

**MINISTÉRIO DA DEFESA  
EXÉRCITO BRASILEIRO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**LEANDRO SILVA BARROS**

**ESTIMAÇÃO DE ESTADOS PARA APLICAÇÕES EM CONTROLE DE  
VEÍCULOS MILITARES**

**RIO DE JANEIRO  
2025**

©2025

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro – RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

Barros, Leandro Silva.

Estimação de Estados para Aplicações em Controle de Veículos Militares /  
Leandro Silva Barros. – Rio de Janeiro, 2025.

90 f.

Orientador(es): Elias Dias Rossi Lopes e Daniel Henrique Braz de Sousa.

Dissertação (mestrado) – Instituto Militar de Engenharia, Engenharia Mecânica,  
2025.

1. Estimação de Estados. 2. Dinâmica Veicular. 3. Veículos Militares. 4.  
Filtro de Partículas. 5. Filtro de Kalman Estendido. 6. Estimação de Estado por  
Horizonte Móvel. i. Lopes, Elias Dias Rossi (orient.) ii. Sousa, Daniel Henrique  
Braz de (orient.) iii. Título

LEANDRO SILVA BARROS

ESTIMAÇÃO DE ESTADOS PARA APLICAÇÕES EM CONTROLE DE  
VEÍCULOS MILITARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador(es): Elias Dias Rossi Lopes, D.Sc.  
Daniel Henrique Braz de Sousa, D.Sc.

Rio de Janeiro

2025

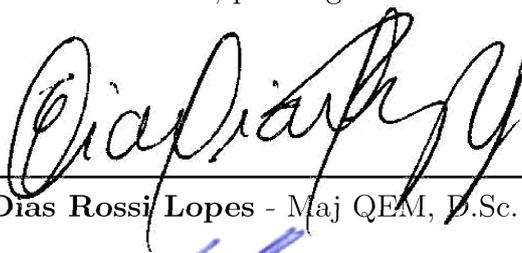
**LEANDRO SILVA BARROS**

**Estimação de Estados para Aplicações em Controle de Veículos Militares**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

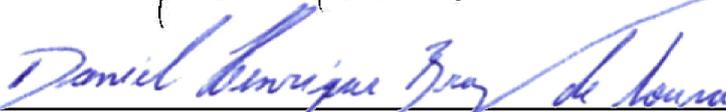
Orientador(es): Elias Dias Rossi Lopes e Daniel Henrique Braz de Sousa.

Aprovada em 24 de fevereiro de 2025, pela seguinte banca examinadora:



---

Prof. **Elias Dias Rossi Lopes** - Maj QEM, D.Sc. do IME - Presidente



---

Prof. **Daniel Henrique Braz de Sousa** - Cap QEM, D.Sc. do IME



---

Prof. **Marlon Marques Soudré** - D.Sc. do IFB

Rio de Janeiro

2025

*Dedico este trabalho à minha mãe, Teresinha, cuja sabedoria, coragem e amor incondicional moldaram o homem que sou hoje. Sua presença permanece viva em meu coração, como guia e inspiração eterna.*

# AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, elevo meus agradecimentos a Deus, por ter-me concedido a oportunidade de realizar este mestrado, por me fortalecer nos momentos de adversidade e incerteza, e por renovar minhas forças sempre que o cansaço físico e emocional me abatiam. Sua presença foi constante e essencial ao longo de toda esta jornada.

À minha amada esposa, Maria Fernanda, cuja parceria foi fundamental para que eu pudesse concluir esta etapa da minha vida acadêmica e profissional. Agradeço por sua dedicação, por compreender os momentos em que precisei estar ausente, e por sempre estar ao meu lado, oferecendo apoio e incentivo. Mais do que isso, agradeço por me presentear com a bênção de ser pai, experiência transformadora que deu novo sentido aos meus esforços e conquistas.

Ao meu querido filho, Lían, que, mesmo em sua tenra idade, foi fonte inesgotável de motivação. Seu amor puro e espontâneo me fez sentir valorizado e especial, e seu sorriso teve o poder de renovar minhas energias em dias difíceis.

Ao meu pai, Evandro, por ser um exemplo constante de integridade, retidão e comprometimento. Seus valores foram, desde sempre, um norte em minha formação pessoal e profissional. Ter a oportunidade de seguir seus passos foi motivo de grande orgulho e segurança durante esta jornada.

À minha irmã, Liliane, e ao meu cunhado, Jan Carlo, pela generosidade com que compartilharam seus conhecimentos sobre a vida acadêmica e pelo apoio oferecido, especialmente nas etapas de revisão dos meus trabalhos. Suas contribuições foram essenciais para aprimorar a qualidade da minha produção.

Ao meu orientador, Major Elias, expressei minha mais profunda gratidão por sua orientação atenta e paciente. Sua disponibilidade para esclarecer minhas dúvidas e sua sabedoria ao transmitir conhecimento foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos orientadores técnicos, Capitão de Fragata Michelin e Capitão de Fragata Noronha, agradeço sinceramente pelas valiosas contribuições oferecidas ao longo do curso. Suas experiências anteriores como mestrandos foram importantes referências para o meu planejamento.

Aos amigos de mestrado, Correa, Rodrigo, Andreza e Tales, agradeço pela parceria construída ao longo desses dois anos. As discussões técnicas, as trocas de conhecimento e, sobretudo, os momentos de incentivo mútuo foram decisivos para eu perseverar diante dos desafios que surgiram.

Aos professores do Instituto Militar de Engenharia, que integram o programa de mestrado, agradeço pela excelência no ensino, pelo domínio notável dos conteúdos e, principalmente, pela capacidade de inspirar e motivar seus alunos a buscarem constante superação e crescimento.

Aos docentes e funcionários do Departamento de Engenharia Mecânica do IME, minha gratidão pelos auxílios concedidos, pela presteza no atendimento e pela colaboração contínua.

À Marinha do Brasil, em especial ao Corpo de Fuzileiros Navais, meu reconhecimento pela confiança depositada ao me selecionar para esta missão de capacitação. A oportunidade de realizar este mestrado foi um marco em minha vida, e todo o suporte institucional recebido foi decisivo para que eu pudesse me dedicar plenamente aos estudos.

Ao Exército Brasileiro, em especial ao Instituto Militar de Engenharia, onde tive a honra de estudar, agradeço pela infraestrutura oferecida, pela excelência acadêmica proporcionada e pelas inúmeras oportunidades de desenvolvimento que me foram apresentadas ao longo do curso.

Por fim, agradeço a todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização desta etapa desafiadora da minha vida. A cada gesto de apoio, palavra de incentivo ou ajuda silenciosa, meu mais sincero agradecimento. Esta conquista não seria possível sem a colaboração e presença de cada um.

*"Quanto mais aumenta o conhecimento,  
mais se descobre a vastidão da nossa ignorância."  
(Blaise Pascal)*

## RESUMO

As inovações tecnológicas nos veículos militares têm sido determinantes para aprimorar a eficiência, a segurança e a capacidade operacional em ambientes complexos. Avanços como a automação de sistemas de navegação, controle de tração e estabilidade, além da implementação de veículos autônomos em missões críticas, têm transformado o setor da mobilidade militar. Os estimadores de estados surgem como elementos fundamentais, possibilitando o monitoramento preciso de variáveis críticas que frequentemente não podem ser acessadas diretamente por sensores. Esses estimadores fornecem informações em tempo real para os controladores dos veículos, otimizando a resposta dinâmica, especialmente em condições de alta variabilidade, e sua integração é essencial para o desenvolvimento de sistemas de controle avançados. Nesse contexto, este trabalho visa desenvolver um estimador de estados aplicável a veículos militares. O projeto do estimador fundamenta-se em três abordagens de estimação: o filtro de partículas, o filtro de Kalman estendido e a estimação de estados por horizonte móvel. Nas simulações computacionais, utiliza-se a fórmula mágica de Pacejka como modelo para os pneus. Para a modelagem do veículo, é empregado um modelo simplificado de um quarto de carro para a dinâmica longitudinal, enquanto o modelo bicicleta é utilizado para a dinâmica lateral. Os estudos iniciam-se com dados simulados de um veículo leve circulando em uma superfície de baixa aderência. Em seguida, em ambiente laboratorial, um veículo em escala é utilizado para testes simulados e experimentais, onde se desenvolve um estimador em estrutura hierárquica que realiza a estimação de parâmetros e estados do veículo em análise. Por último, o estimador é aplicado ao modelo matemático de um veículo militar, após a realização de testes experimentais com o veículo. Ao concluir o trabalho, observa-se que o estimador de estados apresentou um desempenho satisfatório em relação aos cenários simulados que envolvem o coeficiente de atrito entre o pneu e a superfície. Além disso, a adoção de uma estratégia de estimação em uma estrutura hierárquica foi eficaz para superar os desafios relacionados à baixa observabilidade e à limitação dos sensores durante os testes experimentais. Por fim, o estimador demonstrou sua eficácia na aplicação em um veículo militar, abordando os três métodos de estimação analisados, evidenciando sua capacidade de estimar com precisão e robustez os estados da dinâmica longitudinal do veículo Unimog em tempo real.

**Palavras-chave:** Estimação de Estados. Dinâmica Veicular. Veículos Militares. Filtro de Partículas. Filtro de Kalman Estendido. Estimação de Estado por Horizonte Móvel.

# ABSTRACT

Technological innovations in military vehicles have been crucial in enhancing efficiency, safety, and operational capabilities in complex environments. Advances such as the automation of navigation systems, traction and stability control, as well as the implementation of autonomous vehicles in critical missions, have transformed the military mobility sector. State estimators emerge as key elements, enabling precise monitoring of critical variables that often cannot be directly accessed by sensors. These estimators provide real-time information to vehicle controllers, optimizing the dynamic response, especially under highly variable conditions, and their integration is essential for the development of advanced control systems. In this context, this work aims to develop a state estimator applicable to military vehicles. The design of the estimator is based on three estimation approaches: the particle filter, the extended Kalman filter, and moving horizon state estimation. In the computational simulations, Pacejka's magic formula is used as a tire model. For vehicle modeling, a simplified quarter-car model is employed for longitudinal dynamics, while the bicycle model is utilized for lateral dynamics. The studies begin with simulated data of a light vehicle operating on a low-friction surface. Subsequently, in a laboratory setting, a scaled vehicle is used for both simulated and experimental tests, where a hierarchical structure estimator is developed to estimate the parameters and states of the vehicle under analysis. Finally, the estimator is applied to the mathematical model of a military vehicle after conducting experimental tests with the vehicle. Upon completion of the work, it is observed that the state estimator showed satisfactory performance in the simulated scenarios involving the tire-surface friction coefficient. Moreover, adopting an estimation strategy within a hierarchical structure was effective in overcoming challenges related to low observability and sensor limitations during experimental tests. Lastly, the estimator demonstrated its effectiveness when applied to a military vehicle, addressing the three analyzed estimation methods and highlighting its ability to accurately and robustly estimate the longitudinal dynamics states of the Unimog vehicle in real time.

**Keywords:** State Estimation. Vehicle Dynamics. Military Vehicles. Particle Filter (PF). Extended Kalman Filter (EKF). Moving Horizon State Estimation (MHSE).

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Coeficiente de atrito para diferentes superfícies . . . . .	30
Figura 2 – Orientação angular de um pneu em movimento (JAZAR, 2014) . . . . .	31
Figura 3 – Modelo de um quarto de carro (LOPES et al., 2020) . . . . .	33
Figura 4 – Modelo bicicleta . . . . .	34
Figura 5 – Torque de entrada . . . . .	42
Figura 6 – $\mu$ e $\omega$ com 20 partículas para atrito variável . . . . .	43
Figura 7 – $\mu$ e $\omega$ com 1000 partículas para atrito variável . . . . .	43
Figura 8 – Coeficiente de atrito interpolado para atrito variável . . . . .	44
Figura 9 – $\mu$ e $\omega$ com 20 partículas para atrito constante . . . . .	44
Figura 10 – $\mu$ e $\omega$ com 1000 partículas para atrito constante . . . . .	45
Figura 11 – Passos de 0,01 e 0,1 utilizando 1000 partículas para atrito constante . . . . .	45
Figura 12 – $\mu$ e $\omega$ com 20 partículas para atrito em degrau . . . . .	46
Figura 13 – $\mu$ e $\omega$ com 1000 partículas para atrito em degrau . . . . .	46
Figura 14 – Metodologia proposta . . . . .	49
Figura 15 – Veículo em escala . . . . .	49
Figura 16 – Corrente filtrada . . . . .	50
Figura 17 – Velocidade angular estimada por Runge-Kutta . . . . .	51
Figura 18 – Velocidade angular para simulação no solo . . . . .	54
Figura 19 – Coeficiente de atrito para simulação no solo . . . . .	54
Figura 20 – Velocidade longitudinal para simulação no solo . . . . .	55
Figura 21 – Torque de entrada para o experimento no solo . . . . .	55
Figura 22 – Tempo computacional da MHSE . . . . .	56
Figura 23 – Velocidade angular para o experimento no solo . . . . .	57
Figura 24 – Coeficiente de atrito para o experimento no solo . . . . .	57
Figura 25 – Velocidade longitudinal para o experimento no solo . . . . .	58
Figura 26 – Aceleração lateral para o movimento circular . . . . .	61
Figura 27 – Taxa de guinada para o movimento circular . . . . .	61
Figura 28 – Trajetória para o movimento circular . . . . .	62
Figura 29 – Aceleração lateral para a mudança simples de faixa . . . . .	62
Figura 30 – Taxa de guinada para a mudança simples de faixa . . . . .	63
Figura 31 – Trajetória para a mudança simples de faixa . . . . .	63
Figura 32 – Coeficiente de rigidez para a mudança simples de faixa . . . . .	63
Figura 33 – Aceleração lateral para a pista padrão . . . . .	64
Figura 34 – Taxa de guinada para a pista padrão . . . . .	64
Figura 35 – Trajetória na pista padrão . . . . .	65
Figura 36 – Veículo militar Unimog . . . . .	67

Figura 37 – Curva de torque do motor . . . . .	68
Figura 38 – Velocidades por marcha . . . . .	70
Figura 39 – Curva de torque por marcha . . . . .	71
Figura 40 – Torque na roda . . . . .	72
Figura 41 – Medidas da velocidade da roda . . . . .	73
Figura 42 – Tempo computacional por partículas . . . . .	73
Figura 43 – RMSE do coeficiente de atrito por partículas . . . . .	74
Figura 44 – RMSE da velocidade da roda por partículas . . . . .	74
Figura 45 – RMSE do coeficiente de atrito pelo passo . . . . .	75
Figura 46 – RMSE da velocidade da roda pelo passo . . . . .	75
Figura 47 – Coeficiente de atrito . . . . .	76
Figura 48 – Velocidade angular da roda . . . . .	76
Figura 49 – Erro absoluto do coeficiente de atrito . . . . .	77
Figura 50 – Erro absoluto da velocidade angular da roda . . . . .	77
Figura 51 – Medidas com 5% de ruído . . . . .	78
Figura 52 – Medidas com 10% de ruído . . . . .	78
Figura 53 – Tempo computacional . . . . .	79
Figura 54 – Erro absoluto com 5% de ruído . . . . .	80
Figura 55 – Erro absoluto com 10% de ruído . . . . .	80
Figura 56 – Velocidade angular da roda do Unimog . . . . .	81
Figura 57 – Coeficiente de atrito do Unimog . . . . .	81
Figura 58 – Velocidade longitudinal do Unimog . . . . .	82

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficientes da fórmula mágica para diferentes superfícies . . . . .	30
Tabela 2 – Algoritmo do filtro de partícula SIR . . . . .	36
Tabela 3 – Parâmetros do modelo para o filtro de partículas . . . . .	42
Tabela 4 – Tempo e erro da simulação . . . . .	46
Tabela 5 – Parâmetros do modelo . . . . .	51
Tabela 6 – Comparação das funções custo . . . . .	52
Tabela 7 – Coeficiente de determinação médio . . . . .	53
Tabela 8 – Coeficiente de determinação do experimento . . . . .	56
Tabela 9 – Coeficiente de determinação da MHSE . . . . .	56
Tabela 10 – Parâmetros do modelo bicicleta . . . . .	59
Tabela 11 – Coeficiente de determinação para o movimento circular . . . . .	61
Tabela 12 – Coeficiente de determinação para a pista padrão . . . . .	65
Tabela 13 – Relações de transmissão (MERCEDDES-BENZ, 2024) . . . . .	70
Tabela 14 – Velocidade máxima por marcha . . . . .	70
Tabela 15 – Parâmetros do modelo . . . . .	72
Tabela 16 – Coeficiente de determinação . . . . .	79

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABS	<i>Anti-lock braking system</i> – Sistema Antibloqueio de Freios
EA	Erro Absoluto
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i> – Filtro de Kalman Estendido
FC	Função Custo
FM	Fórmula Mágica
IME	Instituto Militar de Engenharia
IMU	<i>Inertial Measurement Unit</i> – Unidade de Medição Inercial
LSIM	<i>Linear Simulation Tool</i> – Ferramenta de Simulação Linear
MHSE	<i>Moving Horizon State Estimation</i> – Estimação de Estado por Horizonte Móvel
PF	<i>Particle Filter</i> – Filtro de Partículas
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i> – Otimização por Enxame de Partículas
RK	Runge-Kutta
RMSE	<i>Root Mean Squared Error</i> – Raiz do Erro Quadrático Médio
SIR	<i>Sampling Importance Resampling</i> – Amostragem por Importância e Reamostragem
SIS	<i>Sequential Importance Sampling</i> – Amostragem por Importância

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Ângulo de desvio
$\beta$	Ângulo de deslizamento lateral
$\delta$	Ângulo de esterçamento
$\eta_{cx}$	Eficiência da caixa de marchas
$\eta_{dif}$	Eficiência do diferencial
$\eta_t$	Eficiência total da transmissão
$\lambda$	Deslizamento longitudinal
$\mu$	Coefficiente de atrito
$\omega$	Velocidade angular da roda
$\omega_{dif}$	Velocidade angular do diferencial
$\omega_m$	Velocidade angular do motor
$\omega_M$	Velocidade angular do motor na potência máxima
$\omega_z$	Taxa de guinada
$\psi$	Ângulo de guinada
$\rho$	Massa específica do ar
$\theta$	Ângulo de arfagem
$\varphi$	Ângulo de rolagem
$\xi_n$	Ruído das medidas
$a_1$	Distância do eixo dianteiro ao centro de gravidade
$a_2$	Distância do eixo traseiro ao centro de gravidade
$A_f$	Área frontal do veículo
$a_x$	Aceleração longitudinal
$a_y$	Aceleração lateral
$b$	Coefficiente de resistência ao atrito viscoso

$C_\alpha$	Coefficiente de rigidez
$C_{\alpha 1}$	Coefficiente de rigidez dianteiro
$C_{\alpha 2}$	Coefficiente de rigidez traseiro
$C_d$	Coefficiente de arrasto aerodinâmico
$f_r$	Fator de resistência
$F_x$	Força longitudinal
$F_y$	Força lateral
$F_z$	Força vertical
$g$	Aceleração da gravidade
$i_{cx}$	Relação da caixa de marchas
$i_{dif}$	Relação do diferencial
$i_m$	Corrente elétrica do motor
$I_z$	Momento de inércia do veículo relativo ao eixo z
$J$	Momento de inércia da roda
$k_m$	Constante do motor elétrico
$m$	Massa do veículo
$M_z$	Momento de guinada
$N$	Janela de observação
$P_M$	Potência máxima do motor
$r$	Raio da roda
$r_e$	Raio efetivo da roda
$R_{aer}$	Força de resistência aerodinâmica
$R^2$	Coefficiente de determinação
$t$	Tempo
$T$	Torque na roda
$T_{cx}$	Torque da caixa de marchas

$T_{dif}$	Torque do diferencial
$T_{rol}$	Torque de resistência ao rolamento
$T_m$	Torque do motor
$T_r$	Torque resistente ao atrito
$u$	Entrada do sistema
$v$	Velocidade do veículo
$v_x$	Velocidade longitudinal
$v_y$	Velocidade lateral
$x$	Vetor de estado
$z$	Vetor de observação/medida
$\hat{z}$	Vetor de observação/medida estimada
$\bar{z}$	Vetor de observação/medida média

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1	MOTIVAÇÃO	20
1.2	OBJETIVOS	21
1.3	ORGANIZAÇÃO	22
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>24</b>
2.1	DINÂMICA VEICULAR	24
2.2	FILTRO DE PARTÍCULAS NA ESTIMAÇÃO	25
2.3	ESTIMAÇÃO NA DINÂMICA LONGITUDINAL	25
2.4	ESTIMAÇÃO NA DINÂMICA LATERAL	26
2.5	ESTIMAÇÃO EM VEÍCULOS MILITARES	27
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>29</b>
3.1	MODELO DE PNEU	29
3.2	MODELO PLANO DO VEÍCULO	32
3.3	MODELO DE UM QUARTO DE CARRO	32
3.4	MODELO BICICLETA	34
3.5	ESTIMAÇÃO DE ESTADOS E PARÂMETROS	35
3.5.1	FILTRO DE PARTÍCULAS	35
3.5.2	FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO	37
3.5.3	ESTIMAÇÃO DE ESTADOS POR HORIZONTE MÓVEL	38
3.5.4	MÉTRICAS DE AVALIAÇÃO	39
<b>4</b>	<b>ESTIMAÇÃO COM FILTRO DE PARTÍCULAS</b>	<b>41</b>
4.1	EQUAÇÕES DINÂMICAS	41
4.2	ENTRADA DO SISTEMA E PARÂMETROS DO MODELO	42
4.3	COEFICIENTE DE ATRITO VARIÁVEL	42
4.4	COEFICIENTE DE ATRITO CONSTANTE	44
4.5	COEFICIENTE DE ATRITO EM DEGRAU	45
4.6	CONCLUSÕES PARCIAIS	47
<b>5</b>	<b>ESTIMAÇÃO COM EKF E MHSE EM ESTRUTURA HIERÁRQUICA</b>	<b>48</b>
5.1	EXPERIMENTO COM O VEÍCULO SUSPENSO	49
5.2	SIMULAÇÃO DO VEÍCULO NO SOLO	52
5.3	EXPERIMENTO COM O VEÍCULO NO SOLO	55
5.4	CONCLUSÕES PARCIAIS	58

<b>6</b>	<b>ESTIMAÇÃO COM EKF E MHSE NA DINÂMICA LATERAL . . .</b>	<b>59</b>
6.1	DESCRIÇÃO DOS CASOS E PARÂMETROS DO MODELO . . . . .	59
6.2	MOVIMENTO CIRCULAR . . . . .	60
6.3	MUDANÇA SIMPLES DE FAIXA . . . . .	62
6.4	PISTA PADRÃO . . . . .	64
6.5	CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .	66
<b>7</b>	<b>ESTIMAÇÃO EM VEÍCULO MILITAR . . . . .</b>	<b>67</b>
7.1	FILTRO DE PARTÍCULAS APLICADO AO UNIMOG . . . . .	72
7.2	EKF E MHSE APLICADO AO UNIMOG . . . . .	77
7.3	CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .	82
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>84</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>87</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Os veículos militares contemporâneos são desenvolvidos para satisfazer uma série de exigências relacionadas ao desempenho em combate, à proteção e ao suporte logístico. Sua evolução é constante, impulsionada por inovações em automação, eletrônica integrada e novas tecnologias de materiais, assegurando que as forças armadas mantenham a capacidade de atuar de maneira eficaz em ambientes operacionais (CALDEIRA, 2018).

A atualização de veículos militares tornou-se uma necessidade estratégica para várias forças armadas globalmente, motivada pela ampla adoção de tecnologias emergentes que visam aprimorar a segurança e o desempenho. Dentre essas inovações, sobressaem-se o sistema antibloqueio de freios, o controle eletrônico de estabilidade, o controle de tração e o controlador de navegação autônoma, os quais, em conjunto, são essenciais para otimizar a mobilidade e a confiabilidade operacional dos veículos.

O sistema antibloqueio de freios atua na prevenção do travamento das rodas durante frenagens intensas, assegurando a aderência entre os pneus e a superfície da estrada, o que é crucial para manter a dirigibilidade em situações de emergência (PATIL et al., 2015). Por sua vez, o controle eletrônico de estabilidade corrige desvios de trajetória e evita derrapagens em manobras repentinas. A combinação desses sistemas contribui significativamente para a segurança veicular e a diminuição de acidentes em condições adversas (HASHEMI et al., 2020).

O controle de tração é fundamental para a eficiência da aceleração, garantindo que as rodas não girem excessivamente, especialmente em situações de baixa aderência. Esse sistema regula automaticamente o torque na roda em superfícies escorregadias ou irregulares, reduzindo a perda de tração e assegurando que o veículo mantenha um melhor desempenho (LOPES, 2015).

O controlador de navegação autônoma tem o potencial de revolucionar a operação de veículos militares, reduzindo a probabilidade de erros humanos e aprimorando a logística. Ele se baseia em dados em tempo real para realizar decisões autônomas ou semiautônomas, facilitando a navegação (IVANOVA et al., 2016).

