. B. d.; FERNANDO, R. d. S. Análise inicial da dinâmica do tiro de um morteiro de alma lisa. 2008.
- 39 BATHE, K.-J. Solution of equilibrium equations in dynamic analysis. In: _____. *Finite Element Procedures*. 2ª. ed. Watertown: Prentice Hall, Pearson Education, Inc., 2014. p. 534–540.
- 40 FILHO, A. A. *Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE / análise dinâmica*. 1ª. ed. São Paulo, SP, BRA: Editora Érica Ltda., 2005. 139–142 p.

41 ROSA, R. L. de Oliveira da. *Estabilização ativa para sistema de armas montado em viatura com a finalidade de atuar quando os disparos são feitos com a viatura parada*. 156 p. Mestrado em Engenharia Mecânica — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2021. 29 jan. de 2021. Disponível em: <http://www.ime.eb.mil.br/images/arquivos/pos-graduacao/mecanica/_2021_Estabilizacao_Ativa_para_Sistema_de_Armas_Montado_em_Viatura_com_a_finalidade_de_atuar_quando_os_disparos_sao_feitos_com_a_viatura_parada.pdf>.