Essas inovações tecnológicas têm promovido uma transformação significativa nos veículos militares, convertendo-os em plataformas altamente automatizadas, que apresentam mobilidade e segurança superiores em operações de combate e suporte logístico. Assim, a atualização dos sistemas de controle nos veículos militares se configura como um elemento essencial na busca por uma eficiência operacional aprimorada e segurança em contextos de elevada complexidade.

A adoção dessas tecnologias está intimamente ligada ao uso de modelos dinâmicos

que visam a prever e a regular o comportamento dos veículos. De acordo com Sousa e Costa Neto (2018), para compreender a dinâmica desses veículos e definir controladores eficientes, é essencial conhecer as forças e os momentos gerados entre os pneus e o solo.

A análise da dinâmica veicular frequentemente utiliza modelos que incluem estados mensuráveis, como a velocidade angular das rodas e a aceleração longitudinal. No entanto, estados significativos, como o coeficiente de atrito e a velocidade longitudinal, não podem ser observados diretamente, o que torna imprescindível a aplicação de algoritmos sofisticados de estimação, como o filtro de partículas, o filtro de Kalman, e a estimação de estado por horizonte móvel, para uma avaliação precisa desses estados.

## 1.1 Motivação

A elaboração de um estimador ou observador de estados para veículos militares é motivada pela demanda crescente por desempenho superior e segurança nas operações. Ao contrário dos veículos civis, os militares operam em condições extremas, lidando com uma diversidade de terrenos e climas. Nesses cenários, a coleta precisa de informações sobre o comportamento dinâmico veicular é fundamental para garantir que os requisitos operacionais sejam cumpridos.

Nas viaturas militares, a medição direta de certos estados significativos é frequentemente inviável, seja pela complexidade de instalação de sensores adequados, seja pela falta de viabilidade econômica para a mensuração de todas as variáveis pertinentes. Para contornar essa restrição, a estimação de estados possibilita a obtenção dessas informações por meio de medições indiretas, aliadas à utilização de modelos matemáticos que representam o comportamento dinâmico do veículo (CHINDAMO et al., 2018).

Controladores avançados empregam diversas tecnologias com o objetivo de melhorar a segurança ativa, otimizar o desempenho dinâmico e aumentar o conforto. Contudo, a eficácia desses sistemas está intimamente ligada à qualidade e à precisão dos dados que recebem. Nesse contexto, os estimadores de estados assumem um papel crucial, uma vez que são encarregados de fornecer as informações necessárias com a precisão e robustez requeridas, permitindo que esses controladores operem da melhor forma possível (FRANKLIN et al., 2013).

Sistemas de navegação autônoma requerem dados minuciosos acerca da dinâmica do veículo e do ambiente circundante para realizar decisões ágeis e precisas. O estimador de estados possibilita que o sistema autônomo mitigue a ausência de sensores ou a interferência de ruídos nas medições, oferecendo informações adequadas para que o veículo se ajuste aos variados contextos enfrentados (LUETTEL et al., 2012).

O desenvolvimento de estimadores é impulsionado pela exigência de aprimorar o

desempenho e a segurança veicular em situações críticas. Eles desempenham um papel fundamental ao fornecer informações sobre estados que não são passíveis de medição direta, além de serem cruciais para a otimização do funcionamento dos sistemas de controle avançados. Esses sistemas dependem dos estados estimados para efetuar ajustes em tempo real, assegurando, assim, uma maior eficiência veicular.

A ideia de se utilizar um estimador com uma estrutura hierárquica que utiliza a estimação de estado por horizonte móvel é obter um avanço significativo na obtenção de estados veiculares estimados. A abordagem hierárquica facilita a recuperação de variáveis de estado que não podem ser observadas diretamente, a partir de variáveis que são mensuráveis, superando assim os desafios relacionados à baixa observabilidade e às limitações dos sensores. A combinação do filtro de partículas (PF, do inglês *Particle Filter*), do filtro de Kalman estendido (EKF, do inglês *Extended Kalman Filter*) e da estimação de estado por horizonte móvel (MHSE, do inglês *Moving Horizon State Estimation*) permite uma análise detalhada da dinâmica veicular em diversos cenários operacionais. Diferentemente de pesquisas acadêmicas anteriores, que focaram principalmente na estimação de parâmetros e controladores, este trabalho se concentra na estimação de estados, um elemento crucial para o avanço de sistemas de controle avançados em veículos militares.

A estimação de estados é fundamental para o controle de sistemas dinâmicos, e diferentes métodos têm sido empregados para essa finalidade. O filtro de Kalman é amplamente utilizado devido à sua eficiência em diversas aplicações, enquanto o filtro de partículas se destaca em aplicações de rastreamento de trajetória. No entanto, a MHSE se apresenta como uma alternativa inovadora e menos explorada, oferecendo robustez e precisão ao formular a estimação como um problema de otimização com restrições, lidando eficazmente com incertezas e erros de modelagem. Estudos comparativos têm demonstrado que a MHSE pode proporcionar resultados superiores, especialmente em condições de ruído e não linearidades acentuadas, o que a torna promissora para aplicação em veículos militares. A implementação de um estimador hierárquico, abordando três métodos distintos, utilizando modelos matemáticos e dados obtidos experimentalmente, representa uma contribuição relevante para o campo da identificação e estimação.

## 1.2 Objetivos

O objetivo central desse estudo é avaliar possibilidades e contribuições em estimação de estados, que sejam aplicáveis às dinâmicas longitudinal e lateral de veículos de uso militar. Para isso, são avaliados três métodos diferentes de estimação: PF, EKF e MHSE.

Dado esse objetivo, são apresentadas as seguintes contribuições ao estudo de estimação de estados:

A primeira contribuição consiste no desenvolvimento de um estimador baseado no

método de filtro de partículas, aplicado em conjunto com o modelo de um quarto de carro, visando a estimação de três perfis distintos do coeficiente de atrito entre uma superfície coberta de neve e o pneu de uma viatura leve. Este estimador permite uma caracterização precisa da interação entre o pneu e o solo em condições de baixa aderência.

A segunda contribuição envolve a criação de uma estrutura hierárquica, para a dinâmica longitudinal de um veículo em escala, projetada para enfrentar os desafios da baixa observabilidade em cenários com sensores limitados. O observador desenvolvido utiliza a técnica de estado aumentado e implementa dois métodos de estimação: o EKF e a MHSE, os quais se mostraram aplicáveis tanto em dados simulados quanto em experimentos práticos.

A terceira contribuição refere-se à utilização do modelo bicicleta para a avaliação dos estados da dinâmica lateral do veículo em escala mencionado anteriormente, empregando os mesmos métodos de estimação descritos (EKF e MHSE). Esta abordagem permite uma análise aprofundada do comportamento direcional do veículo e das forças laterais atuantes, proporcionando maior precisão na caracterização dinâmica do sistema.

Por fim, a quarta contribuição consiste na análise da dinâmica longitudinal em um veículo militar, utilizando o modelo de um quarto de carro. Para essa análise, foram aplicados os três métodos de estimação: o filtro de partículas, o filtro de Kalman estendido e a estimação de estados por horizonte móvel. Esse conjunto de técnicas possibilita uma avaliação detalhada e robusta das condições de tração e do comportamento dinâmico em ambientes operacionais complexos.

Além disso, busca-se modelar matematicamente os veículos analisados com base nas informações observadas que melhor representem seu comportamento. Essa modelagem é realizada com a adoção de hipóteses simplificadoras que não comprometam a integridade do sistema em estudo, mas que ajudem a diminuir o custo computacional e sejam benéficas para a análise e controle do sistema real em questão.

O objetivo final consiste em aprimorar a precisão das estimativas de estados críticos para os controles do veículo, elevando o desempenho em tempo real, particularmente em contextos onde os dados são escassos e o ruído é considerável.

### 1.3 Organização

Os próximos capítulos deste documento estão estruturados da seguinte forma:

No segundo capítulo, é apresentada a revisão da literatura pertinente ao tema, abrangendo desde as obras clássicas até aquelas que abordam as metodologias mais contemporâneas de estimadores de estado. A bibliografia foi organizada em cinco categorias: dinâmica do veículo, método de estimação utilizando filtro de partículas, estimação focada

na dinâmica longitudinal, estimação direcionada à dinâmica lateral e estimação em veículos militares.

No terceiro capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica dos modelos aplicados na dinâmica dos veículos analisados, além de discutir a temática da estimação, utilizando os três métodos empregados na pesquisa, a saber: filtro de partículas, filtro de Kalman estendido e estimação de estados por horizonte móvel.

No quarto capítulo, é apresentado o método de filtro de partículas, que utiliza o algoritmo de amostragem por importância e reamostragem (SIR, do inglês *Sampling Importance Resampling*), aplicado ao estimador de estados na simulação de parâmetros de um veículo leve em condições de neve. Essa simulação é realizada por meio de um modelo de pneu que incorpora a Fórmula Mágica (FM) de Pacejka. O estudo considera três casos distintos de coeficiente de atrito para avaliar a eficácia do método de estimação com filtro de partículas e do modelo veicular de um quarto de carro.

No quinto capítulo, são utilizados os métodos de estimação de estados por horizonte móvel e o filtro de Kalman estendido para o estimador de um veículo em escala, objeto de estudo em ambiente laboratorial. Esse capítulo aborda a análise de dados simulados e experimentais, visando à construção de um observador em uma estrutura hierárquica que integre a estimação de parâmetros e estados da dinâmica longitudinal.

No sexto capítulo, os métodos de estimação discutidos no capítulo anterior são aplicados ao modelo bicicleta, que considera a dinâmica lateral do veículo em escala. O observador é empregado em três situações distintas: movimento circular, mudança de faixa simples e uma pista padronizada. O objetivo é estimar os estados da dinâmica lateral e rastrear a trajetória percorrida pelo veículo em escala nas situações mencionadas.

No sétimo capítulo, realiza-se a modelagem matemática do veículo militar Unimog com o objetivo de simular o torque que é transmitido às rodas. Em seguida, o modelo de um quarto de carro é utilizado, adotando parâmetros análogos aos do Unimog, com o torque obtido na simulação computacional sendo utilizado como entrada. Por fim, os três métodos de estimação analisados são aplicados ao estimador desenvolvido, a fim de avaliar sua viabilidade na aplicação a um veículo militar.

No último capítulo, são expostas as conclusões dos estudos conduzidos, enfatizando os resultados mais significativos e suas contribuições, além de abordar as limitações da pesquisa. Também são propostas alternativas para investigações futuras, que incluem a otimização de modelos dinâmicos e a implementação de controladores avançados.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, realiza-se uma análise das principais fontes que sustentam teoricamente o desenvolvimento deste estudo. A revisão da literatura pertinente ao tema abrange uma gama de obras, desde as contribuições clássicas que estabelecem a base dos conceitos de estimadores de estado até investigações contemporâneas que examinam as metodologias mais recentes na área. O levantamento bibliográfico foi organizado de maneira sistemática para oferecer uma visão clara das áreas de interesse relacionadas à pesquisa.

As fontes de referência foram estruturadas em cinco categorias, visando abranger os diversos aspectos da estimação de estados em veículos. A primeira categoria trata da dinâmica veicular geral, seguida por metodologias que utilizam o filtro de partículas. As seções subsequentes abordam a estimação focada na dinâmica longitudinal e lateral. Por último, uma categoria é dedicada à aplicação de técnicas de estimação especificamente para veículos militares, levando em conta suas particularidades operacionais.

### 2.1 Dinâmica Veicular

Pacejka e Bakker (1992) elaboram de forma empírica uma equação que possibilita estabelecer a conexão entre o coeficiente de atrito e o deslizamento. A simplicidade dessa equação permite, com parâmetros apropriados, simular de maneira satisfatória a interação entre o pneu e o solo. Esse modelo possui a vantagem de ser aplicável a todos os esforços exercidos nos pneus, como força longitudinal e força lateral. No entanto, uma dificuldade encontrada é a necessidade de utilizar diversos parâmetros, os quais devem ser estimados ou obtidos por meio de experimentos.

Gillespie (1997) apresenta fundamentos da dinâmica veicular, como sistemas de coordenadas e carga dinâmica nos eixos. Na dinâmica longitudinal, são discutidos em detalhes os aspectos relacionados à resistência ao rolamento e à resistência aerodinâmica, incluindo uma análise que leva em consideração as forças de sustentação.

Jazar (2014) realiza uma análise da dinâmica do veículo. Explora o conceito de resistência ao rolamento, sua origem e os efeitos de várias características desse fenômeno. O autor apresenta estudos sobre modelos de interação entre pneu e solo, bem como o comportamento da aderência dessa interação. Além disso, uma análise detalhada da dinâmica lateral, integrando elementos teóricos com aplicações práticas voltadas para o projeto de veículos que sejam mais seguros e estáveis, também é proposta pelo autor. O trabalho enfatiza o uso de simulações e métodos analíticos para antecipar o comportamento dos veículos.

## 2.2 Filtro de Partículas na Estimação

Orlande et al. (2008) apresentam uma descrição geral dos problemas de estimação de estado dentro da estrutura bayesiana. Dois filtros bayesianos, o filtro de Kalman e o filtro de partículas com amostragem por importância e reamostragem, foram investigados com modelos de condução de calor não linear e linear não estacionários que se concentram em prever o campo de temperatura transitório em um meio, considerando erros de medição de temperatura.

Silva (2012) utiliza filtros de partículas para resolver o problema de estimação de estado em problemas inversos via inferência bayesiana. O objetivo era estimar o teor de umidade da vegetação, velocidade do vento, relação superfície/volume das partículas e limites da chama, que variam no espaço e no tempo.

Colaço et al. (2012) propõem uma solução para o problema de estimação de estado usando uma abordagem bayesiana. Dois filtros bayesianos, nomeadamente o algoritmo de amostragem de importância e reamostragem e o algoritmo de amostragem e reamostragem por importância auxiliar, foram estudados para estimar a superfície externa de um quadrado preenchido com fluido em turbulência natural.

Wang et al. (2022) apresentam um estimador hierárquico combinado com um observador não linear e um filtro de partículas para estimar com precisão os estados do veículo e as forças nos pneus de veículos elétricos com motores distribuídos nas rodas. O estimador é dividido em duas camadas: a camada inferior, chamada observador não linear da força longitudinal do pneu, visa a estimar a força longitudinal com base nos torques de tração/frenagem e na velocidade de rotação das rodas. A camada superior utiliza essas estimativas da força longitudinal para encontrar os estados do veículo, incluindo as forças laterais nos pneus. Na camada superior, o filtro é aplicado para completar a estimativa, usando apenas acelerações longitudinais/laterais e sinais da taxa de guinada.

## 2.3 Estimação na Dinâmica Longitudinal

Savaresi et al. (2005) propõem uma estratégia de controle em que a variável regulada é uma combinação de desaceleração da roda e do deslizamento longitudinal. Geralmente, o *Anti-lock braking system* (ABS) utiliza a desaceleração da roda, uma vez que pode ser facilmente medida; no entanto, pode ser dinamicamente crítica se a superfície da estrada mudar rapidamente.

Alessandri et al. (2008) abordam um problema relacionado à estimação de estado por horizonte móvel de um sistema não linear discreto no tempo, considerando a presença de ruídos limitados nas equações do sistema e nas medições. Devido à falta de informações sobre as estatísticas dessas perturbações e do estado inicial, é utilizada uma abordagem

de mínimos quadrados generalizados. Essa abordagem consiste em minimizar uma função de custo de estimação quadrática, considerando um conjunto recente de entradas e saídas, utilizando uma estratégia de janela deslizante.

Zhang et al. (2014) propõem um observador de modo deslizante que estima a velocidade do veículo utilizando medições de aceleração, velocidades das rodas e torques de frenagem. Adicionalmente, um EKF baseado no modelo de pneus de Burckhardt é empregado para estimar os parâmetros do modelo derivados da velocidade calculada, das velocidades das rodas observadas e da aceleração. Essa metodologia facilita a avaliação do coeficiente de atrito e a identificação das razões de deslizamento ótimas.

Enisz et al. (2015) introduzem um algoritmo projetado para estimar tanto os coeficientes instantâneos quanto os máximos de atrito da superfície da estrada, levando em consideração as condições da superfície. Esse algoritmo utiliza o EKF em tempo discreto para a estimação de estados e é fundamentado em um modelo de dinâmica longitudinal de veículos especificamente para sistemas de duas rodas, incorporando a FM.

Paul et al. (2019) desenvolvem uma metodologia que não depende de nenhum modelo de pneu específico, focando na estimação de valores em condições críticas. Isso é particularmente relevante quando as rodas dianteiras ou traseiras de um veículo estão próximas do limite de aderência durante a frenagem. Em cenários onde ambas as rodas experimentam deslizamento significativo, medições de aceleração longitudinal são utilizadas para fins de estimação, com a redução de ruído facilitada pela aplicação do filtro de Kalman.

Lopes et al. (2020) avaliam o EKF e a MHSE, apresentando que, tanto para as fases de aceleração quanto de frenagem, a MHSE é mais precisa. O objetivo é demonstrar uma análise comparativa entre os dois algoritmos para a estimação do deslizamento longitudinal em aplicações de controle de veículos terrestres. O trabalho mostra resultados favoráveis, no geral, para a abordagem da MHSE, apesar de seu maior esforço computacional.

Sousa e Ayala (2020) utilizam-na para estimar o deslizamento longitudinal em um veículo *off-road* e sua análise emprega um modelo *single-corner* que incorpora o modelo de pneus de Bekker, examinando o desempenho do veículo em dois tipos distintos de terreno: solo médio e solo argiloso. Essa avaliação é sustentada por dados de torque de frenagem, além das velocidades longitudinais e angulares das rodas.

## 2.4 Estimação na Dinâmica Lateral

Zareian et al. (2016) apresentam um método apropriado para estimar o coeficiente de atrito. O método utiliza valores medidos dos sensores de velocidade angular da roda e da taxa de guinada de um veículo para estimar o coeficiente.

Heidfeld et al. (2020) desenvolvem um observador de estados projetado para um

veículo elétrico com tração nas quatro rodas, que estima o deslizamento dos pneus tanto na direção longitudinal quanto na lateral para cada roda. Esse sistema emprega um *unscented kalman filter* que ajusta o modelo de pneu com base nas condições da estrada, utilizando os coeficientes de atrito individuais para cada roda e facilitando, assim, a estimação da dinâmica do chassi e das rodas do veículo.

Jin et al. (2021) introduzem um estimador em dois níveis. O nível superior utiliza uma busca em grade com otimização numérica para encontrar estimativas de referência próximas ao ótimo global. Essas estimativas são então refinadas no nível inferior para maior precisão. O algoritmo garante convergência para os valores reais do modelo nominal, eliminando a necessidade de inicialização precisa.

Santini et al. (2021) apresentam uma metodologia orientada por modelo para avaliação em tempo real do coeficiente de atrito, que integra um modelo bicicleta para determinar o estado do veículo e utiliza a FM com uma abordagem de declive de deslizamento para estimar o atrito.

Wang e Zhang (2023) implementam um algoritmo EKF que combina a FM com um modelo não linear de veículo de três graus de liberdade. Esse procedimento é utilizado para estimar a velocidade longitudinal do veículo, a taxa de guinada e o ângulo de deflexão lateral do centro de massa.

Wang et al. (2023) propõem uma abordagem hierárquica para estimar o coeficiente de atrito que combina a estimação por horizonte móvel com um modelo inverso de pneu baseado na dinâmica lateral do veículo. A dinâmica do veículo e do pneu é separada, e a estimação por horizonte móvel avalia a força lateral do pneu usando um modelo de veículo não linear. O modelo inverso é derivado da FM, resultando em um estimador do coeficiente de atrito.

Snobar et al. (2024) apresentam um esquema de estimação por horizonte móvel para estimar simultaneamente os estados de um modelo bicicleta com dois graus de liberdade e o coeficiente máximo de atrito da estrada. A abordagem de estimação por horizonte móvel consiste em um estimador separado de estados e atrito, em conexão com uma análise de sensibilidade, para evitar uma estimativa arbitrária de atrito da estrada na ausência de excitação suficiente, ajustando o tamanho do passo da atualização do atrito conforme necessário.

## 2.5 Estimação em Veículos Militares

Simioni (2021) implementa um modelo não linear de quatro graus de liberdade para analisar as dinâmicas lateral e longitudinal de um veículo militarizado durante um teste de mudança de faixa dupla, utilizando o modelo de pneus de Dugoff. A solução numérica foi

obtida com MATLAB/Simulink® e validada por comparação com resultados do Carsim®. A análise inversa, baseada no método de Levenberg-Marquardt e nas medições do ângulo de rolagem, permitiu estimar as constantes da suspensão, ajustando as características do veículo e melhorando seu comportamento dinâmico, além de otimizar tempo, custos e segurança no projeto.

Zhang et al. (2023) introduzem um observador que aplica a teoria do filtro de Kalman e um ajuste adaptativo da matriz de ruído para a estimativa dos parâmetros cinemáticos de um veículo 6x6. Inicialmente, é elaborado um modelo cinemático e dinâmico para examinar as características do veículo. Posteriormente, é proposta uma metodologia para a estimativa da força do pneu, que permite a análise das forças longitudinais e verticais, utilizando o modelo não linear de Dugoff. Por último, uma simulação integrada com TruckSim® e Simulink®, juntamente com experimentos realizados com um veículo não tripulado 6x6, valida a eficácia do observador, demonstrando sua habilidade em estimar os estados do veículo e destacando a variação do ângulo de deslizamento entre os pneus.

Pereira (2023) apresenta a implementação computacional de um sistema de controle assistido para manutenção e seguimento de trajetória no modelo da Viatura Blindada de Transporte de Pessoal 6x6 Guarani, utilizada pelo Exército Brasileiro. Duas técnicas de controle automotivo foram aplicadas: Regulador Linear Quadrático e Controle Preditivo Baseado em Modelo, atuando no controle do ângulo de esterçamento da roda dianteira. O modelo de controle foi baseado no modelo bicicleta com um pneu linear. Os sistemas de direção e suspensão foram calibrados com dados de campo e estudos prévios. Simulações no MATLAB® demonstraram que os controladores atingiram os objetivos dentro das condições estabelecidas.

## 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 3.1 Modelo de Pneu

Os pneus desempenham três funções fundamentais no automóvel: sustentar a força vertical ( $F_y$ ) ao mesmo tempo em que absorvem os impactos da estrada, gerar forças longitudinais ( $F_x$ ) para a aceleração e frenagem do veículo e produzir forças laterais ( $F_y$ ) decorrentes do esterçamento (GILLESPIE, 1997).

O fenômeno do deslizamento longitudinal ( $\lambda$ ) pode ser observado quando um torque é aplicado ao pneu. Nesse momento, uma força de tração é gerada na área de contato entre o pneu e o solo, o que resulta em compressão nas regiões à frente e dentro da banda de rodagem do pneu. Essa compressão reduz a distância percorrida pelo pneu em relação ao rolamento livre, ou seja, sem a aplicação de torque (WONG, 2001).

O deslizamento longitudinal ( $\lambda$ ) é dado pela Equação 3.1, onde  $\omega$  é a velocidade angular da roda e  $r$  é o raio da roda e  $v_x$  é a velocidade longitudinal do veículo.

$$\lambda = \frac{\omega r - v_x}{v_x} = \frac{\omega r}{v_x} - 1 \quad (3.1)$$

A força longitudinal que se manifesta nas rodas durante os processos de aceleração e frenagem é determinada como sendo proporcional à  $F_z$ , de acordo com um coeficiente de atrito ( $\mu$ ), o qual é dependente do  $\lambda$ .

$$F_x = \mu(\lambda)F_z \quad (3.2)$$

Conforme Genta e Morello (2019), existem várias formulações para a relação entre  $\mu$  e  $\lambda$ . A fórmula mágica de Pacejka e Bakker (1992) considera constantes obtidas por meios experimentais para aproximar o comportamento complexo da relação entre  $F_x$  e o  $\lambda$ , e obter uma excelente aproximação através de uma equação empírica. Tal expressão matemática tem a vantagem de ser contínua em todo o domínio de deslizamento, o que não ocorre nos outros modelos, reduzindo o tempo decorrido das simulações e processos de estimação (LOPES et al., 2020). A fórmula geral que define o modelo é dada pela Equação 3.3:

$$\mu = D \sin[C \arctan\{B\lambda - E[B\lambda - \arctan(B\lambda)]\}] \quad (3.3)$$

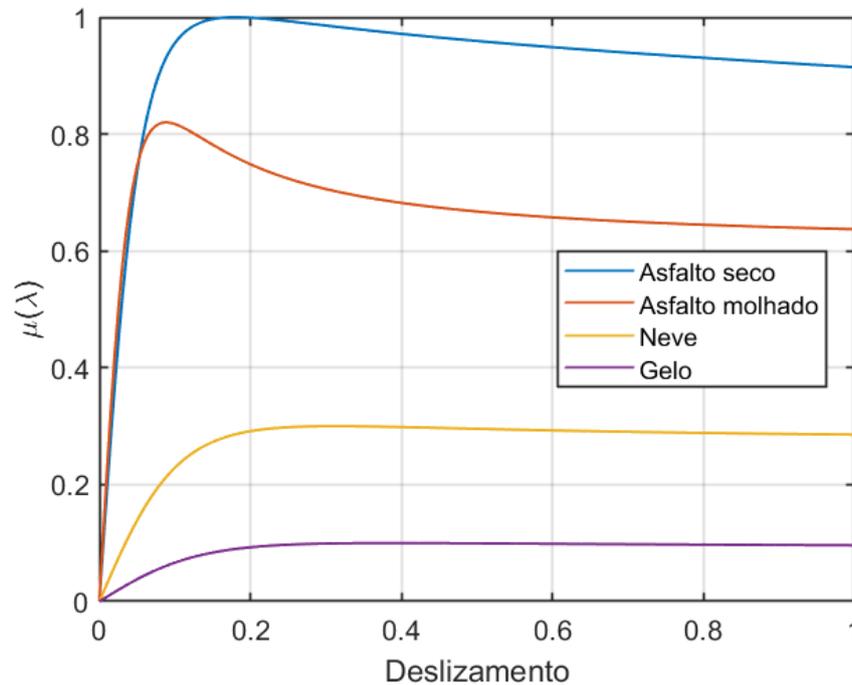


Figura 1 – Coeficiente de atrito para diferentes superfícies

Pavimentos	B	C	D	E
Asfalto seco	10	1,9	1	0,97
Asfalto molhado	12	2,3	0,82	1
Neve	5	2	0,3	1
Gelo	4	2	0,1	1

Tabela 1 – Coeficientes da fórmula mágica para diferentes superfícies (PACEJKA, 2005)

A força de tração máxima, de acordo com dados experimentais, ocorre com o deslizamento entre 15 e 20%. Qualquer aumento no deslizamento provoca uma condição instável, com a força de tração caindo do valor de pico até o valor de deslizamento puro. Na Figura 1, é possível observar como o coeficiente de atrito varia em função do deslizamento para diferentes tipos de superfícies.

De acordo com Jazar (2014), quando um veículo é submetido a uma força lateral, sem deslizamento longitudinal, o pneu sofre deformação na banda de rodagem, resultando em um ângulo defasado em relação ao plano da roda, chamado ângulo de desvio ( $\alpha$ ). Esse ângulo indica a rotação do pneu em torno de um eixo vertical e a orientação dos vetores de velocidade longitudinal e lateral no ponto de contato com o solo, posicionando o vetor de velocidade entre o plano original da roda e o sistema de coordenadas do ângulo de esterçamento ( $\delta$ ). A orientação do pneu em movimento é mostrada na Figura 2, considerando um sistema de coordenadas da roda  $W(x_w, y_w, z_w)$  fixado na roda, especificamente no seu centro. A orientação do sistema de coordenadas da roda é avaliada em relação ao sistema de coordenadas do corpo  $C(x, y, z)$ .

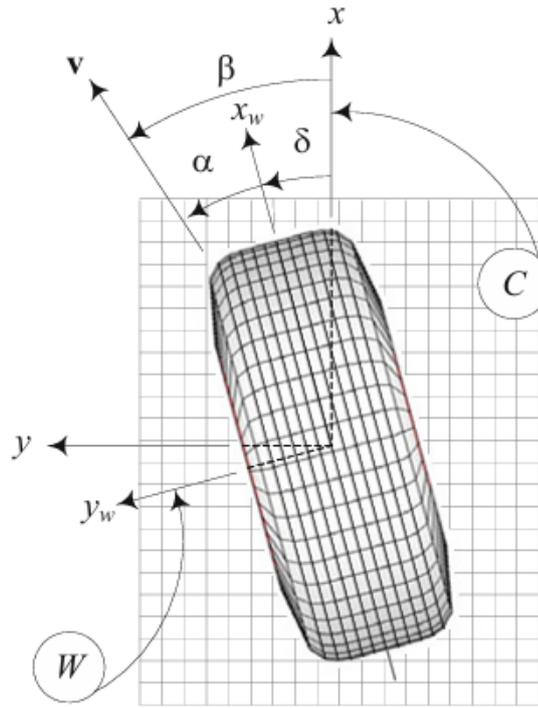


Figura 2 – Orientação angular de um pneu em movimento (JAZAR, 2014)

A Equação 3.4 descreve a interdependência dos ângulos. O ângulo  $\beta$  (Eq. 3.5) é denominado ângulo de deslizamento lateral da roda, enquanto  $\alpha$  se refere ao pneu.

$$\alpha = \beta - \delta \quad (3.4)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \quad (3.5)$$

A força lateral produzida por um pneu é influenciada pelo ângulo  $\alpha$  e, para ângulos pequenos, essa força é proporcional ao deslizamento. O coeficiente de rigidez, denotado por  $C_\alpha$ , quantifica essa relação, conforme ilustrado na Equação 3.6.

$$F_y = -C_\alpha \alpha = -C_\alpha (\beta - \delta) \quad (3.6)$$

Quando utilizado um modelo de dois eixos em que ocorre esterçamento apenas no eixo dianteiro, podemos representar a força lateral no eixo dianteiro e traseiro, e os ângulos de deslizamento lateral da seguinte forma:

$$F_{y1} = -C_{\alpha 1} \alpha_1 = -C_{\alpha 1} (\beta_1 - \delta) \quad (3.7)$$

$$F_{y2} = -C_{\alpha 2} \alpha_2 = -C_{\alpha 2} (\beta_2) \quad (3.8)$$

## 3.2 Modelo Plano do Veículo

Um veículo rígido pode ser visto como uma caixa plana em movimento sobre uma superfície horizontal, apresentando três graus de liberdade: translação nas direções  $x$  e  $y$  e rotação em torno do eixo  $z$  (JAZAR, 2014). Podemos desconsiderar o deslocamento vertical do chassi, bem como os ângulos de rolagem  $\varphi$  (*roll*) e de arfagem  $\theta$  (*pitch*). As equações de movimento de Newton-Euler para esse veículo, no sistema de coordenadas do corpo no seu centro de massa  $C(x, y, z)$ , são:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\dot{v}_x - m\omega_z v_y \\ m\dot{v}_y + m\omega_z v_x \\ \dot{\omega}_z I_z \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Onde,  $F_x$  é a força longitudinal (ao longo do eixo  $x$ ),  $F_y$  é a força lateral (ao longo do eixo  $y$ ),  $M_z$  é o momento de guinada,  $m$  é a massa do veículo,  $v_x$  é a velocidade longitudinal,  $v_y$  é a velocidade lateral,  $\omega_z$  é a taxa de guinada ( $\dot{\psi}$ ) e  $I_z$  é o momento de inércia do veículo relativo ao eixo  $z$ .

Considerando que o sistema de forças é inicialmente configurado nas rodas, torna-se necessário alterar a aplicação desse sistema de forças das rodas para o centro de massa do veículo. Generalizando para uma roda  $n$  qualquer, as componentes do sistema de forças no plano da roda  $W(x_w, y_w)$ , que são aplicadas no veículo em função das forças geradas na roda  $n$ , podem ser vistas na Equação 3.10:

$$\begin{bmatrix} F_{x_n} \\ F_{y_n} \\ M_{z_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x_{w_n}} \cos(\delta_n) - F_{y_{w_n}} \sin(\delta_n) \\ F_{y_{w_n}} \cos(\delta_n) + F_{x_{w_n}} \sin(\delta_n) \\ M_{z_{w_n}} + x_n F_{y_{w_n}} - y_n F_{x_{w_n}} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

## 3.3 Modelo de Um Quarto de Carro

A análise da dinâmica longitudinal de um veículo se concentra no estudo do seu comportamento em linha reta, levando em consideração aspectos como aceleração e frenagem. O modelo de um quarto de carro é uma representação simplificada do veículo, no qual são desconsideradas deformações na carroceria e o efeito das suspensões. Esse modelo analisa as forças e momentos que atuam na dinâmica longitudinal, excluindo os efeitos da vertical e lateral. Como é possível observar na Figura 3, o modelo se baseia em uma massa ( $m$ ) concentrada sobre uma roda simples de momento de inércia ( $J$ ) e raio ( $r$ ).

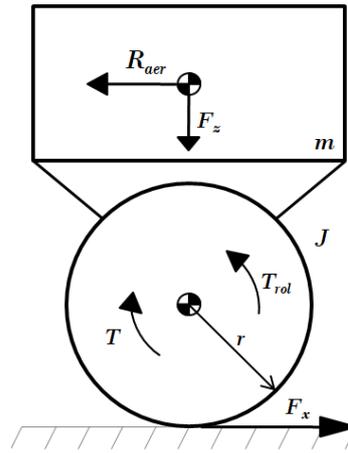


Figura 3 – Modelo de um quarto de carro (LOPES et al., 2020)

Onde,  $F_x$  representa a força longitudinal,  $F_z$  denota a carga vertical,  $T$  refere-se ao torque aplicado na roda,  $T_{rol}$  é o torque que resiste ao rolamento e  $R_{aer}$  simboliza a força de resistência aerodinâmica.

Em certas circunstâncias, a resistência ao rolamento pode ser considerada como a principal força que se opõe ao movimento. Em superfícies niveladas e em velocidades baixas, a resistência ao rolamento é a força de retardo mais significativa. Ao contrário das outras forças de resistência, essa começa a atuar assim que as rodas iniciam o giro (GILLESPIE, 1997).

Durante o movimento de rolamento das rodas sobre o solo, o pneu deforma-se de modo que parte da energia é dissipada. Assim, a mudança na distribuição da pressão de contato faz com que a tensão normal na banda de rodagem seja maior à frente do que à retaguarda, fazendo surgir uma resistência ao rolamento. Como a tensão normal é maior na parte frontal da banda de rodagem, a força resultante move-se também para a frente, provocando um torque contrário ao sentido de rolamento das rodas ( $T_{rol}$ ), o qual pode ser definido como proporcional ao produto da massa, da aceleração da gravidade ( $g$ ) e do raio da roda ( $r$ ), por meio do fator de resistência ( $f_r$ ) (JAZAR, 2014). A equação que expressa o torque de resistência ao rolamento pode ser expressa por:

$$T_{rol} = f_r mgr \quad (3.11)$$

O modelo linear representa a forma mais elementar de descrever o atrito, focando exclusivamente no atrito viscoso. Esse enfoque ignora a complexidade dos diversos fenômenos que afetam a fricção. Portanto, podemos afirmar que o torque de atrito é linearmente proporcional à  $\omega$ , conforme a Equação 3.12, onde  $b$  denota o coeficiente de resistência (atrito viscoso), e  $T_r$  é o torque associado à resistência ao atrito gerado pelo rolamento.

$$T_r = b\omega \quad (3.12)$$

A resistência aerodinâmica se deve ao arrasto sobre o veículo devido ao deslocamento de ar sobre ele. Ela é proporcional ao quadrado da velocidade longitudinal (em m/s), na qual  $\rho$  é a massa específica do ar (aproximadamente 1,225 kg/m<sup>3</sup>),  $C_d$  é o coeficiente de arrasto aerodinâmico e  $A_f$  é a área frontal (JAZAR, 2014):

$$R_{aer} = \frac{1}{2} \rho C_d A_f v_x^2 \quad (3.13)$$

Destaca-se que a resistência aerodinâmica não é significativa para veículos operando em baixas velocidades.

O torque na roda, gerado pelo motor, é responsável por superar as forças que se opõem ao movimento e proporcionar a aceleração desejada ao veículo. As equações de movimento do modelo podem ser descritas pelas Equações 3.14 e 3.15:

$$m\dot{v}_x = F_x - R_{aer} \quad (3.14)$$

$$J\dot{\omega} = T - rF_x - T_{Rol} \quad (3.15)$$

### 3.4 Modelo Bicicleta

Utilizando as equações de movimento linearizadas de Newton-Euler no plano  $xy$  para as forças que atuam em cada eixo, considera-se que as duas rodas de cada eixo podem ser representadas por uma única roda equivalente. O modelo de bicicleta desenvolvido (Figura 4) adota uma abordagem dinâmica. Esse modelo é um modelo dinâmico linear frequentemente empregado em soluções de controle relacionadas à dinâmica lateral do veículo.

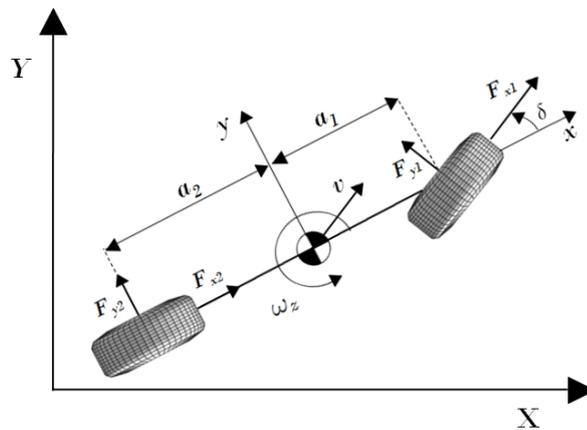


Figura 4 – Modelo bicicleta

Assume-se que o veículo é rígido e se desloca desconsiderando aspectos de suspensão e rolamento. Além disso, a força lateral é mantida como uma função linear, utilizando o coeficiente de rigidez do pneu. Esse modelo é caracterizado por dois graus de liberdade, como mostrado na Equação 3.16:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{mv_x} (-a_1 C_{\alpha 1} + a_2 C_{\alpha 2}) \omega_z - \frac{1}{mv_x} (C_{\alpha 1} + C_{\alpha 2}) v_y + \frac{1}{m} C_{\alpha 1} \delta - \omega_z v_x \\ \frac{1}{I_z v_x} (-a_1^2 C_{\alpha 1} - a_2^2 C_{\alpha 2}) \omega_z - \frac{1}{I_z v_x} (a_1 C_{\alpha 1} - a_2 C_{\alpha 2}) v_y + \frac{1}{I_z} a_1 C_{\alpha 1} \delta \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

No contexto apresentado,  $a_1$  representa a distância do eixo dianteiro em relação ao centro de gravidade, enquanto  $a_2$  refere-se à distância do eixo traseiro em relação ao mesmo centro de gravidade. Os coeficientes de rigidez dos pneus são denotados por  $C_{\alpha 1}$  para o pneu dianteiro e  $C_{\alpha 2}$  para o traseiro.

### 3.5 Estimação de Estados e Parâmetros

Os modelos dinâmicos, também conhecidos como modelos de espaço de estado, são desenvolvidos com o objetivo de permitir mudanças nas variáveis de estado que serão estimadas ao longo do tempo. Esses modelos são utilizados para representar tanto as observações (medidas) quanto as evoluções das variáveis de estado (SILVA, 2012).

Os problemas de estimação de estado são solucionados por meio dos filtros bayesianos. A abordagem bayesiana busca utilizar todas as informações disponíveis para reduzir a incerteza presente em um problema de inferência ou decisão. As novas informações obtidas são combinadas com as informações anteriores para formar a base dos procedimentos estatísticos. O teorema de Bayes é o mecanismo formal utilizado para combinar a nova informação com a informação anteriormente disponível (SILVA, 2012).

Os Filtros bayesianos são técnicas probabilísticas que empregam um algoritmo recursivo para estimar e atualizar os estados dinâmicos de um sistema com base na leitura de sensores, comandos, modelos e outros. Dentre os diversos tipos desses filtros, destacam-se o filtro de partículas e o filtro de Kalman.

#### 3.5.1 Filtro de Partículas

O método do filtro de partículas é uma técnica de Monte Carlo utilizada para resolver o problema de estimação de estado. Seu conceito fundamental envolve representar a função de densidade posterior desejada por meio de uma coleção de amostras aleatórias, conhecidas como partículas, juntamente com seus respectivos pesos. As estimativas são então calculadas com base nessas amostras e pesos. À medida que o número de amostras aumenta significativamente, essa representação de Monte Carlo se torna efetivamente uma

representação equivalente da função de probabilidade posterior, levando a uma abordagem que converge para a estimativa bayesiana ótima (ARULAMPALAM et al., 2002).

Considerando o vetor de observação  $z$  e o vetor de estados  $x$ , iniciamos com uma distribuição a priori  $\pi(x)$ , que indica o grau de crença associado a  $x$ . A função  $\pi(z|x)$  é conhecida como a função de verossimilhança do modelo, a qual descreve a distribuição de probabilidade das medidas em função dos estados. Como as medidas  $z$  fornecem informações sobre os estados  $x$ , podemos empregar  $z$  para atualizar as informações sobre  $x$ . Utilizando o teorema de Bayes, podemos determinar a distribuição condicional do vetor de estados dado as medidas, conforme ilustrado na Equação 3.17.

$$\pi(x|z) = \frac{\pi(z|x)\pi(x)}{\int \pi(z|x)\pi(x)dx} \quad (3.17)$$

Na Tabela 2 é apresentado o filtro de partículas utilizando o algoritmo de amostragem por importância e reamostragem.

1. Inicialização
1.1. Faça $k=1$ ;
1.2. Gere um conjunto de partículas da distribuição inicial $x_k^i = \pi(x_k x_{k-1}^i)$ .
2. Avaliação dos pesos
2.1. Calcule os pesos: $w_k^i = \pi(z_k x_k^i)$ ;
2.2. Normalize os pesos: $\hat{w}_k^i = \frac{w_k^i}{\sum_{i=1}^N w_k^i}$ .
3. Reamostragem
3.1. Construa a soma dos pesos acumulados $c_i = c_{i-1} + \hat{w}_k^i$ para $i = 1, \dots, N$ com $c_0 = 0$ ;
3.2. Tome $i = 1$ e gere $\zeta_1$ de uma distribuição uniforme $U[0, N^{-1}]$ ;
3.3. Para $j = 1, \dots, N$ faça:
3.3.1. Calcule $\zeta_j = \zeta_1 + N^{-1}(j - 1)$ ;
3.3.2. Enquanto $\zeta_j > c_i$ faça $i = i + 1$ ;
3.3.3. Designe as partículas $x_k^j = x_k^i$ ;
3.3.4. Designe os pesos $w_k^j = N^{-1}$ .
4. Cálculo da média a posteriori
$x_k = \sum_{i=1}^N x_k^{(i)} \cdot w_k^{(i)}$
5. Evolução do modelo
5.1. Faça $k = k + 1$ , Se $k = k_{final} + 1$ , então pare;
5.2. $x_k^i = \pi(x_k x_{k-1}^i)$ para $i = 1, \dots, N$ .
Retorne para 2.

Tabela 2 – Algoritmo do filtro de partícula SIR  
(SILVA, 2012)

O modelo de evolução é utilizado para calcular as partículas durante a etapa de previsão. Em seguida, na etapa de atualização, o modelo de observação é empregado para calcular os pesos das partículas, levando em consideração as informações de verossimilhança.

Os pesos são então normalizados para garantir que a soma de todos eles seja igual a um. Durante a etapa de reamostragem, o algoritmo SIR é implementado, no qual as partículas com os maiores pesos são replicadas, enquanto as partículas com baixos pesos de importância são eliminadas. Por fim, ao final da execução do algoritmo, as partículas fornecem a média da densidade a posteriori (ORLANDE et al., 2008).

O fenômeno de degeneração é um problema comum encontrado pelo filtro de partículas de amostragem por importância (SIS, do inglês *Sequential Importance Sampling*), no qual todas as partículas, exceto uma, possuem peso negligenciável após alguns estados. Para superar esse problema, pode-se aumentar o número de partículas ou, de forma mais eficiente, selecionar a densidade de importância como a densidade anterior  $\pi(x_k|x_{k-1}^i)$ . Além disso, é aconselhável utilizar a técnica de reamostragem para evitar a degeneração das partículas. A reamostragem envolve transformar a medida aleatória  $(x_k, w_k^i)$  em uma medida aleatória com pesos uniformes  $(x_k^i, N^{-1})$ . Esse procedimento é realizado quando o número de partículas efetivas com pesos significativos cai abaixo de um determinado limite (RISTIC et al., 2003). Embora a reamostragem ajude a aliviar o problema de degeneração, ela pode levar a uma perda de diversidade, resultando em uma amostra contendo partículas repetidas (ORLANDE et al., 2008).

### 3.5.2 Filtro de Kalman Estendido

O filtro de Kalman foi inicialmente desenvolvido para resolver problemas de comunicação e controle. Foi criado por Kalman, em 1960, como uma técnica para previsão e filtragem em sistemas lineares gaussianos e é o filtro bayesiano mais conhecido. No entanto, sua aplicação é limitada a modelos lineares com ruídos aditivos e gaussianos.

No passado, foram desenvolvidas extensões do filtro de Kalman para casos menos restritos, utilizando técnicas de linearização, como o filtro de Kalman Estendido (EKF) (RIBEIRO, 2004). De acordo com Arulampalam et al. (2002), o EKF não apresenta bons resultados para problemas de alta dimensionalidade, ou seja, quando há muitos parâmetros a serem estimados.

O EKF fornece uma aproximação da estimativa ótima. As não linearidades da dinâmica do sistema são aproximadas por uma versão linearizada do modelo de sistema não-linear em torno da última estimação de estados. Para que essa aproximação seja válida, a linearização deve ser uma boa aproximação do modelo não-linear em todo o domínio de incerteza associado à estimação (RIBEIRO, 2004). O EKF é aplicado a um sistema de tempo discreto, do tipo:

$$\begin{cases} x(i+1) = f(x(i), u(i)) \\ z(i+1) = h(x(i+1)) \end{cases} \quad (3.18)$$

O algoritmo para EKF é descrito na sequência abaixo, para uma estimação de estados ( $\hat{x}(i|i)$ ), que é o estado do sistema na amostra  $i$ , estimado na amostra  $i$ . É importante ressaltar que as matrizes  $P$ ,  $R$  e  $Q$  devem ser inicializadas como tipos diagonais para garantir a convergência do filtro (LOPES et al., 2020). As iterações do EKF são compostas pelos seguintes passos, começando pelas matrizes jacobianas:

$$F(i) = \frac{\partial f}{\partial x_{\hat{x}(k|k)}} \quad (3.19)$$

$$H(i) = \frac{\partial h}{\partial x_{\hat{x}(k+1|k)}} \quad (3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(i+1|i) = F(i)P(i|i)F(i)^T + Q(i) \\ S(i+1) = R(i) + H(i)P(i+1|i)H(i)^T \\ W(i+1) = P(i+1|i)H(i)^T S(i+1)^{-1} \\ \hat{x}(i+1|i) = f(\hat{x}(i|i), u(i)) \\ \hat{z}(i+1|i) = h(\hat{x}(i+1|i)) \\ \\ \nu(i+1) = z(i+1) - \hat{z}(i+1|i) \\ \hat{x}(i+1|i+1) = \hat{x}(i+1|i) + W(i+1)\nu(i+1) \\ P(i+1|i+1) = P(i+1|i) - W(i+1)S(i+1)W(i+1)^T \end{array} \right. \quad (3.21)$$

### 3.5.3 Estimação de Estados por Horizonte Móvel

O projeto de um estimador de estado para um sistema discreto não linear é um problema desafiador. Uma estratégia ao estimar estados é empregar otimização *online* usando uma aproximação de horizonte móvel. Na estimação de estado por horizonte móvel, à medida que novas medidas se tornam disponíveis, as antigas são descartadas da janela de estimação e o problema de estimação de estado por horizonte finito é resolvido para determinar a nova estimação. O método é baseado em otimização, portanto, a MHSE pode lidar explicitamente com sistemas não lineares e restrições de desigualdade nas variáveis de decisão (RAO et al., 2003).

As vantagens da MHSE são a consideração explícita de restrições de estado e parâmetro, a otimalidade das estimativas por mínimos quadrados, a capacidade de estimar perturbações na forma de parâmetros desconhecidos e lentamente variáveis no tempo. Isso é diferente de muitas outras abordagens de estimação, onde os parâmetros precisam ser reformulados como estados adicionais (KÜHL et al., 2011).

A MHSE é o mais recente dos métodos abordados. Nesse método, a estimação dos estados em cada instante de tempo é obtida por meio de uma previsão dos estados  $N$  instantes anteriores e pela estimação dos estados nessa janela de tempo utilizando o

modelo dinâmico e os dados medidos. Nesse caso, podem ser utilizados modelos em tempo contínuo ou discreto (LOPES et al., 2020).

A Função Custo (FC) é dada pela Equação 3.22, onde  $P^*$  e  $Q^*$  são matrizes diagonais peso que permitem priorizar as parcelas da FC.

$$J(\hat{x}(\cdot), u(\cdot), z(\cdot)) = \|\hat{x}_{k-N|k} - x_{k-N|k}^+\|_{P^*}^2 + \sum_{i=k-N}^k \|z_i - \hat{z}_i\|_{Q^*}^2 \quad (3.22)$$

$$x_{k-N|k}^+ = f(\hat{x}_{k-N-1|k-1}, u_{k-N-1})$$

O argumento do problema de otimização é o conjunto de estados no início do horizonte, conforme apresentado na Equação 3.23. Uma vez definida a estimativa no início do horizonte  $x_{i+1|k}$ , a estimativa da amostra atual deve ser definida através do modelo dinâmico (LOPES, 2022).

$$J(\hat{x}_{k-N|k} = \operatorname{argmin} J(\hat{x}(\cdot), u(\cdot), z(\cdot)))$$

$$x_{i+1|k} = f(\hat{x}_{i|k}, u_i) \quad (3.23)$$

$$\hat{z}_{i+1|k} = h(\hat{x}_{i+1|k}, u_{i+1})$$

$$x_{min} \leq \hat{x}_{i|k} \leq x_{max}$$

### 3.5.4 Métricas de Avaliação

Na estimação de estados e análise de dados, algumas métricas são comumente utilizadas para a avaliação da qualidade dos parâmetros estimados.

O erro é definido como a discrepância entre os valores previstos pelo modelo e os valores efetivamente observados. Existem diversas maneiras de quantificar esse erro, sendo que algumas das mais utilizadas são o Erro Absoluto (EA), conforme ilustrado na Equação 3.24, e a raiz do erro quadrático médio (RMSE, do inglês *Root Mean Squared Error*), conforme demonstrado na Equação 3.25.

$$\epsilon = |z_i - \hat{z}_i| \quad (3.24)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2} \quad (3.25)$$

Onde,  $z_i$  são os valores observados,  $\hat{z}_i$  são os valores estimados,  $n$  é o número total de observações. A RMSE mede a magnitude do erro em uma escala similar aos dados originais. Um valor menor da RMSE indica um melhor ajuste do modelo, ou seja, uma menor diferença entre os valores estimados e os valores reais.

O coeficiente de determinação ( $R^2$ ) é uma métrica que indica a proporção da variabilidade dos dados que é explicada pelo modelo utilizado. Para calculá-lo, realiza-se

uma comparação entre o erro do modelo em análise e o erro de um modelo de referência, que geralmente é a média dos valores observados. O valor de  $R^2$  varia de 0 a 1, onde 1 significa que o modelo explica perfeitamente a variação dos dados em relação à média. A Equação 3.26 ilustra o processo de obtenção do coeficiente de determinação, sendo  $\bar{z}$  a média dos valores observados.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2} \quad (3.26)$$

## 4 ESTIMAÇÃO COM FILTRO DE PARTÍCULAS

Neste capítulo, o conceito da abordagem bayesiana é utilizado para estimar o coeficiente de atrito entre o pneu do veículo e a estrada, utilizando o modelo de um quarto de carro e a fórmula mágica. Na abordagem bayesiana, todas as informações disponíveis são utilizadas para reduzir a quantidade de incerteza presente em um problema inferencial ou de tomada de decisão. O método de filtro de partículas é aplicado para o problema de estimação de estados usando o algoritmo de amostragem por importância e reamostragem. Medidas sintéticas da velocidade angular são utilizadas para o modelo de observação para estimar com precisão o coeficiente de atrito e a velocidade longitudinal.

### 4.1 Equações Dinâmicas

Conforme apresentado, as equações de movimento do veículo podem ser expressas pelas Equações 3.14 e 3.15, quando utilizamos o modelo de um quarto de carro.

A partir da Equação 3.1 é possível substituir a variável  $\omega$  por  $\lambda$ . Essa substituição pode ser alcançada ao incorporar as relações algébricas 4.1 e 4.2.

$$\omega = \frac{v_x(1 + \lambda)}{r} \quad (4.1)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\dot{v}_x(1 + \lambda) + \lambda \dot{v}_x}{r} \quad (4.2)$$

As equações de estado do sistema são obtidas substituindo a Equação 4.2 na Equação 3.15 e isolando o  $\dot{\lambda}$ . Além disso, incluindo a Equação 3.14 e isolando o  $\dot{v}_x$ :

$$\dot{\lambda} = \frac{Tr}{Jv_x} - \frac{(1 + \lambda)}{v_x}(\mu(\lambda)g - \frac{1}{2m} \rho C_d A_f v_x^2) - (\mu(\lambda) + f_r) \frac{mgr^2}{Jv_x} \quad (4.3)$$

$$\dot{v}_x = (\mu(\lambda)g - \frac{1}{2m} \rho C_d A_f v_x^2) \quad (4.4)$$

Podemos definir o modelo de espaço de estado não linear da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ z = h(x, u) + \xi_n \end{cases} \quad (4.5)$$

Desta forma,  $\lambda$  e  $v_x$  são as componentes do vetor de estados ( $x$ ),  $\omega$  é a saída do sistema ( $z$ ),  $T$  é a entrada do sistema ( $u$ ) e  $\xi_n$  é o ruído das medidas.

## 4.2 Entrada do Sistema e Parâmetros do Modelo

A fim de avaliar o modelo e o estimador, a dinâmica é simulada considerando o torque de entrada apresentado na Figura 5 relativo às simulações do trem de força de um veículo leve. O modelo de um quarto de carro é simulado com os parâmetros presentes na Tabela 3 para um veículo típico de passageiros, realizando deslocamento na neve no intuito de gerar maiores deslizamentos.

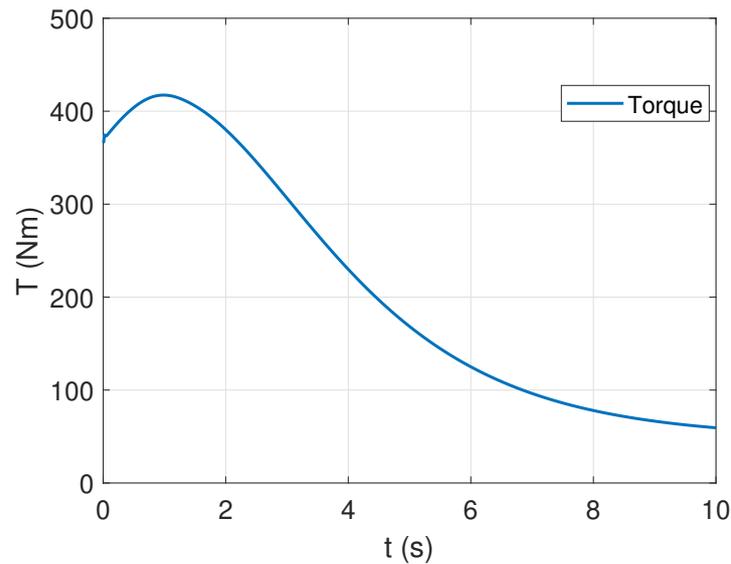


Figura 5 – Torque de entrada

Parâmetros	Valores	Unidade
$m$	431	kg
$g$	9,81	m/s <sup>2</sup>
$J$	2,1	kgm <sup>2</sup>
$r$	0,3	m
$f_r$	0,015	–
$\rho$	1,225	kg/m <sup>3</sup>
$A_f$	2	m <sup>2</sup>
$C_d$	0,45	–

Tabela 3 – Parâmetros do modelo para o filtro de partículas

## 4.3 Coeficiente de Atrito Variável

Para esse caso, medidas sintéticas da velocidade angular da roda do veículo são geradas adicionando um ruído de  $(\xi_n) = 0,05$ . O computador utilizado possui um processador de 2,4 GHz 11<sup>a</sup> Geração Intel® Core™ i5 (4 núcleos) e memória RAM de 8 GB (3200 MT/s).

Na Figura 6a, a linha tracejada azul é o resultado numérico do coeficiente de atrito, a linha preta é a estimação e a linha vermelha é o intervalo de 99% de confiança. A estimação inicial do coeficiente de atrito é de 0,3, ocasionando um maior erro inicial. Na Figura 6b, os pontos verdes são as medidas da velocidade angular, a linha tracejada azul é o resultado numérico da simulação e a linha preta é o valor estimado da velocidade.

Pode-se notar que no período compreendido entre 2 e 4 segundos, os valores estimados experimentam um desvio, que é posteriormente corrigido. Para esse experimento, o tempo computacional exigido para a simulação com 20 partículas foi de 3,83 segundos.

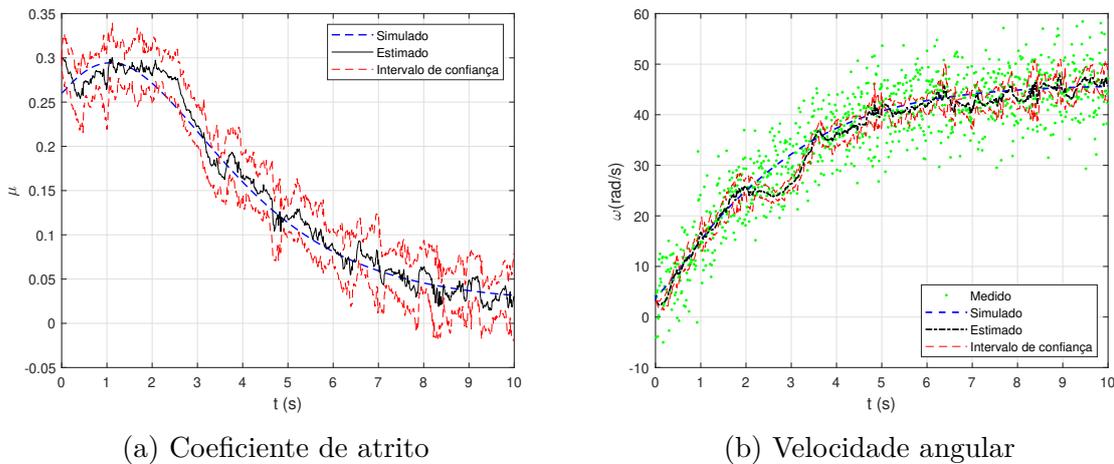


Figura 6 –  $\mu$  e  $\omega$  com 20 partículas para atrito variável

Na Figura 7, os valores previamente mencionados foram reavaliados com a aplicação de 1000 partículas no filtro. A elevação no número de partículas resultou em uma diminuição do desvio das estimativas no intervalo de 2 a 4 segundos. Entretanto, essa abordagem também acarretou um aumento no tempo computacional exigido para a simulação, que agora é de 8,73 segundos. Essa relação entre a quantidade de partículas e o tempo de processamento é um aspecto crucial a ser considerado na análise dos resultados.

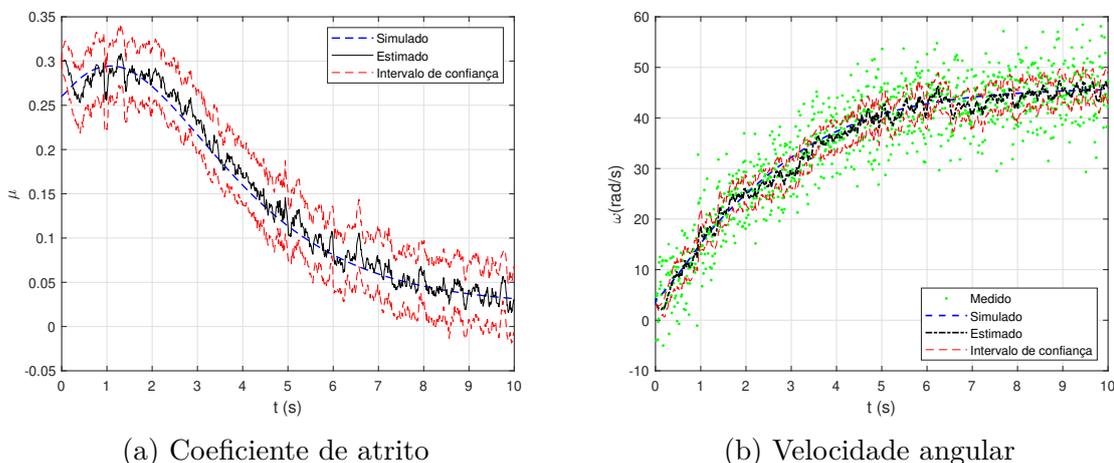


Figura 7 –  $\mu$  e  $\omega$  com 1000 partículas para atrito variável

Na Figura 8, as estimativas do coeficiente de atrito para 20 e 1000 partículas são mostradas, adicionando a possibilidade de interpolar os valores estimados, por mínimos quadrados, como uma alternativa para mitigar o erro.

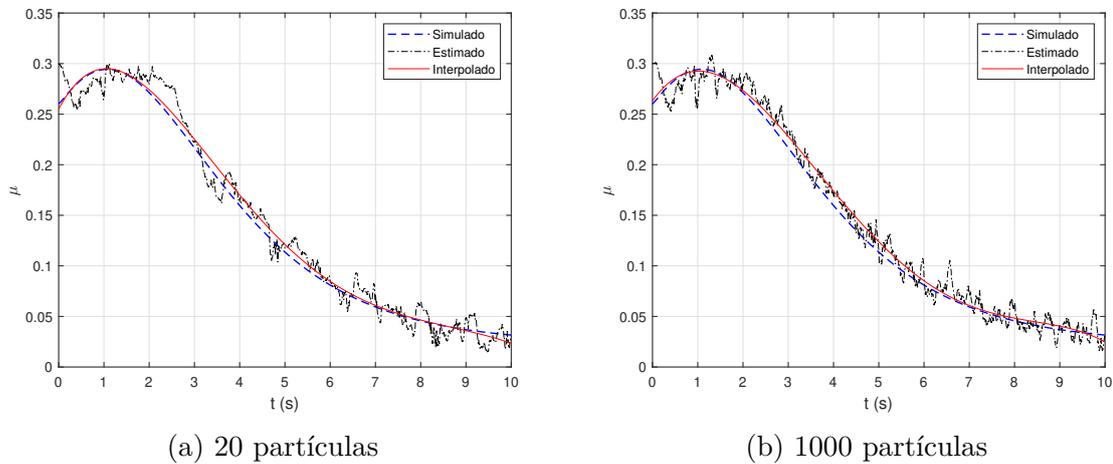


Figura 8 – Coeficiente de atrito interpolado para atrito variável

#### 4.4 Coeficiente de Atrito Constante

No contexto do estudo que considera um coeficiente de atrito constante de 0,15, foram obtidas medidas simuladas da velocidade angular da roda. O filtro de partículas necessitou de 0,41 segundo utilizando 20 partículas, enquanto com 1000 partículas, o tempo de execução aumentou para 4,22 segundos no mesmo sistema computacional. A estimativa inicial do coeficiente utilizada permaneceu sendo 0,3, o que gerou um erro inicial a ser atenuado.

Nas Figuras 9 e 10, são apresentados o coeficiente de atrito e a velocidade angular da roda, simulados e estimados, respectivamente, para 20 partículas e para 1000 partículas.

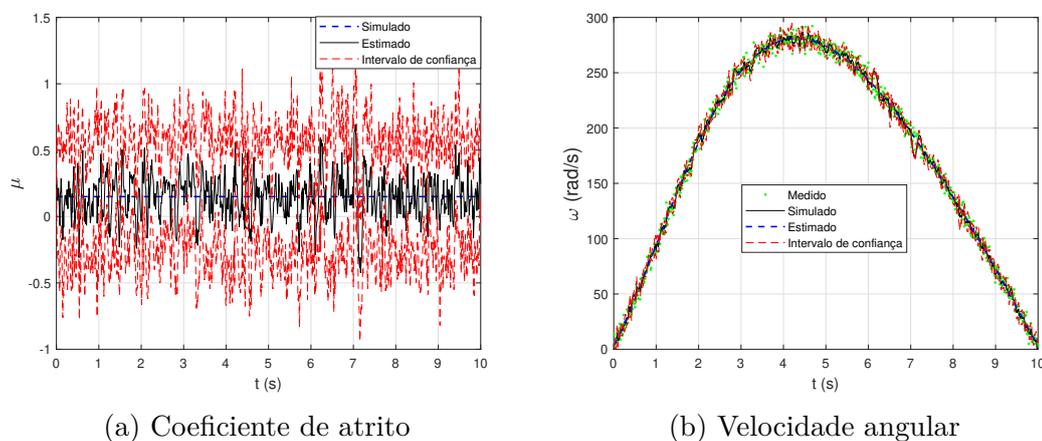
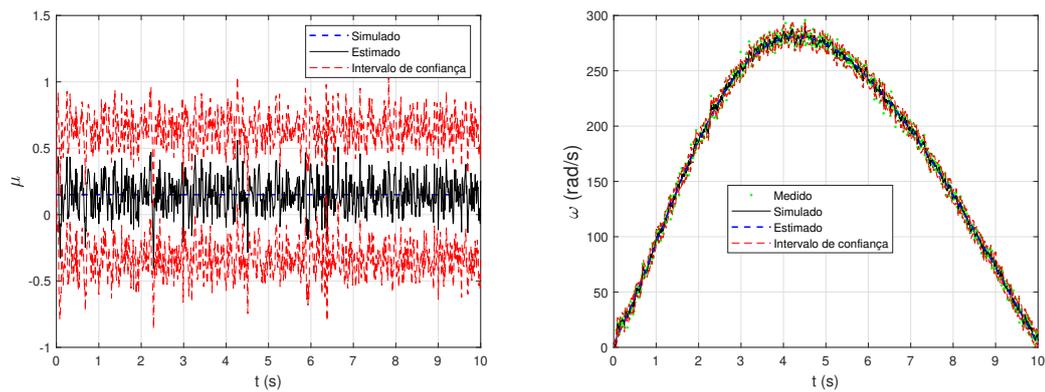


Figura 9 –  $\mu$  e  $\omega$  com 20 partículas para atrito constante

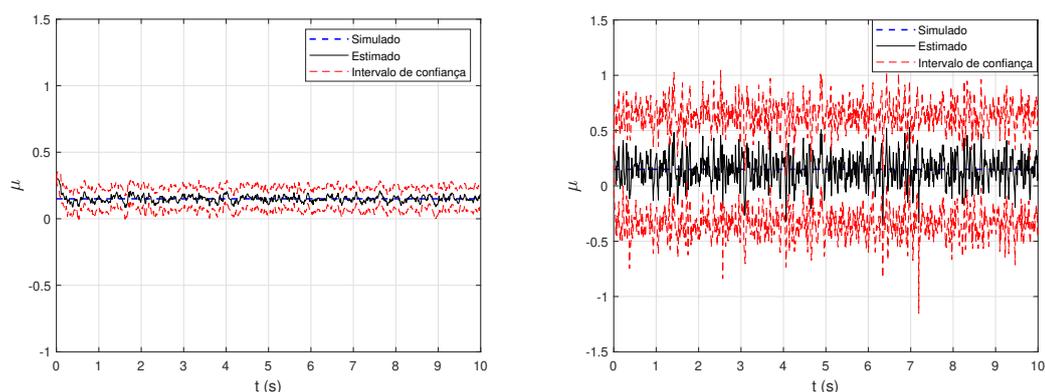


(a) Coeficiente de atrito

(b) Velocidade angular

Figura 10 –  $\mu$  e  $\omega$  com 1000 partículas para atrito constante

A análise realizada na Figura 11 considerou os passos aleatórios de 0,01 e 0,1 no filtro, com a utilização de 1000 partículas. Nota-se que o aumento do passo está associado a um aumento na amplitude das oscilações do coeficiente de atrito estimado.



(a) Passo de 0,01

(b) Passo de 0,1

Figura 11 – Passos de 0,01 e 0,1 utilizando 1000 partículas para atrito constante

## 4.5 Coeficiente de Atrito em Degrau

O último caso envolve um coeficiente de atrito em degrau, com um mínimo de 0,1 e um máximo de 0,25. A previsão inicial do coeficiente adotado foi de 0,2, resultando em um erro inicial menor em comparação ao caso anterior. Com o aumento do número de partículas de 20 para 1000, observou-se uma rápida recuperação da curva de estimativa, principalmente no intervalo em que há variação no valor do coeficiente, e uma redução nas oscilações dos valores.

Observa-se na Figura 12, o coeficiente de atrito e a velocidade angular em um filtro com 20 partículas, enquanto a Figura 13 apresenta o mesmo para um filtro que possui 1000 partículas.

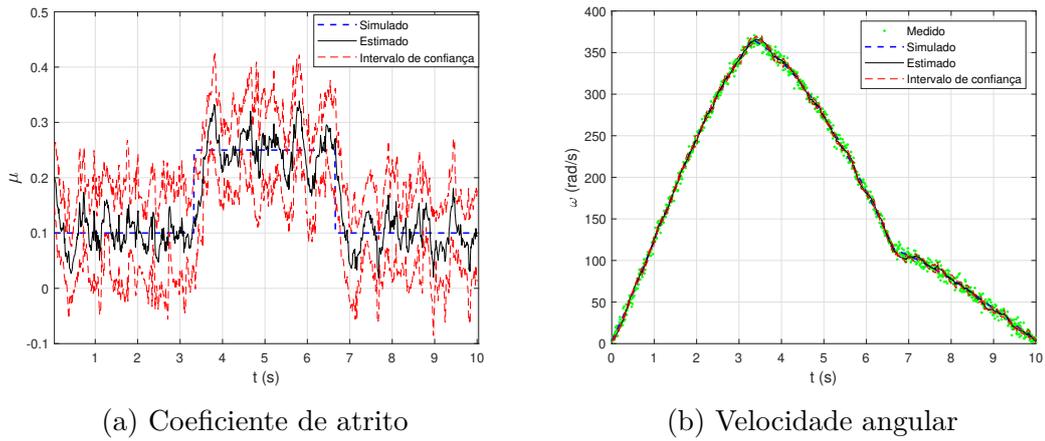


Figura 12 –  $\mu$  e  $\omega$  com 20 partículas para atrito em degrau

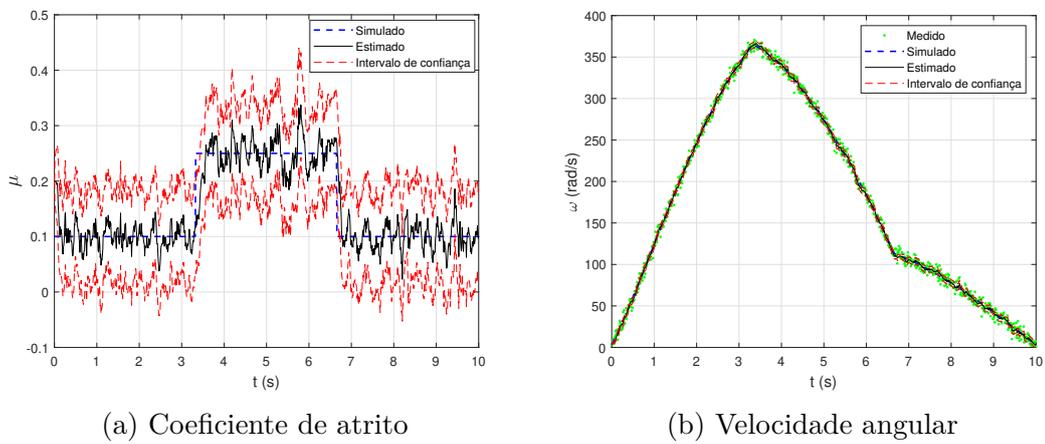


Figura 13 –  $\mu$  e  $\omega$  com 1000 partículas para atrito em degrau

A comparação apresentada na Tabela 4 ilustra o tempo médio de simulação e os valores de RMSE para o coeficiente de atrito em cinco simulações, utilizando três quantidades distintas de partículas.

Partículas	Tempo(s)	RMSE
20	0,19	0.0321
1000	3,86	0.0220
5000	17,49	0.0218

Tabela 4 – Tempo e erro da simulação

Com o aumento do número de partículas, tanto o tempo de computação quanto a precisão da estimativa se elevam. No entanto, o custo computacional se torna significativamente maior do que a redução do erro. Considerando que o tempo de simulação para o estudo de caso é de 10 segundos, a estimativa utilizando 5000 partículas torna a identificação online impraticável. A identificação online diz respeito à estimação de parâmetros e estados em que os dados são processados à medida que são recebidos, permitindo ajustes imediatos no sistema.

## 4.6 Conclusões Parciais

O método do filtro de partículas foi aplicado para o problema de estimação de estado utilizando o algoritmo SIR. Com apenas 20 partículas, as estimativas do coeficiente de atrito foram aceitáveis; no entanto, houve uma melhora significativa com a elevação para 1000, embora isso tenha acarretado um aumento no custo computacional.

No primeiro caso em que o coeficiente de atrito é variável, o ajuste polinomial de quinto grau da curva estimada do coeficiente de atrito variável minimizou o EA associado à estimativa. No caso de um coeficiente constante, o aumento do passo aleatório demonstrou ser relevante para o ajuste da curva de estimativa; contudo, gerou maiores oscilações do coeficiente de atrito. No último caso, com mais partículas, o tempo de amostragem e a exatidão aumentam, mas o custo computacional se eleva consideravelmente em relação à redução do erro.

As estimativas geradas pelo algoritmo atendem ao padrão de precisão desejado ao utilizar 1000 partículas. O filtro de partículas foi aplicado com sucesso a um problema de estimação de estado de um sistema dinâmico não linear. A técnica de Monte Carlo proporcionou resultados de estimativa precisos para os três casos de coeficiente de atrito analisados (variável, constante e em degrau).

## 5 ESTIMAÇÃO COM EKF E MHSE EM ESTRUTURA HIERÁRQUICA

O estudo em questão envolve a análise de dados experimentais obtidos de um veículo em escala, dotado de dois eixos e tração nas quatro rodas. Inicialmente, ele é suspenso, e as medições experimentais são empregadas para a estimativa de parâmetros constantes, como o coeficiente de atrito e o momento de inércia das rodas. Em seguida, são realizadas simulações do veículo em uma superfície para avaliar os dados simulados e calibrar o modelo. Por fim, ao ser conduzido em uma trajetória retilínea, em uma pista de 6 metros de comprimento, são estimados os estados e o coeficiente de atrito entre as rodas e a superfície da pista.

A metodologia proposta baseia-se na análise de dados coletados de um veículo em escala utilizando um número limitado de sensores. Como primeiro passo no pré-processamento, esses dados são filtrados por meio de um filtro Butterworth de primeira ordem. Um observador de estado hierárquico é desenvolvido, utilizando um modelo matemático das dinâmicas longitudinais, especificamente o modelo de um quarto de carro, incorporando duas abordagens distintas para estimar: o EKF e a MHSE. A utilização dessas duas metodologias de estimação permite explorar as vantagens inerentes a cada uma. O EKF é amplamente reconhecido por sua eficácia na gestão de sistemas não lineares e por sua eficiência computacional. Em contrapartida, a MHSE, que ainda é relativamente pouco explorada na literatura existente, utiliza uma janela temporal deslizante para aprimorar a precisão dos resultados e a robustez contra incertezas de modelagem e ruídos. Ao aplicar simultaneamente esses dois métodos, o observador visa a otimizar a precisão das estimativas, como a velocidade longitudinal e a força de atrito, enquanto reduz a sensibilidade a ruídos e erros de modelagem. Uma vez estabelecido o coeficiente de atrito, a velocidade longitudinal é calculada com maior precisão por meio do método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK).

Dois etapas *offline* são realizadas para aprimorar o observador. A primeira etapa consiste na estimação de parâmetros desconhecidos do modelo matemático, utilizando a otimização por enxame de partículas (PSO, do inglês *Particle Swarm Optimization*) para determinar o coeficiente de resistência e o momento de inércia da roda. A segunda etapa concentra-se na calibração do observador, que utiliza a FM para gerar dados simulados, facilitando a minimização do erro entre os estados estimados e aqueles calculados durante a simulação. A FM é empregada exclusivamente na fase de calibração do algoritmo de estimativa, servindo como um parâmetro de referência para a configuração inicial. Após essa fase de calibração, o algoritmo pode estimar estados utilizando apenas dados experimentais, sem a necessidade de incorporar o modelo do pneu durante a estimação em tempo real.

Essa abordagem reduz a complexidade computacional e melhora a eficiência do algoritmo ao eliminar a dependência contínua de um modelo teórico de pneu, garantindo que as estimativas permaneçam robustas, mesmo sob condições experimentais variadas.

É relevante destacar que, se todos os parâmetros do modelo forem conhecidos, a primeira etapa *offline* torna-se desnecessária. Da mesma forma, se o observador de estado já estiver devidamente calibrado, a segunda etapa *offline* não será necessária, permitindo a aplicação do observador sem a necessidade de um modelo de pneu.

O fluxograma exibido na Figura 14 esclarece a metodologia sugerida neste capítulo.

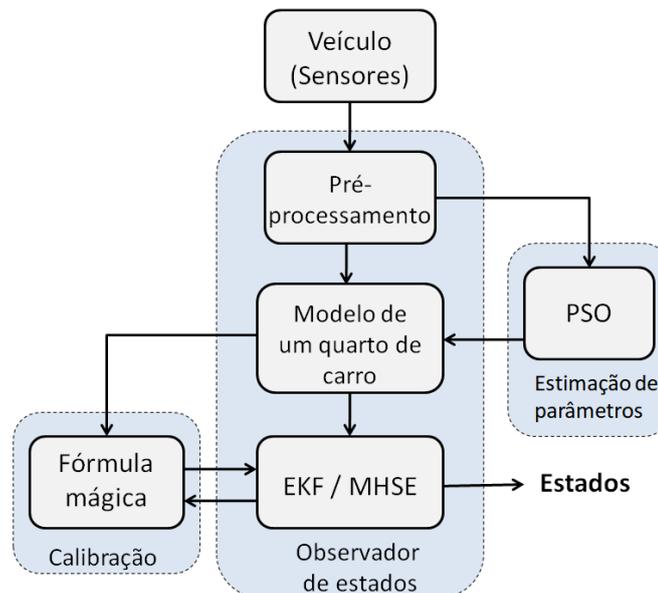


Figura 14 – Metodologia proposta

## 5.1 Experimento com o Veículo Suspenso

Os dados experimentais foram obtidos do veículo em escala Quanser® Car, presente na Figura 15, no laboratório de projetos mecânicos do Instituto Militar de Engenharia (IME).



Figura 15 – Veículo em escala

O Quanser® Car é um veículo de arquitetura aberta projetado para a pesquisa acadêmica. Tal fato facilita a ratificação dos conceitos de pesquisa e a geração de um conjunto de dados. O veículo é equipado com uma ampla gama de sensores, incluindo um encoder e uma unidade de medição inercial (IMU, do inglês *Inertial Measurement Unit*).

No primeiro experimento, realizado com o veículo em posição suspensa, a corrente elétrica do motor ( $i_m$ ) e a velocidade angular da roda ( $\omega$ ) foram medidas.

Todos os sensores podem apresentar imprecisões de resolução ou ruídos na medição, causados principalmente por interferência. Com o propósito de reduzir o ruído das medidas da corrente do motor, foi aplicado um filtro de Butterworth de primeira ordem, como mostrado na Figura 16. O filtro de Butterworth é um filtro passa-baixa que visa a permitir a passagem de ruídos de frequências abaixo de um determinado limite, enquanto atenua frequências acima do limite. Esse limite é chamado de ponto de corte de frequência do filtro.

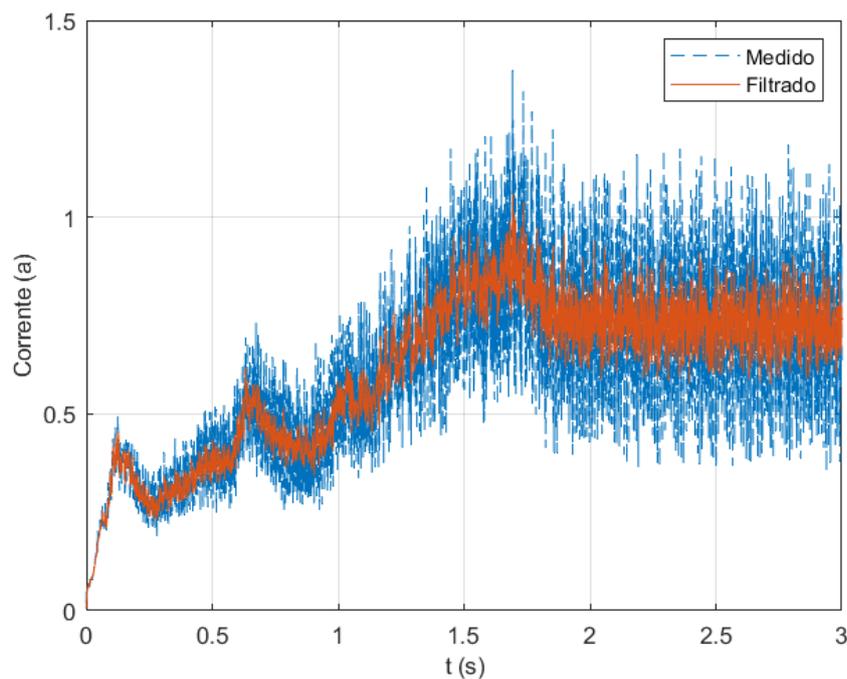


Figura 16 – Corrente filtrada

Outros aspectos relevantes no pré-processamento dos dados incluíram a eliminação do atraso causado pelo filtro e a exclusão da corrente residual.

Pela lei de Euler, na Equação 5.1, temos na roda:

$$J\dot{\omega} = k_m i_m - b\omega \quad (5.1)$$

Onde ( $k_m$ ) representa a constante do motor que transforma a corrente elétrica em torque.

Para a estimação dos parâmetros constantes ( $b$  e  $J$ ), o método de otimização por enxame de partículas. O PSO foi criado baseado no movimento de pássaros em busca de comida, e tenta equilibrar a individualidade e a sociabilidade dos indivíduos, a fim de localizar o melhor local para se alimentar. Para a aplicação do método, é necessário definir uma função custo, que é a função a ser minimizada.

Nessa estimação, duas FC foram analisadas, uma delas utilizando o método de RK de quarta ordem e a outra utilizando o cálculo analítico da resposta temporal, através da ferramenta de simulação linear do MATLAB® (LSIM). Para a aplicação do método, foram definidas 200 partículas, uma tolerância de  $10^{-6}$  e um máximo de 50 iterações.

Na Tabela 5 estão os parâmetros utilizados para simular o sistema dinâmico em questão:

Parâmetros	Valores	Unidade
$m$	0,7	kg
$g$	9,81	m/s <sup>2</sup>
$J$	$3,2 \times 10^{-3}$	kgm <sup>2</sup>
$r$	0,033	m
$b$	0,01	-

Tabela 5 – Parâmetros do modelo

Na Figura 17, é possível visualizar a velocidade angular medida na roda e a velocidade angular obtida após a utilização dos parâmetros estimados ( $b$  e  $J$ ) pelo método de RK.

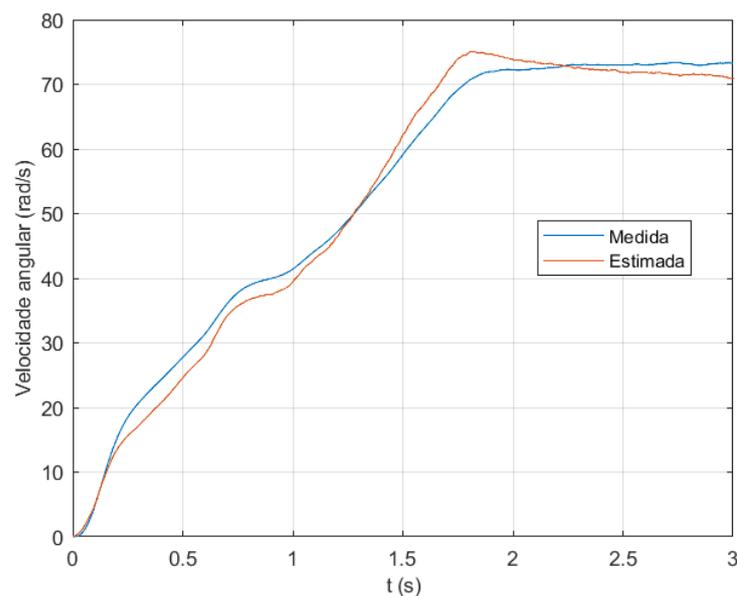


Figura 17 – Velocidade angular estimada por Runge-Kutta

Na Tabela 6 são apresentadas as iterações necessárias, o momento de inércia estimado, o coeficiente de atrito estimado e o  $R^2$ , para os dois métodos.

FC	Iteraces	$J$	$b$	$R^2$
RK	34	$3,167 \times 10^{-3}$	$10,29 \times 10^{-3}$	0,98892
LSIM	38	$3,173 \times 10^{-3}$	$10,28 \times 10^{-3}$	0,98891

Tabela 6 – Comparaco das funes custo

## 5.2 Simulaco do Veículo no Solo

A observabilidade  essencial para resolver problemas de reconstruco de variáveis de estado não mensuráveis a partir de variáveis mensuráveis em um curto período de tempo, devido  limitaco de acesso direto a algumas variáveis de estado no controle por realimentaco.  preciso estimar essas variáveis não mensuráveis para gerar os sinais de controle (OGATA, 2010). Para análise da observabilidade do sistema descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ z = Cx + Du \end{cases} \quad (5.2)$$

Sendo:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-b}{J} & \frac{-mgr}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & g \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Onde  $m$   um quarto da massa do veículo,  $g$   a acelerao da gravidade e  $r$   o raio efetivo da roda.

A matriz de observabilidade :

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{-b}{J} & \frac{-mgr}{J} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Como o posto da matriz  igual a 2, logo, todos os estados são observáveis em uma primeira análise.

A simulacão computacional do veículo no solo tem o propósito de avaliar os dados sintéticos obtidos e realizar a calibrao do modelo. Busca-se estimar o coeficiente de atrito entre o pneu e a pista através de estados aumentados. A estimacão por estados aumentados visa a identificar com melhor precisão um estado de um sistema dinâmico sujeito a ruídos e incertezas, com base em medies disponíveis.  importante notar que a

formulação de estados aumentados assume que as dinâmicas das variações desconhecidas de  $\mu$  ocorrem lentamente em comparação com os demais estados do sistema.

Nesse caso, as medições da velocidade angular da roda ( $\omega$ ) e da aceleração longitudinal do veículo ( $a_x$ ) serão geradas de forma sintética e submetidas a ruídos de 5%.

A equação de estado do modelo é:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{v}_x \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T - b\omega - mgr\mu)/J \\ \mu g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Para simular o sistema, foi empregado um torque (T) constante da roda de 0,75 Nm. Utilizando o torque como entrada do sistema, espera-se obter os seguintes estados: a velocidade angular da roda ( $\omega$ ), a velocidade longitudinal do veículo ( $v_x$ ) e o coeficiente de atrito ( $\mu$ ).

Inicialmente, é essencial estabelecer a calibração dos parâmetros de inicialização. No método EKF, as matrizes de covariância foram definidas pelas matrizes diagonais:  $P = [10^3 \ 10^4]$ ,  $Q = [10^3 \ 10^3]$  e  $R = [10^4 \ 10^4]$ . No processo de calibração da MHSE, é necessário estabelecer o comprimento da janela de observação ( $N$ ) e as matrizes diagonais de peso  $S$  e  $V$ , respectivamente, associadas ao vetor de estados ( $x = [\omega \ \mu]^T$ ) e ao vetor de medidas ( $z = [\omega \ a_x]^T$ ). Após a calibração, obtemos os seguintes valores:  $N = 4$ ,  $S = [10^4 \ 10^5]$  e  $V = [10^4 \ 10^8]$ .

Na Tabela 7 estão os coeficientes de determinação médios para cinco simulações, com um tempo de amostragem de 0,001 s, um coeficiente de atrito inicial de  $\mu = 0,5$  e uma velocidade angular inicial de  $\omega = 1$  rad/s.

Método	MHSE		EKF	
	0%	5%	0%	5%
$R^2(\mu)$	0,996	0,996	0,994	0,992
$R^2(\omega)$	1	0,989	1	0,990
$R^2(v_x)$	0,999	0,999	0,999	0,999

Tabela 7 – Coeficiente de determinação médio

Utilizando o mesmo computador, com um processador de 2,4 GHz 11<sup>a</sup> Geração Intel® Core™ i5 (4 núcleos) e memória RAM de 8 GB (3200 MT/s).

O tempo médio de processamento obtido a partir de cinco simulações foi de  $0,82 \times 10^{-3}$  segundos para o EKF e  $7,3 \times 10^{-3}$  segundos para a MHSE.

Com o objetivo de melhorar a precisão, é realizada uma estimação hierárquica. Nela, os estados e parâmetros do modelo são estimados levando em consideração a estrutura hierárquica dos dados. Ao estimar os parâmetros desconhecidos e em seguida apenas  $\omega$  e

$\mu$ , e posteriormente, utilizar os valores estimados de  $\mu$  por meio do RK de quarta ordem para aproximar os valores de  $v_x$ , é possível alcançar resultados significativamente mais precisos, mesmo na presença de um erro de medição de 5%.

Nas Figuras 18-20 são apresentados os valores simulados e estimados da velocidade angular da roda, do coeficiente de atrito e da velocidade longitudinal do veículo.

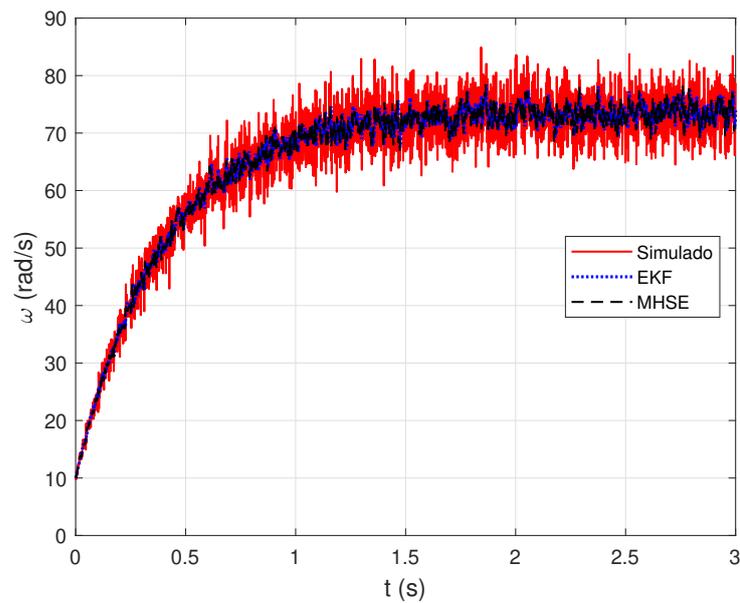


Figura 18 – Velocidade angular para simulação no solo

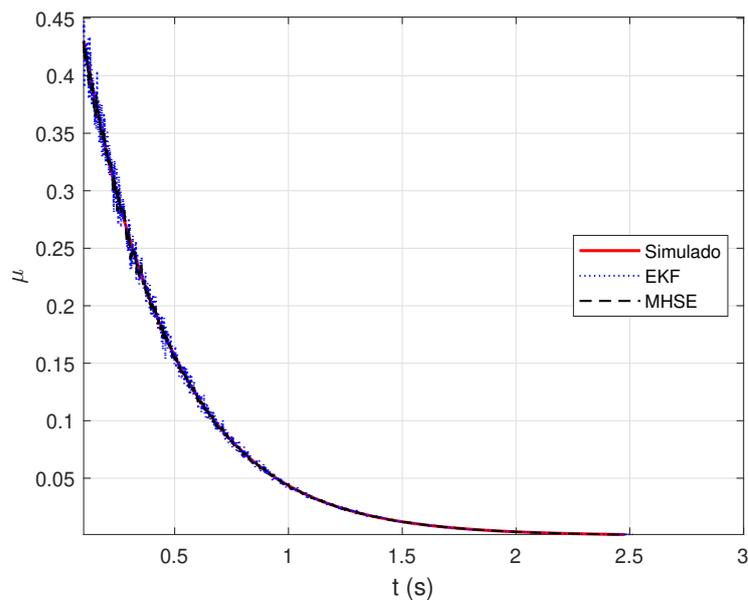


Figura 19 – Coeficiente de atrito para simulação no solo

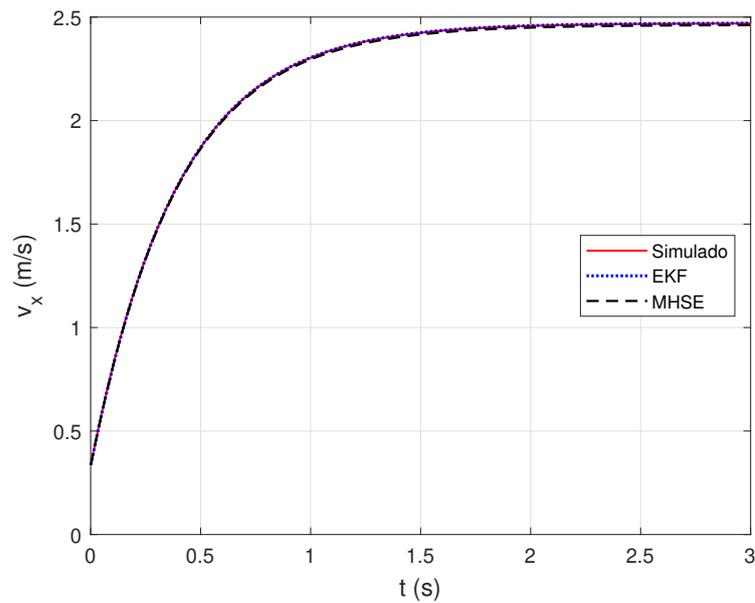


Figura 20 – Velocidade longitudinal para simulação no solo

### 5.3 Experimento com o Veículo no Solo

Durante o experimento, o observador de estado obtém medições ruidosas de  $T$ ,  $v_x$  e  $a_x$  por meio dos sensores do veículo. A Figura 21 apresenta a curva de torque, que atua como a entrada do sistema.

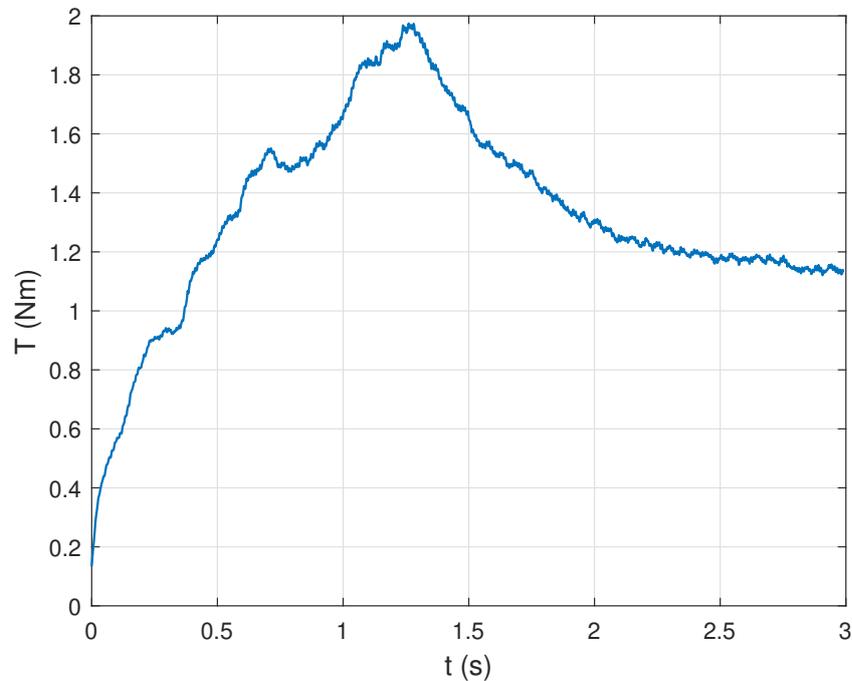


Figura 21 – Torque de entrada para o experimento no solo

Os coeficientes de determinação para ambos os métodos de estimação estão apre-

sentados na Tabela 8.

Método	MHSE	EKF
$R^2(\omega)$	0,9993	0,9987
$R^2(a_x)$	0,9866	0,9731

Tabela 8 – Coeficiente de determinação do experimento

Os tempos médios de processamento para os dois métodos foram de  $0,78 \times 10^{-3}$  s para o EKF e  $6,1 \times 10^{-3}$  s para a MHSE. Considerando que o tempo de amostragem para o estudo de caso é de 0,001 s, é evidenciado a partir da Figura 22 que os tempos computacionais do método MHSE são significativamente superiores ao tempo de amostragem. Essa situação torna inviável a identificação em tempo real.

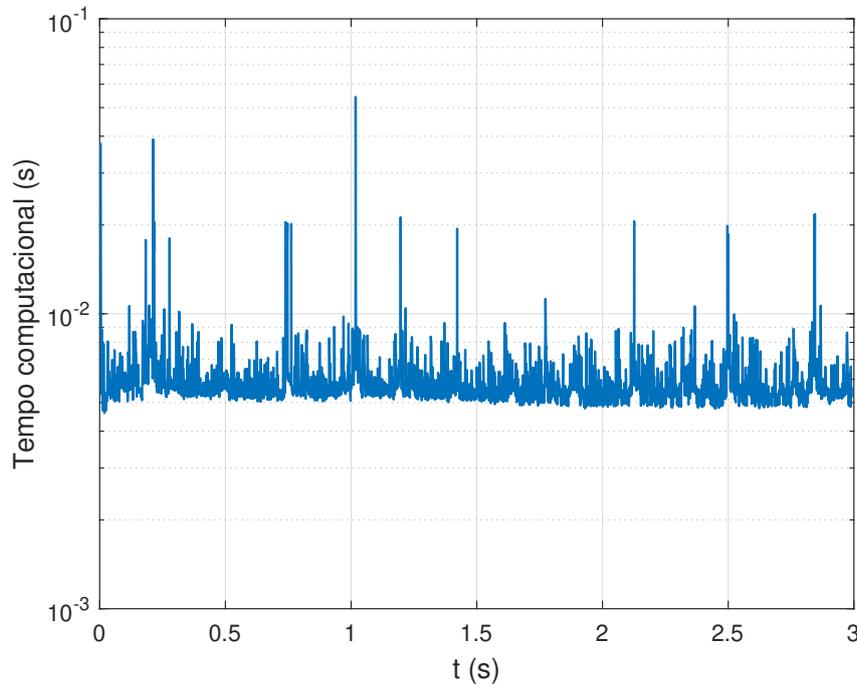


Figura 22 – Tempo computacional da MHSE

Para viabilizar a estimativa em tempo real, o intervalo de amostragem foi ampliado de 0,001 s para 0,01 s. Essa modificação não apenas diminuiu os custos computacionais, mas também resultou em uma redução no  $R^2$ , conforme demonstrado na Tabela 9.

Tempo amostral (s)	0,001	0,01
$R^2(\omega)$	0,9993	0,9376
$R^2(a_x)$	0,9866	0,9557

Tabela 9 – Coeficiente de determinação da MHSE

Na Figura 23 são apresentados os valores medidos e estimados da velocidade angular da roda.

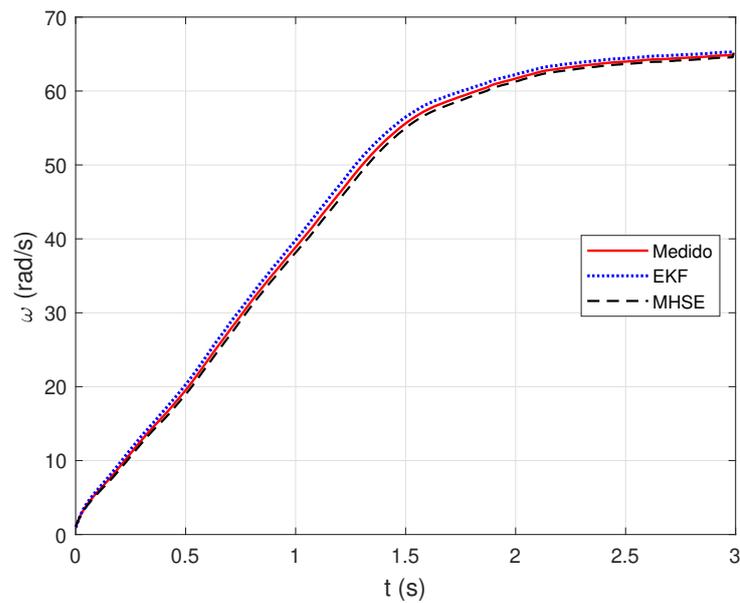


Figura 23 – Velocidade angular para o experimento no solo

Nesse contexto específico, considerando que nem o coeficiente de atrito nem a velocidade longitudinal podem ser medidos durante a análise dos dados experimentais, a referência para a velocidade máxima utilizada é obtida a partir da velocidade angular registrada durante o rolamento livre. Como a velocidade longitudinal estimada é calculada com base nos valores do coeficiente de atrito estimado, ela também atua como um parâmetro de referência para o próprio coeficiente de atrito. A Figura 24 apresenta os valores estimados do coeficiente de atrito. A Figura 25 exhibe os valores estimados da velocidade longitudinal e a velocidade de rolamento livre para referência.

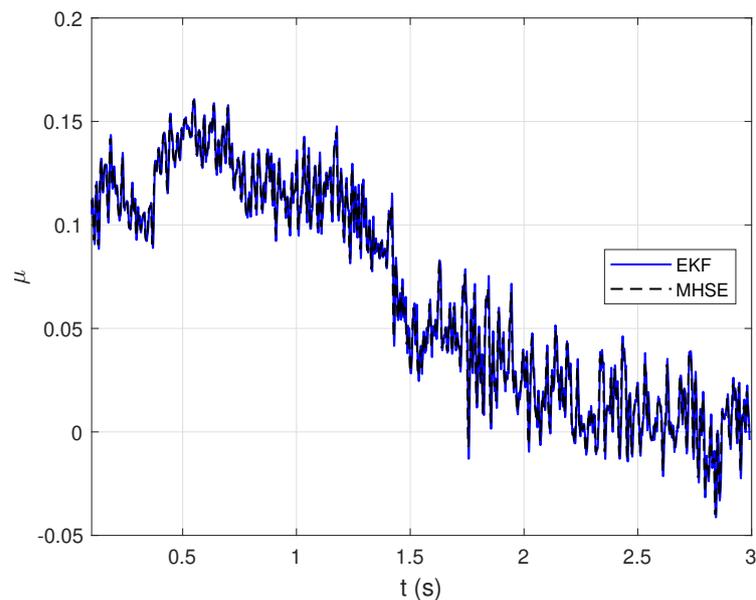


Figura 24 – Coeficiente de atrito para o experimento no solo

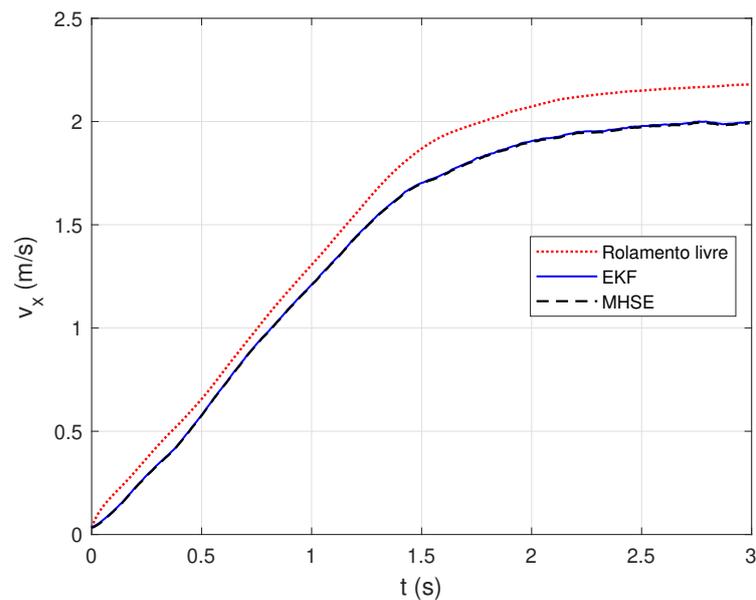


Figura 25 – Velocidade longitudinal para o experimento no solo

## 5.4 Conclusões Parciais

O observador de estado hierárquico foi empregado em conjunto com o método EKF, o que garantiu eficiência e desempenho, e com o método MHSE, que proporcionou precisão e robustez. O observador integrou o torque de entrada do sistema com dados sobre a velocidade angular das rodas e a aceleração longitudinal, gerando estimativas dos estados longitudinais. Esse processo abrangeu parâmetros que costumam ser difíceis de quantificar, como o coeficiente de atrito pneu-solo e a velocidade longitudinal do veículo. Além disso, foi introduzido um estimador de parâmetros utilizando o método PSO, juntamente com um calibrador que empregou a FM como modelo de pneu.

O estudo fez uso de dados simulados e experimentais para fornecer uma ratificação robusta do algoritmo. A comparação entre simulações controladas e dados experimentais possibilitou a avaliação do observador de estado em cenários do mundo real, onde a complexidade da aquisição e processamento de dados supera a dos ambientes simulados.

Esse experimento evidenciou a eficácia do observador para estados não mensuráveis na dinâmica longitudinal do veículo durante a aceleração em cenários caracterizados pela disponibilidade limitada de sensores. Demonstrou-se que a implementação de uma abordagem de estimativa hierárquica pode aperfeiçoar as questões de observabilidade do sistema, ao mesmo tempo em que melhora a precisão dos estados estimados, especialmente em ambientes com medições restritas e ruído significativo.

## 6 ESTIMAÇÃO COM EKF E MHSE NA DINÂMICA LATERAL

No presente capítulo, o algoritmo de estimação é utilizado em um modelo de veículo que abrange a dinâmica lateral, permitindo uma investigação aprofundada do comportamento do veículo em contextos que vão além das operações de aceleração e frenagem. O modelo matemático, que se classifica como tipo bicicleta, aborda a dinâmica lateral plana do veículo, considerando-o um corpo rígido com dois graus de liberdade.

O estudo da estimação de estados envolve a utilização do mesmo observador, com a modificação do modelo de um quarto de carro para o modelo bicicleta. Os dados experimentais são obtidos a partir do mesmo veículo em escala, desconsiderando os ângulos de rolagem ( $\varphi$ ) e arfagem ( $\theta$ ) em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

O objetivo do observador é estimar estados que são difíceis de medir, como a velocidade lateral ( $v_y$ ) do veículo e os coeficientes de rigidez dos pneus ( $C_\alpha$ ). Com a definição das velocidades e do ângulo de guinada ( $\psi$ ) em relação ao eixo  $z$ , é possível determinar a trajetória do veículo no referencial global.

### 6.1 Descrição dos Casos e Parâmetros do Modelo

Inicialmente, o veículo é analisado em um movimento circular, mantendo uma velocidade ( $v_x$ ) e um ângulo de esterçamento ( $\delta$ ) constantes. Posteriormente, é realizado um deslocamento com mudança simples de faixa, permitindo a comparação entre as posições finais e iniciais. Por último, um movimento ao redor de uma pista padrão é executado para a análise das trajetórias.

Nos casos estudados, o ângulo de esterçamento e a velocidade angular da roda ( $\omega$ ) são os dados de entrada. As medidas obtidas do experimento são a aceleração lateral ( $a_y$ ) e a taxa de guinada ( $\omega_z = \dot{\psi}$ ). Na Tabela 10 estão os parâmetros utilizados para simular o sistema dinâmico em questão:

Parâmetros	Valores	Unidade
$m$	2,8	kg
$r$	0,033	m
$a_1$	0,134	m
$a_2$	0,122	m
$I_z$	0,2	kg m <sup>2</sup>

Tabela 10 – Parâmetros do modelo bicicleta

A equação de estados do modelo é:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\psi} \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{C}_{\alpha_1} \\ \dot{C}_{\alpha_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{mv_x} (-a_1 C_{\alpha_1} + a_2 C_{\alpha_2}) \omega_z - \frac{1}{mv_x} (C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}) v_y + \frac{1}{m} C_{\alpha_1} \delta - \omega_z v_x \\ \frac{1}{I_z v_x} (-a_1^2 C_{\alpha_1} - a_2^2 C_{\alpha_2}) \omega_z - \frac{1}{I_z v_x} (a_1 C_{\alpha_1} - a_2 C_{\alpha_2}) v_y + \frac{1}{I_z} a_1 C_{\alpha_1} \delta \\ \omega_z \\ v_x \cos(\psi) - v_y \sin(\psi) \\ v_x \sin(\psi) + v_y \cos(\psi) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Para a calibração dos parâmetros de inicialização no método EKF, utilizam-se todas as matrizes de covariância ( $P$ ,  $Q$  e  $R$ ) como matrizes diagonais de valor  $10^4$ . Pelo método MHSE, o comprimento da janela de observação foi mantido ( $N = 4$ ) e as matrizes diagonais de peso  $S$  e  $V$ , que estão associadas ao vetor de estados e ao vetor de medidas, apresentaram a seguinte configuração:

$$S = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^5 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$V = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 \\ 0 & 10^5 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

## 6.2 Movimento Circular

O primeiro caso refere-se ao movimento circular, no qual o veículo em escala analisado completou três voltas inteiras. O objetivo foi manter uma velocidade longitudinal constante de aproximadamente 0,5 m/s, além de um ângulo de esterçamento da roda dianteira fixo em 0,5 rad.

Os coeficientes de determinação para ambos os métodos de estimação estão apresentados na Tabela 11. Para inicialização foram considerados os seguintes valores: a velocidade lateral ( $v_y = 0,1$  m/s), a taxa de guinada ( $\omega_z = 0,6$  rad/s), o coeficiente de rigidez dianteiro e traseiro ( $C_{\alpha_1} = C_{\alpha_2} = 4$  N/rad) e o ângulo de guinada ( $\psi = 0$ ).

Método	EKF	MHSE
$R^2(a_y)$	0,9999	0,9470
$R^2(\omega_z)$	0,9949	0,9825

Tabela 11 – Coeficiente de determinação para o movimento circular

Nas Figuras 26 e 27 são apresentados os valores medidos e estimados da aceleração lateral e da taxa de guinada durante o movimento circular.

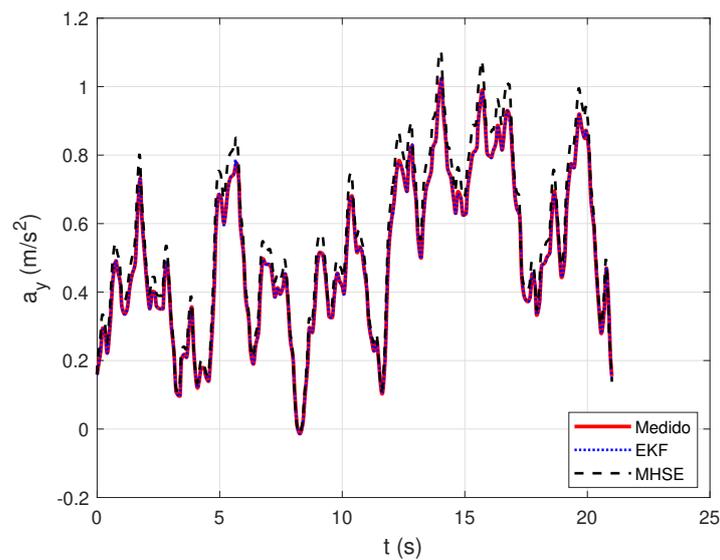


Figura 26 – Aceleração lateral para o movimento circular

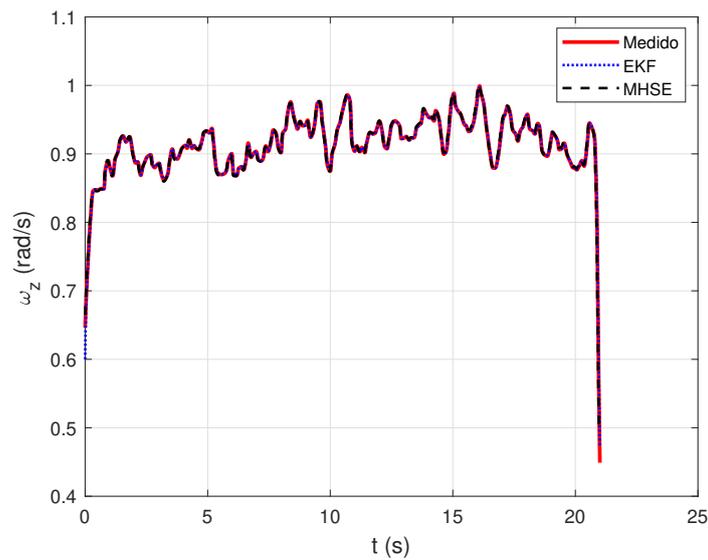


Figura 27 – Taxa de guinada para o movimento circular

Na Figura 28 é mostrada a trajetória do veículo no referencial global.

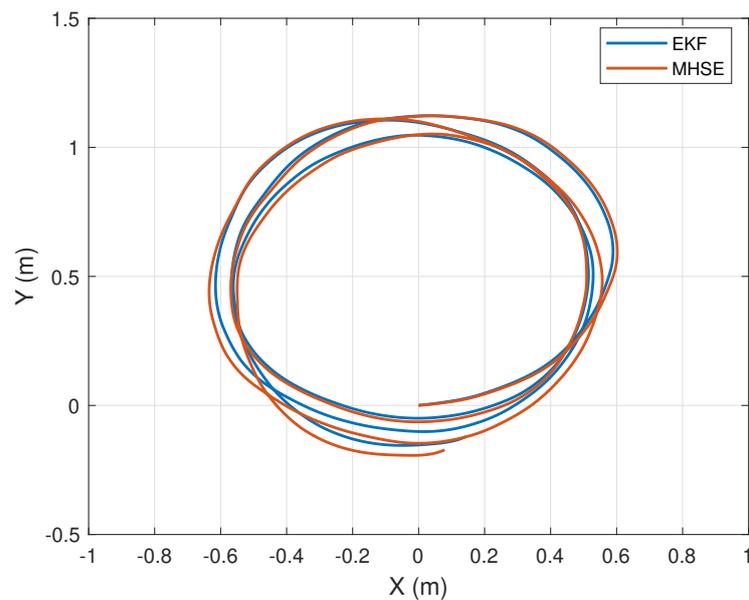


Figura 28 – Trajetória para o movimento circular

### 6.3 Mudança Simples de Faixa

O segundo estudo de caso aborda o movimento de mudança de faixa simples, no qual o veículo em escala se desloca 4,4 m na direção longitudinal e 0,06 m na direção lateral. Iniciando a partir da inércia, o veículo atinge uma velocidade longitudinal de 0,6 m/s, momento em que realiza um deslocamento lateral e, em seguida, retorna para ficar paralelo ao seu deslocamento inicial.

Nas Figuras 29 e 30 são exibidos os valores medidos e estimados da aceleração lateral e da taxa de guinada durante a mudança simples de faixa. Na Figura 31 é mostrada a trajetória do veículo no referencial global. Na Figura 32, os valores estimados do coeficiente de rigidez para os dois métodos são apresentados.

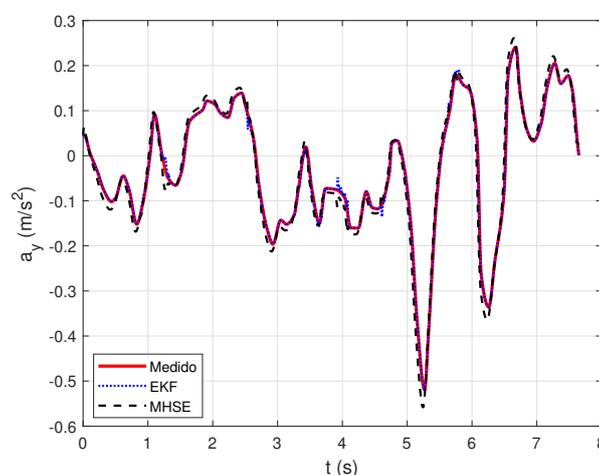


Figura 29 – Aceleração lateral para a mudança simples de faixa

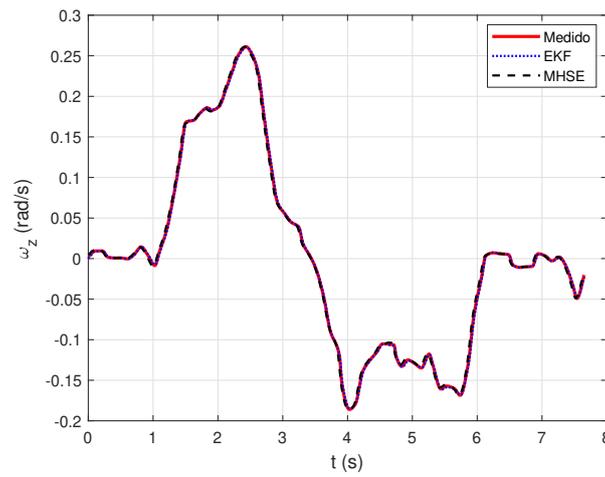


Figura 30 – Taxa de guinada para a mudança simples de faixa

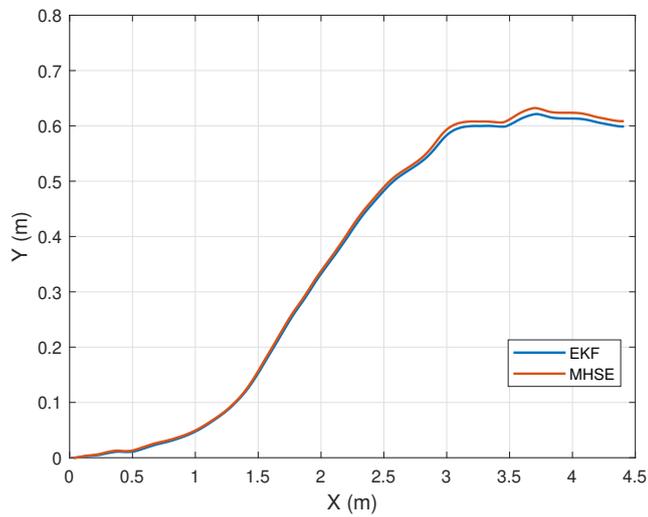


Figura 31 – Trajetória para a mudança simples de faixa

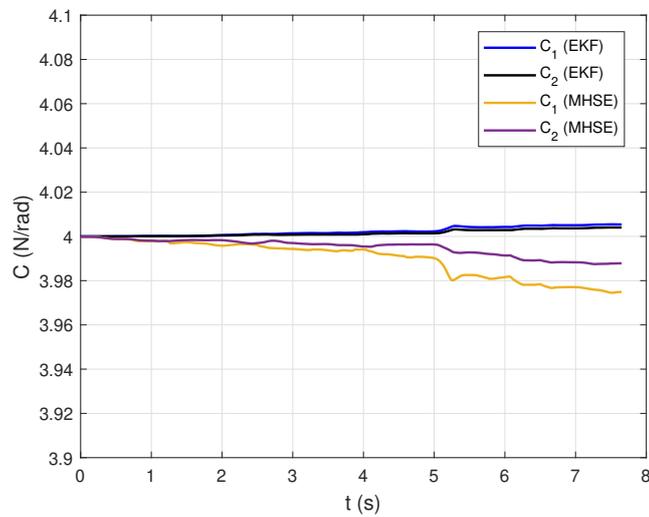


Figura 32 – Coeficiente de rigidez para a mudança simples de faixa

Observa-se que, apesar das medições estarem devidamente calibradas, a estimação do coeficiente de rigidez não está respondendo de maneira apropriada a alterações ou flutuações nas medições, sofrendo uma baixa variação no seu valor.

## 6.4 Pista Padrão

O último caso da dinâmica lateral examina o contorno em uma pista com dimensões padrão de 4,8 x 2,8 m. O percurso é realizado a uma velocidade longitudinal média de 0,35 m/s, começando por uma curva e finalizando em uma linha reta.

Os valores medidos e estimados da aceleração lateral e da taxa de guinada são apresentados nas Figuras 33 e 34.

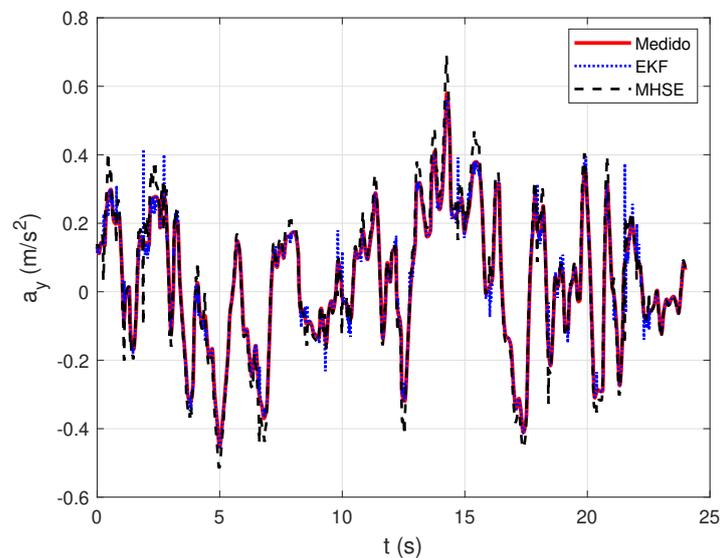


Figura 33 – Aceleração lateral para a pista padrão

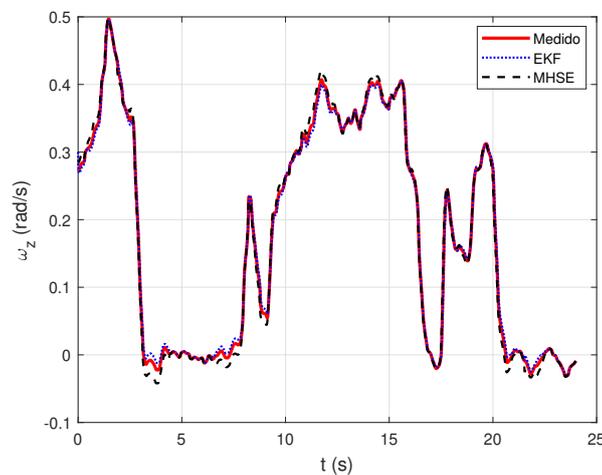
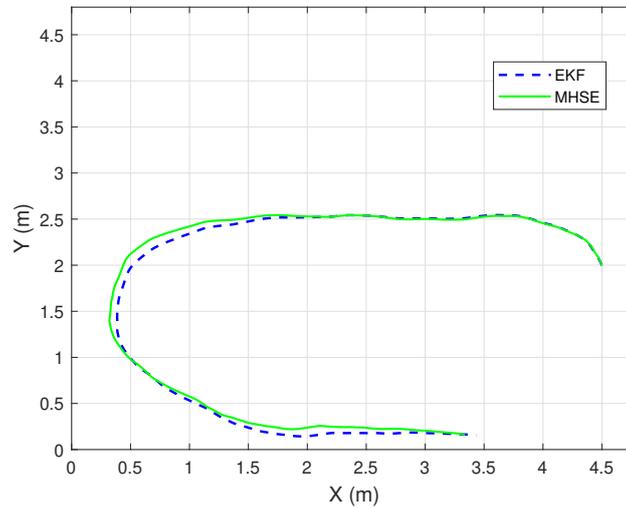
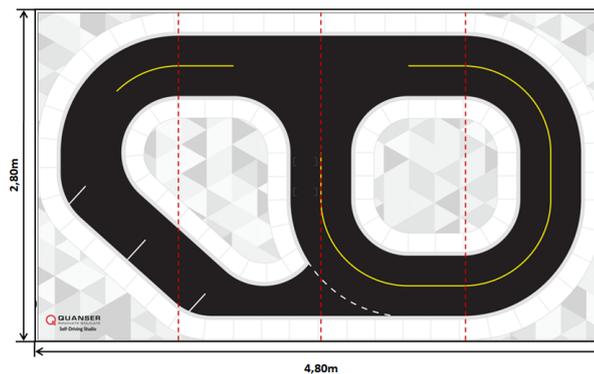


Figura 34 – Taxa de guinada para a pista padrão

Na Figura 35a, é possível observar a trajetória do veículo em um referencial global, que pode ser confrontada com a Figura 35b, onde se encontra a pista padrão utilizada durante o experimento.



(a) Trajetória para a pista padrão



(b) Pista padrão

Figura 35 – Trajetória na pista padrão

Na Tabela 12 estão listados os coeficientes de determinação para ambos os métodos. Para a fase de inicialização, foram utilizados os seguintes valores: velocidade lateral ( $v_y = 0,1$  m/s), taxa de guinada ( $\omega_z = 0,3$  rad/s), coeficientes de rigidez tanto na frente quanto atrás ( $C_{\alpha_1} = C_{\alpha_2} = 4$  N/rad) e ângulo de guinada ( $\psi = 1,96$  rad).

Método	EKF	MHSE
$R^2(a_y)$	0,9914	0,9571
$R^2(\omega_z)$	0,9990	0,9964

Tabela 12 – Coeficiente de determinação para a pista padrão

## 6.5 Conclusões Parciais

No movimento circular, a trajetória não se configura como raios concêntricos. Além de uma característica de subesterçamento, essa condição é atribuída a um ângulo de esterçamento mais acentuado para o modelo.

Durante a mudança simples de faixa, a marcação do ponto final apresentou valores que se aproximaram bastante dos registrados no experimento. A diferença entre os dois métodos pode ser ilustrada pelo afastamento dos valores estimados dos coeficientes de rigidez à medida que o tempo aumenta.

No experimento realizado na pista padrão, as trajetórias estimadas mostraram-se compatíveis com o traçado da pista onde as medições foram realizadas. Embora durante a curva, quando se demandou maiores ângulos de esterçamento, o desvio tenha sido mais acentuado.

O coeficiente de determinação foi superior em todos os casos para o EKF, sendo menor para os valores da aceleração lateral em comparação aos da taxa de guinada. Com o aumento do peso atribuído às medidas de aceleração lateral na MHSE, verifica-se que a trajetória estimada se afasta da trajetória real, o que implica em uma redução da confiabilidade das medições de aceleração, as quais, conforme já foram demonstradas anteriormente, apresentam maior imprecisão e ruído.

A avaliação do coeficiente de rigidez não está respondendo de maneira apropriada às flutuações nas medições. Quando o modelo dinâmico utilizado para a estimativa dos estados é excessivamente simplificado, o estimador pode se mostrar insensível a variações nas medições, mesmo que estas sejam precisas. Tal situação ocorre porque o modelo impõe limitações sobre as possíveis alterações dos estados, e um modelo excessivamente simplificado restringe a capacidade de resposta do estimador. Portanto, é necessário modificar o modelo para que ele represente de forma mais fiel as dinâmicas reais do sistema, incorporando um modelo de dinâmica lateral com maior complexidade.

## 7 ESTIMAÇÃO EM VEÍCULO MILITAR

O Unimog (Figura 36) é um veículo tático 4x4, concebido para atuar em condições adversas, e passou por uma avaliação rigorosa para ser incorporado à frota do Corpo de Fuzileiros Navais do Brasil. Com o motor OM 924 LA e a caixa de marchas UG100 de oito velocidades, o veículo demonstrou notável capacidade de transposição de obstáculos e de operação em ambientes adversos, incluindo desembarques em praias durante operações militares, uma característica essencial para as missões da Marinha do Brasil. O processo de aquisição atual dessa viatura está organizado em lotes, com previsão de entrega até 2027.



Figura 36 – Veículo militar Unimog

Neste estudo, a dinâmica veicular do Unimog é modelada matematicamente através de simulações de parâmetros análogos aos do veículo, empregando o método de diagrama de blocos no software MATLAB/Simulink®. Para isso, utiliza-se o modelo de um quarto de carro para a simulação da dinâmica longitudinal e a mesma configuração de computador em todo o capítulo (processador de 2,4 GHz 11<sup>a</sup> Geração Intel® Core™ i5 (4 núcleos) e memória RAM de 8 GB (3200 MT/s)).

A capacidade máxima de aceleração de um veículo é limitada por dois elementos principais: o torque máximo nas rodas motrizes e a força de tração máxima nos pontos de contato dos pneus. O primeiro elemento está vinculado ao desempenho do motor e da transmissão, enquanto o segundo é influenciado pela fricção entre os pneus e a superfície da estrada (JAZAR, 2014). No que diz respeito ao desempenho de um motor de combustão interna, o torque do motor ( $T_m$ ) pode ser estimado por meio de um polinômio de segundo grau em função da velocidade angular do motor ( $\omega_m$ ):

$$T_m = P_1 + P_2\omega_m - P_3\omega_m^2 \quad (7.1)$$

Os coeficientes P representam parâmetros que se fundamentam na potência máxima do motor ( $P_M$ ) e na velocidade angular ( $\omega_M$ ) associada a essa potência, conforme o tipo de motor empregado. No contexto do Unimog com injeção direta de diesel, são aplicados os seguintes coeficientes:

$$P_1 = 0.87 \frac{P_M}{\omega_M}, \quad P_2 = 1.13 \frac{P_M}{\omega_M^2}, \quad P_3 = \frac{P_M}{\omega_M^3} \quad (7.2)$$

Portanto, é possível calcular o torque de um motor OM 924 LA, que apresenta uma potência máxima de 160 kW a uma velocidade angular de 2200 rpm (equivalente a 230,38 rad/s), conforme indicado na Equação 7.1. Entretanto, de acordo com Mercedes-Benz (2011), onde constam os dados técnicos do motor em questão, conclui-se que o torque é mais adequadamente descrito pelo polinômio:  $P(\omega_m) = a_1\omega_m^5 + a_2\omega_m^4 + a_3\omega_m^3 + a_4\omega_m^2 + a_5\omega_m + a_6$ . O polinômio em questão é derivado de uma interpolação polinomial de grau cinco e é utilizado na simulação do bloco associado ao motor do Unimog.

Na Figura 37 são apresentadas as curvas de torque que foram extraídas da Equação 7.1 segundo Jazar (2014), dos dados técnicos, além da interpolação.

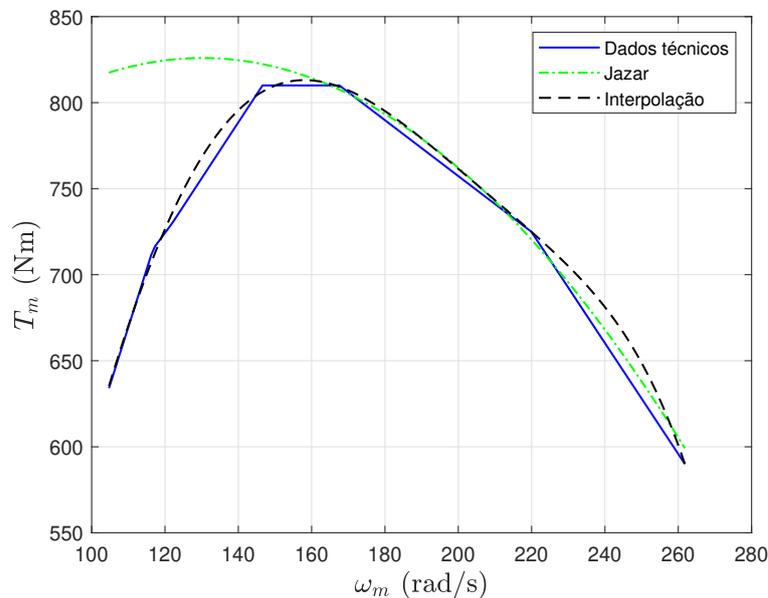


Figura 37 – Curva de torque do motor

As propriedades de potência, torque e velocidade do motor de combustão interna não são adequadas para a propulsão direta do veículo, tornando essencial o uso de uma transmissão que forneça as características necessárias de tração e velocidade para diferentes situações operacionais. O termo "transmissão" abrange todos os sistemas que transferem a

potência do motor para as rodas (WONG, 2001). No modelo empregado, a transmissão é representada por dois blocos no diagrama: a caixa de marchas e o diferencial.

Na caixa de marchas, o torque gerado pelo motor é multiplicado de acordo com a relação da caixa ( $i_{cx}$ ) da marcha em que o veículo estiver operando naquele instante, levando em consideração a eficiência específica da caixa de marchas ( $\eta_{cx}$ ). Além disso, este bloco também inclui a diminuição da velocidade angular do motor, que segue a mesma relação associada à marcha, aplicada na velocidade angular que é registrada no diferencial. A Equação 7.3 ilustra o que acontece com o torque da caixa ( $T_{cx}$ ), assim como a Equação 7.4 expressa a velocidade angular de saída da caixa ( $\omega_{cx}$ ) em relação à velocidade angular do diferencial ( $\omega_{dif}$ ).

$$T_{cx} = \eta_{cx} i_{cx} T_m \quad (7.3)$$

$$\omega_{cx} = \omega_{dif} i_{cx} \quad (7.4)$$

No bloco do diferencial, o torque proveniente da caixa de marchas é distribuído entre os eixos dianteiro e traseiro, sendo posteriormente multiplicado pela relação do diferencial ( $i_{dif}$ ), levando em consideração também a eficiência do diferencial ( $\eta_{dif}$ ). Em seguida, o torque é novamente dividido, desta vez entre as rodas direita e esquerda. A velocidade angular, por sua vez, passa por uma desmultiplicação que está relacionada à relação do diferencial e à velocidade angular da roda ( $\omega$ ). A Equação 7.5 demonstra o processo de obtenção do torque que é transmitido a todas as rodas ( $T$ ), enquanto a Equação 7.6 ilustra a velocidade angular de saída do diferencial ( $\omega_{dif}$ ) e a Equação 7.7 a relação entre a velocidade no motor com a velocidade na roda.

$$T_{dif} = T = \eta_{dif} i_{dif} T_{cx} \quad (7.5)$$

$$\omega_{dif} = \omega i_{dif} \quad (7.6)$$

$$\omega_m = \omega i_{dif} i_{cx} \quad (7.7)$$

Dessa forma, ao conhecermos o raio efetivo da roda ( $r_e$ ), é possível determinar a relação entre a velocidade longitudinal do veículo ( $v_x$ ) e a velocidade angular do motor ( $\omega_m$ ), em um cenário sem deslizamento, conforme apresentado na Equação 7.8.

$$v_x = \frac{\omega_m r_e}{i_{cx} i_{dif}} \quad (7.8)$$

Ao considerar um  $r_e = 0,52$  m, e as relações de transmissão da caixa de marchas e do diferencial do modelo Unimog U5000, conforme consta em Mercedes-Benz (2024) e na Tabela 13, é possível determinar as velocidades associadas a cada marcha, como mostra a Figura 38, e suas velocidades máximas, como consta na Tabela 14.

Relação	Valor
$i_1$	9,57
$i_2$	6,635
$i_3$	4,375
$i_4$	3,219
$i_5$	2,188
$i_6$	1,517
$i_7$	1
$i_8$	0,736
$i_{dif}$	6,94

Tabela 13 – Relações de transmissão (MERCEDES-BENZ, 2024)

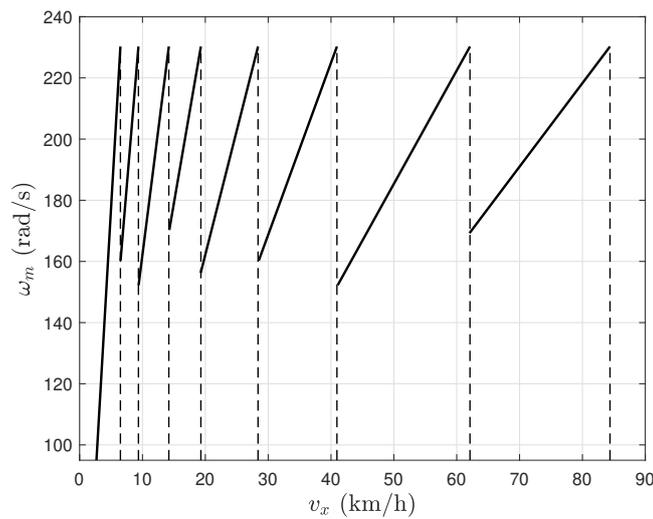


Figura 38 – Velocidades por marcha

Relação	Velocidade (km/h)
$i_1$	6,5
$i_2$	9,4
$i_3$	14,2
$i_4$	19,3
$i_5$	28,4
$i_6$	41
$i_7$	62,1
$i_8$	84,4

Tabela 14 – Velocidade máxima por marcha

Se  $\eta_t$  é o rendimento total da transmissão, descrito conforme a Equação 7.9, o torque na roda é definido pela Equação 7.10, que estabelece a relação com o torque gerado pelo motor.

$$\eta_t = \eta_{cx} \eta_{dif} \quad (7.9)$$

$$T = \eta_t i_{cx} i_{dif} T_m \quad (7.10)$$

Considerando  $\eta_t = 0,9$ , é viável calcular o torque na roda até a potência máxima do motor, para cada relação de transmissão, levando em conta a velocidade longitudinal do veículo. Dessa forma, obtemos as curvas de torque apresentadas na Figura 39.

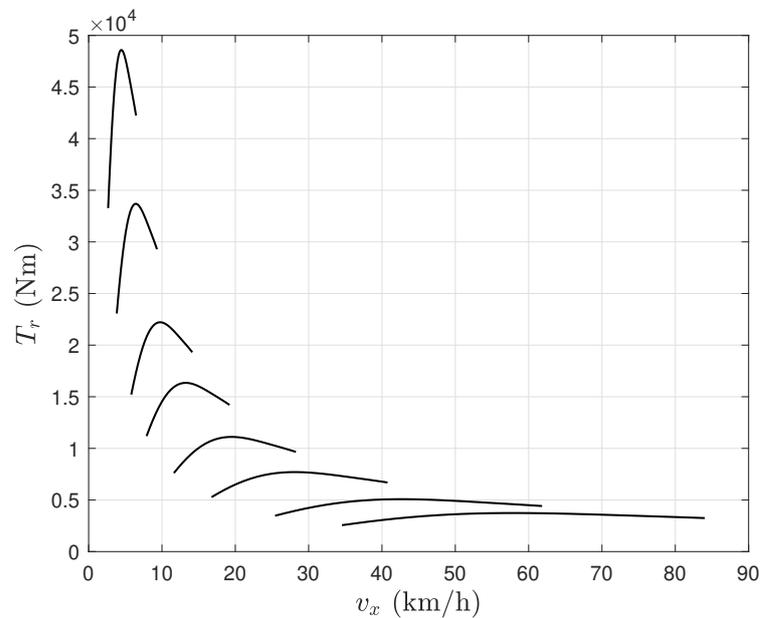


Figura 39 – Curva de torque por marcha

No bloco da roda, utiliza-se a Equação 3.1 para determinar o deslizamento longitudinal do pneu, a fórmula de Pacejka conforme a Equação 3.3, juntamente com os coeficientes para um pavimento de asfalto seco, e o torque de resistência ao rolamento conforme a Equação 3.11. Esses elementos fornecem os dados necessários para a equação de movimento da roda (Equação 3.15). Nos outros blocos, são calculadas as forças de resistência e tração, empregando a equação de movimento do veículo (Equação 3.14).

A Tabela 15 apresenta os parâmetros do Unimog que são incorporados no modelo matemático.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Massa	$m$	2000 kg
Raio da roda	$r$	0,52 m
Momento de inércia da roda	$J$	11,5 kgm <sup>2</sup>
Aceleração da gravidade	$g$	9,81 m/s <sup>2</sup>
Fator de resistência	$f_r$	0,02
Massa específica do ar	$\rho$	1,2 kg/m <sup>3</sup>
Área frontal	$A_f$	5,6 m <sup>2</sup>
Coefficiente de arrasto	$C_d$	0,6

Tabela 15 – Parâmetros do modelo

## 7.1 Filtro de Partículas Aplicado ao Unimog

O método de amostragem por importância e reamostragem é empregado no veículo militar para estimar o coeficiente de atrito, utilizando as medições da velocidade angular da roda e do torque aplicado a ela, ambos derivados do modelo matemático por diagrama de blocos. Na Figura 40, observa-se o torque de entrada na roda obtido a partir do modelo, no qual se caracteriza por um valor inicial estável, em torno de 1400 Nm, seguido por um aumento até atingir o pico de 2218 Nm. Posteriormente, decresce passando por três quedas abruptas nos tempos de 2,56 s, 3,73 s e 7,1 s, as quais são atribuídas à alteração na relação da caixa de marchas.

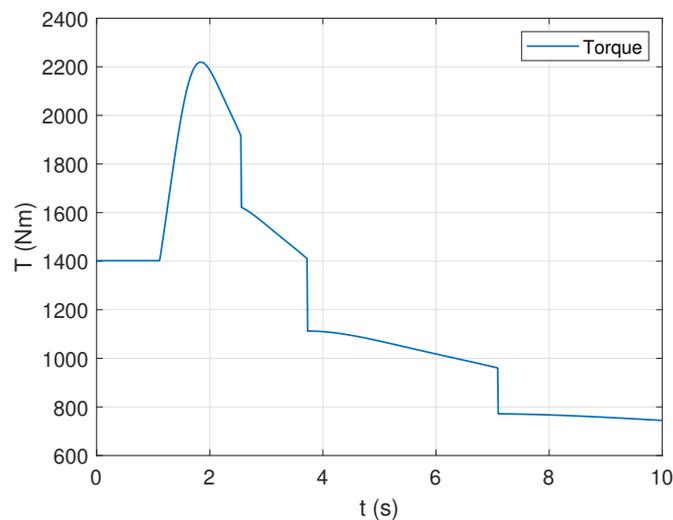


Figura 40 – Torque na roda

A análise do modelo e do filtro de partículas é realizada através de uma estimação que emprega a evolução por meio de passo aleatório e da Equação 7.11, que pode ser deduzida pela inserção da Equação 3.11 e Equação 3.2 na Equação 3.15.

$$\dot{\omega} = \frac{T - (\mu + f_r)(mgr)}{J} \quad (7.11)$$

Os valores da velocidade angular da roda estão presentes na Figura 41, sendo estes oriundos da simulação do modelo matemático, além das medidas sintéticas que são as únicas inseridas no estimador, as quais foram obtidas através da adição de ruído nos dados numéricos da simulação.

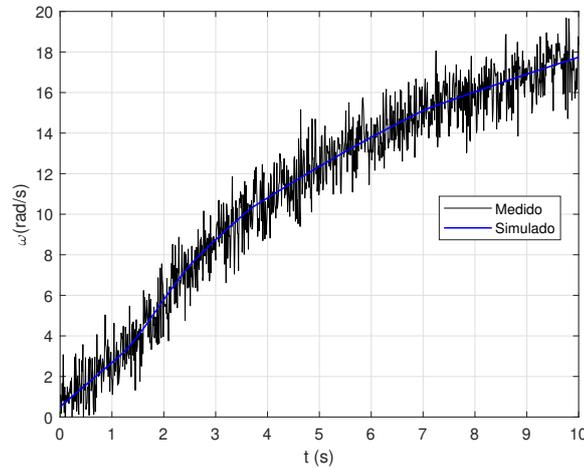


Figura 41 – Medidas da velocidade da roda

No presente estudo, foram analisados o tempo de processamento e a RMSE relacionados tanto ao coeficiente de atrito quanto à velocidade angular da roda, considerando um intervalo de 1 a 150 partículas no filtro.

O tempo computacional apresenta uma relação direta com a quantidade de partículas utilizadas no filtro, conforme evidenciado na Figura 42. Ao analisar a RMSE por partículas, nota-se uma diminuição do erro até um determinado ponto de convergência, que ocorre antes de se alcançar 50 partículas. Após esse limite, as variações tornam-se pouco significativas, como demonstrado na Figura 43 para o coeficiente de atrito e, na Figura 44, para a velocidade da roda. Portanto, visando a evitar um tempo excessivo para uma estimativa adequada, o número de partículas adotado será de 50.

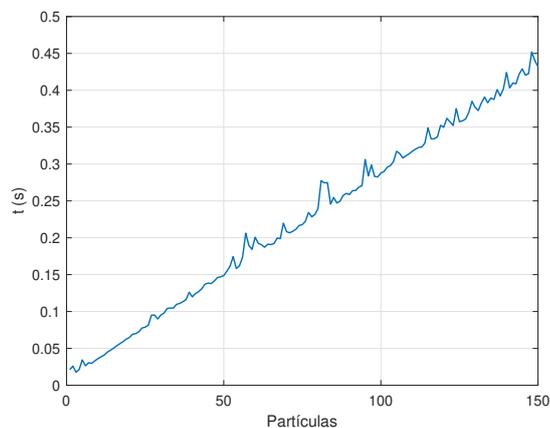


Figura 42 – Tempo computacional por partículas

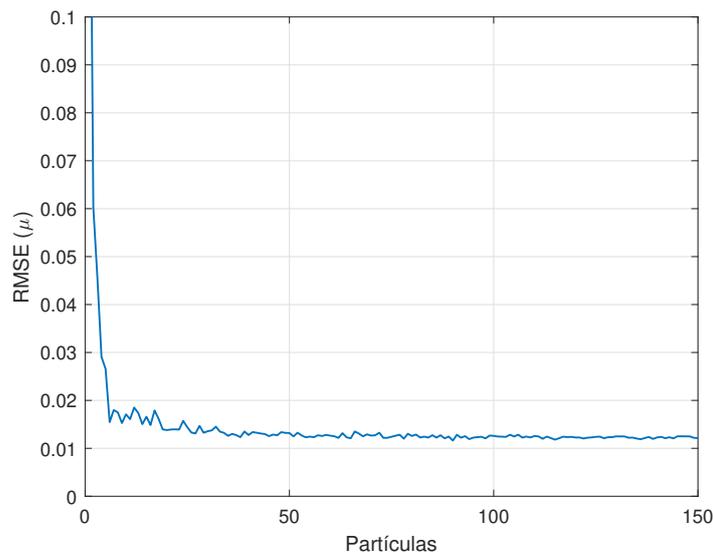


Figura 43 – RMSE do coeficiente de atrito por partículas

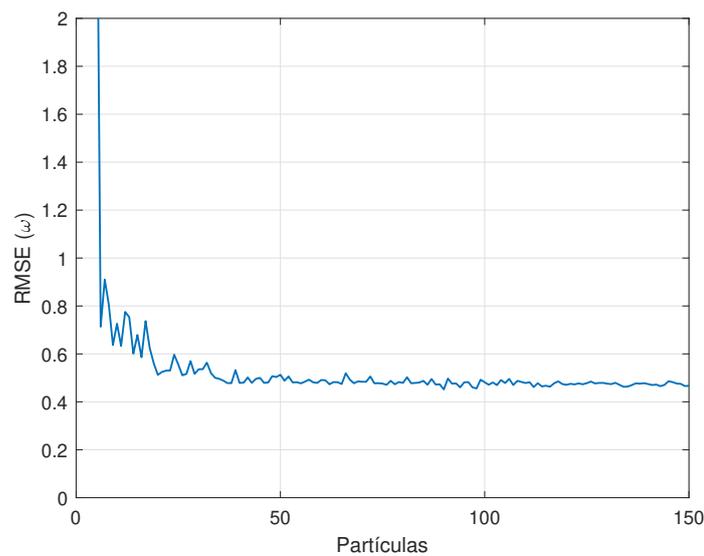


Figura 44 – RMSE da velocidade da roda por partículas

Para uma nova avaliação, focando especificamente o passo aleatório empregado, a RMSE dos estados é calculada com base em diferentes passos. A fim de evitar equívocos nos resultados, considerando que o erro da  $\omega$  é significativamente maior que o do  $\mu$ , a análise do intervalo em que a raiz do erro quadrático médio é mínima foi realizada de forma independente para cada estado. A RMSE do coeficiente de atrito apresenta valores inferiores a 0,011, no intervalo entre 0,003 e 0,007, conforme demonstrado na Figura 45. Por outro lado, a RMSE da velocidade angular exibe valores abaixo de 0,51, no intervalo entre 0,006 e 0,013, como ilustrado na Figura 46. Dessa forma, escolhe-se um passo de 0,006, pois esse valor está localizado na interseção dos dois intervalos, e a partir dele, o erro do  $\mu$  apresenta um comportamento crescente.

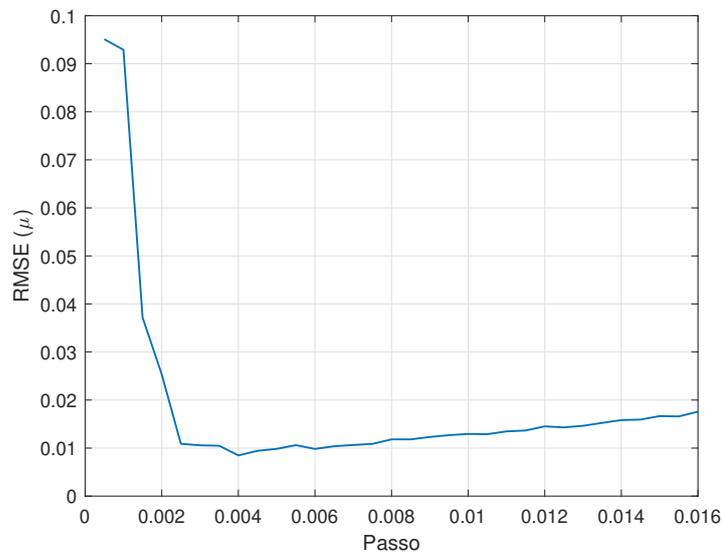


Figura 45 – RMSE do coeficiente de atrito pelo passo

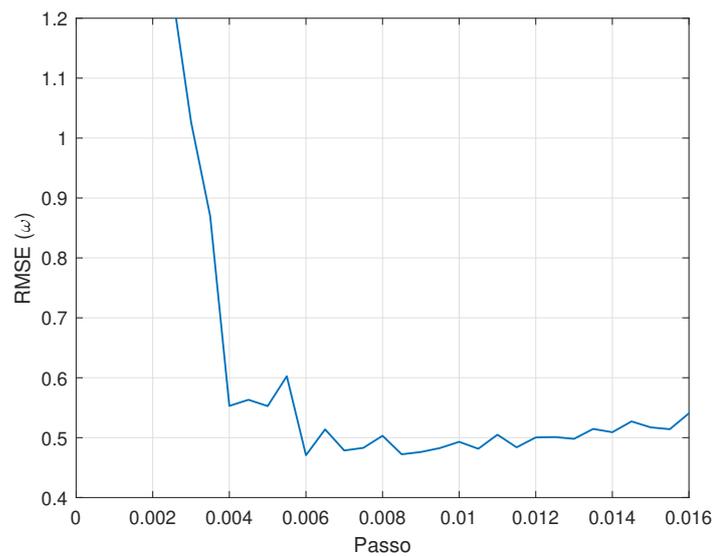


Figura 46 – RMSE da velocidade da roda pelo passo

As estimativas utilizando o filtro de partículas são efetuadas em 0,153 segundos. Na Figura 47, a linha azul representa o resultado numérico do coeficiente de atrito, enquanto a linha preta ilustra a estimativa obtida pelo filtro de partículas.

Na Figura 48, a linha azul representa o resultado numérico da velocidade angular, os pontos verdes são o resultado numérico com ruído (vetor de medidas) e a linha preta corresponde ao valor estimado da velocidade.

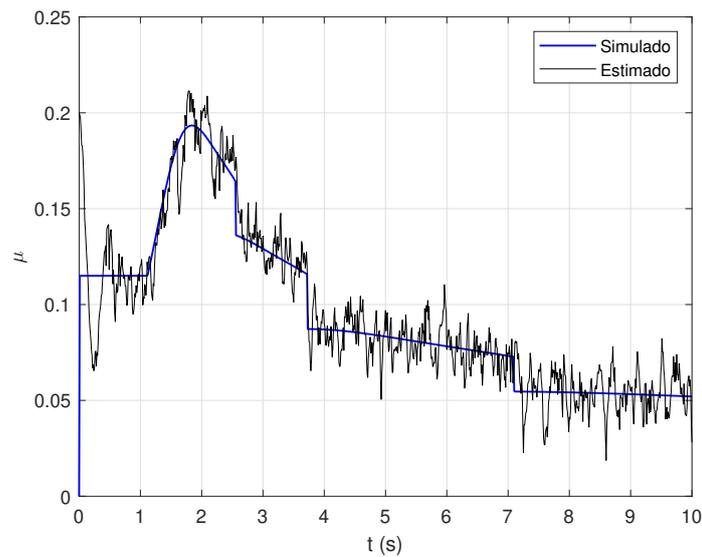


Figura 47 – Coeficiente de atrito

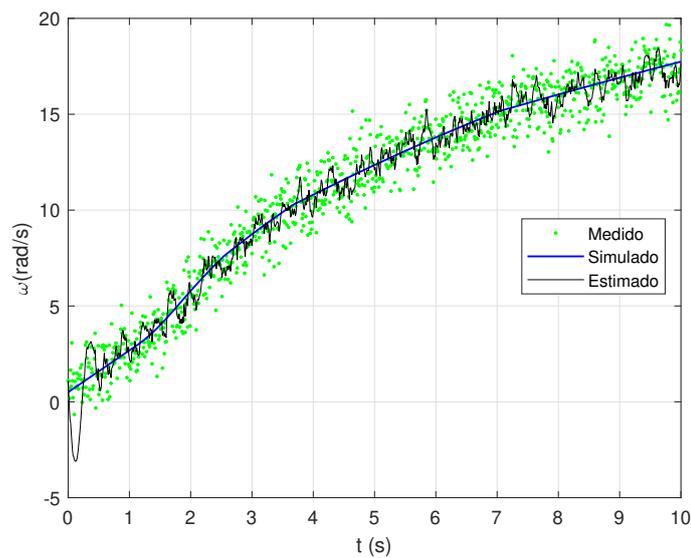


Figura 48 – Velocidade angular da roda

A análise final do filtro de partículas refere-se ao EA ao longo do período de simulação. A estimativa inicial do coeficiente de atrito é de 0,2, o que provoca um erro inicial considerável até que a curva atinja um valor mais próximo do numérico. Na Figura 49, encontram-se os valores dos EA do coeficiente de atrito em cada iteração, além da RMSE, que é de 0,01. Por sua vez, na Figura 50, estão registrados os EA da velocidade da roda, acompanhados da RMSE de 0,51.

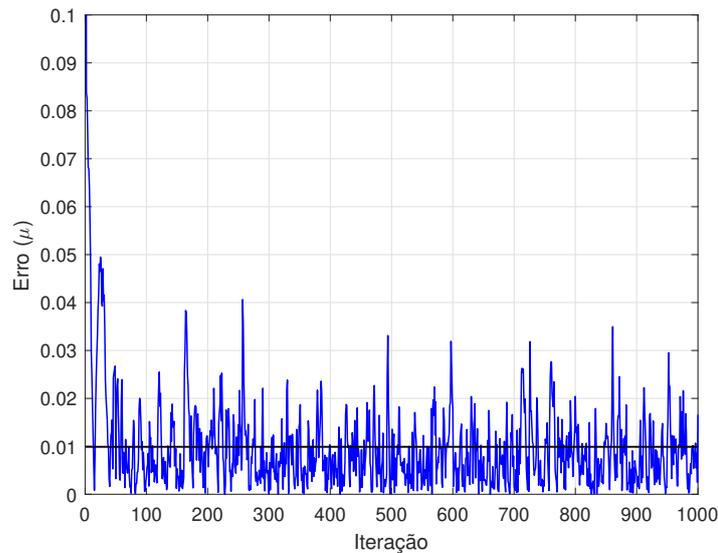


Figura 49 – Erro absoluto do coeficiente de atrito

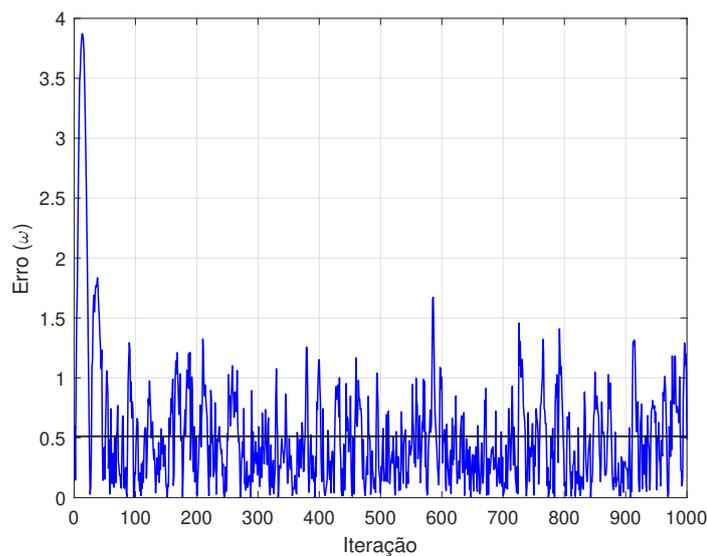
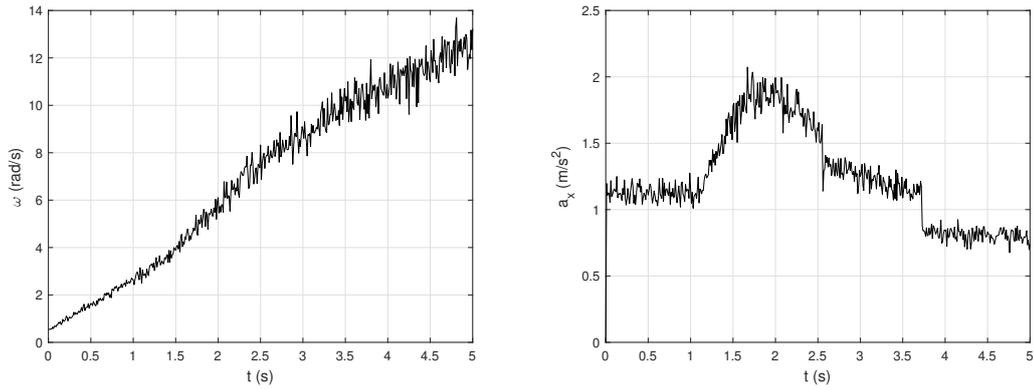


Figura 50 – Erro absoluto da velocidade angular da roda

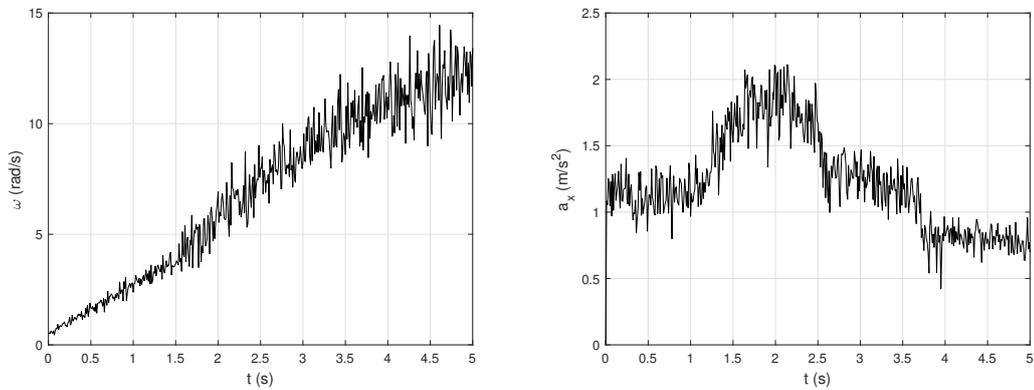
## 7.2 EKF e MHSE Aplicado ao Unimog

Após a conclusão da fase de calibração do modelo, o objetivo é estimar o coeficiente de atrito e a velocidade longitudinal do veículo. Utilizando o EKF e a MHSE, o torque apresentado na Figura 40 serve como entrada do sistema. As medidas são geradas sinteticamente, considerando a velocidade angular da roda e a aceleração longitudinal, com a adição de ruídos de 5%, conforme evidenciado na Figura 51, e de 10%, conforme apresentado na Figura 52. Os métodos de estimação não requerem um modelo de pneu e aplicam os mesmos parâmetros previamente mencionados na Tabela 15.



(a) Medida da velocidade da roda com ruído de 5% (b) Medida da aceleração longitudinal com ruído de 5%

Figura 51 – Medidas com 5% de ruído



(a) Medida da velocidade da roda com ruído de 10% (b) Medida da aceleração longitudinal com ruído de 10%

Figura 52 – Medidas com 10% de ruído

No método EKF, as matrizes de covariância foram determinadas por meio de matrizes diagonais:  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , todas com o valor de  $10^4$ . Para a MHSE, o comprimento da janela de observação e as matrizes diagonais de peso  $S$  e  $V$ , são determinados pelos seguintes valores:  $N = 4$ ,  $S = \text{diag}([10^4 \ 10^5 \ 10^5])$  e  $V = \text{diag}([10^4 \ 10^8])$ . O vetor de medidas é dado por  $(z = [\omega \ a_x]^T)$  e os estados dados pela Equação 7.12

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{v} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T - (\mu + f_r)(mgr)/J) \\ \mu g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Na Tabela 16, são apresentados os coeficientes de determinação, considerando um intervalo de amostragem de 0,01 s, um coeficiente de atrito inicial de  $\mu = 0$  e uma velocidade angular inicial de  $\omega = 0,5$  rad/s.

Método	EKF		MHSE	
	5%	10%	5%	10%
$R^2(\mu)$	0,9639	0,8590	0,9712	0,9452
$R^2(\omega)$	0,9960	0,9868	0,9979	0,9927
$R^2(v_x)$	1	1	1	1

Tabela 16 – Coeficiente de determinação

No que diz respeito à estimação do coeficiente de atrito e da velocidade angular da roda, a MHSE apresenta coeficientes de determinação que superam os do EKF, com essa diferença se acentuando à medida que o ruído nas medições aumenta. O que resulta em um  $R^2$  do coeficiente de atrito para 10% de ruído, inferior ao nível considerado satisfatório, que é de 0,90. Ambos os métodos demonstram uma estimativa excelente da velocidade longitudinal do veículo em ambas as situações.

Para um nível de ruído de 5%, os tempos de processamento registrados foram de  $1,2 \times 10^{-3}$  s para o EKF e  $7,7 \times 10^{-3}$  s para a MHSE. Com um ruído de 10%, os tempos observados foram de  $1,2 \times 10^{-3}$  s para o EKF e  $8,3 \times 10^{-3}$  s para a MHSE. Esses dados indicam que a variação no ruído tem um impacto mínimo sobre o EKF, enquanto o aumento do ruído resulta em um maior custo computacional para a MHSE.

Dada a condição de maior nível de ruído e um intervalo de amostragem de 0,01 segundos para o estudo de caso, observa-se, na Figura 53, que os tempos de processamento de ambos os métodos são menores que o tempo de amostragem. Essa circunstância permite a detecção dos estados em tempo real.

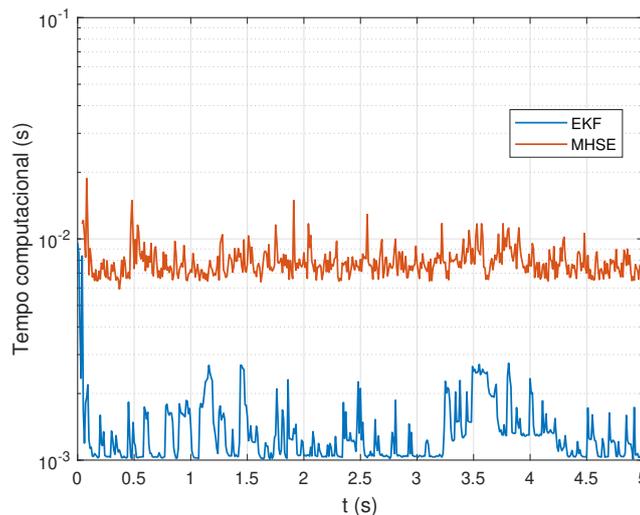


Figura 53 – Tempo computacional

A Figura 54 ilustra o EA durante o período de simulação, considerando uma estimativa com 5% de ruído, referente ao coeficiente de atrito, à velocidade da roda, à velocidade longitudinal e à aceleração longitudinal.

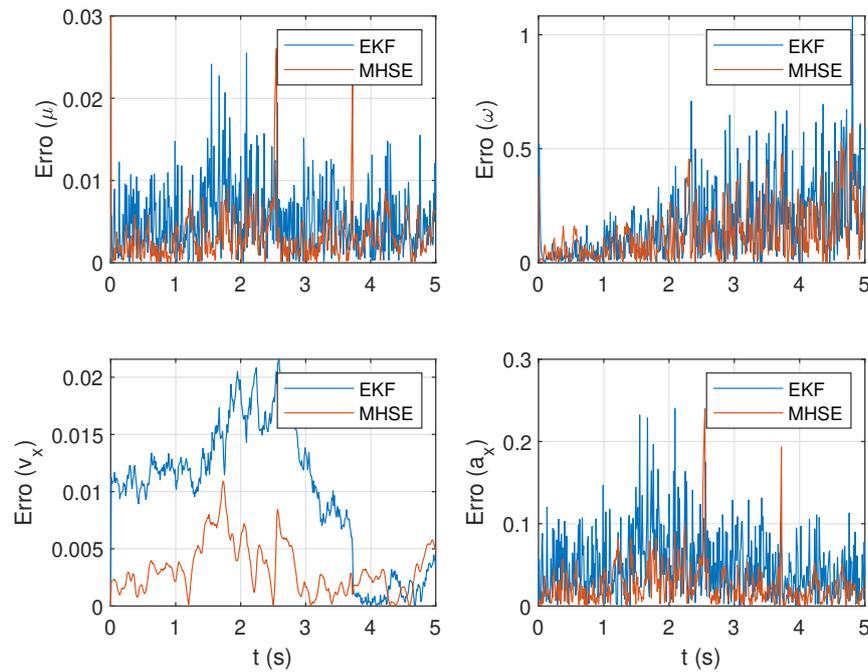


Figura 54 – Erro absoluto com 5% de ruído

Na Figura 55 consta o EA ao longo do período de simulação, levando em conta uma estimativa que inclui 10% de ruído, relacionada a  $\mu$ ,  $\omega$ ,  $v_x$  e  $a_x$ .

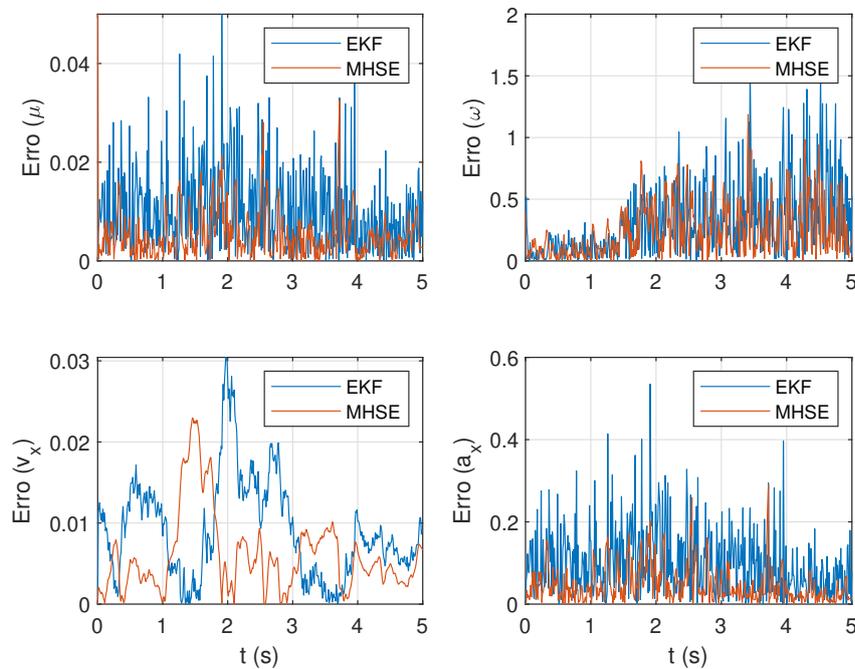


Figura 55 – Erro absoluto com 10% de ruído

Nota-se que em ambas as situações o EA é maior no EKF. Em que pese o erro do EKF ainda ser maior para a velocidade longitudinal com ruído de 10%, percebe-se que nos

intervalos entre 1 e 2 segundos, e entre 3 e 4 segundos, esse erro é relativamente menor do que o da MHSE.

A impossibilidade de definir uma condição inicial no método de MHSE, em virtude de o valor ser derivado da janela deslizante, resulta em um EA inicial mais elevado para o coeficiente de atrito. Contudo, o valor obtido por meio do método se aproxima mais do valor real, uma vez que a condição inicial sem deslizamento é forçada à simulação. Outro aspecto que merece destaque são os picos de erro na MHSE registrados em 2,56 s e 3,73 s, instantes em que ocorrem as mudanças de marcha, evidenciando a dificuldade na estimação durante períodos de descontinuidade na aceleração.

Nas Figuras 56-58 são apresentados os valores simulados, estimados e medidos sinteticamente com ruído de 10%, da velocidade angular da roda, do coeficiente de atrito e da velocidade longitudinal do veículo.

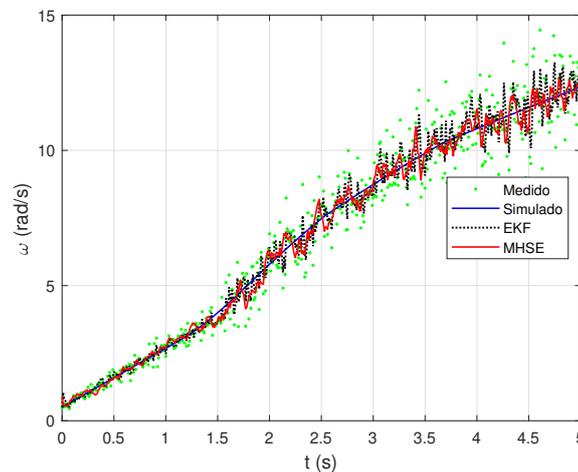


Figura 56 – Velocidade angular da roda do Unimog

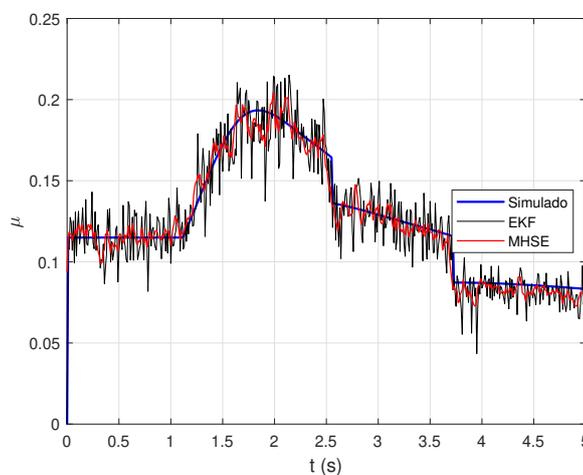


Figura 57 – Coeficiente de atrito do Unimog

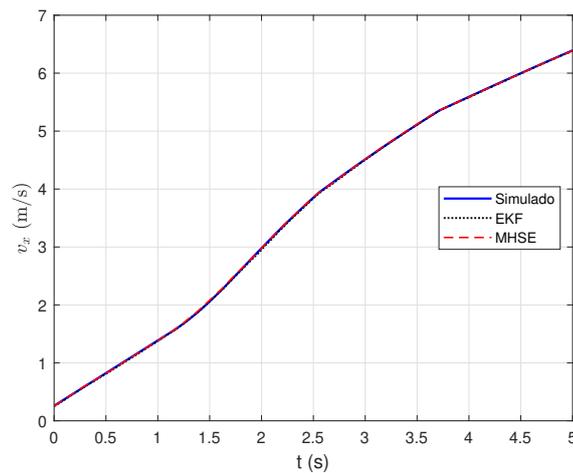


Figura 58 – Velocidade longitudinal do Unimog

Uma das principais vantagens da utilização de dados simulados provenientes do modelo matemático do Unimog reside na capacidade de determinar medidas exatas de estados que não podem ser diretamente mensurados, como a velocidade longitudinal do veículo e o coeficiente de atrito entre o pneu do Unimog e a superfície da estrada. Isso permite a obtenção de estados de referência, possibilitando, assim, uma avaliação precisa dos erros e desvios em relação aos valores estimados.

### 7.3 Conclusões Parciais

Neste capítulo, a modelagem do veículo militar Unimog foi realizada por meio de um diagrama de blocos, adotando o modelo de um quarto de carro para a simulação de sua dinâmica longitudinal. A simulação computacional permitiu a determinação do torque na roda, que foi utilizado como entrada do sistema.

A análise realizada com o filtro de partículas, empregando apenas dados sintéticos da velocidade da roda, revelou que o tempo de processamento é diretamente proporcional ao número de partículas utilizadas. Observou-se que, após 50 partículas, o incremento no número de partículas resulta em variações mínimas na raiz do erro quadrático médio. Em relação ao passo aleatório, foi identificado um intervalo onde a RMSE é minimizado, variando entre 0,003 e 0,007 para o coeficiente de atrito, e entre 0,006 e 0,013 para a velocidade angular da roda. Os resultados mostraram EA dentro do esperado, especialmente ao desconsiderar os valores iniciais. A RMSE para o coeficiente de atrito foi de 0,01, enquanto para a velocidade angular da roda foi de 0,51, o que demonstra a eficácia do método bayesiano na estimação.

Na aplicação do filtro de Kalman estendido e na estimação de estado por horizonte móvel, as medições da velocidade da roda e da aceleração foram analisadas com a introdução de ruídos de 5% e 10%. Em termos de tempo computacional, constatou-se que a variação

do ruído teve um efeito mínimo sobre o EKF, enquanto um aumento no ruído resultou em um custo computacional mais elevado para a MHSE. Os tempos de execução de ambos os métodos foram inferiores ao tempo de amostragem, o que possibilita a estimação dos estados em tempo real. Ao avaliar o coeficiente de atrito e a velocidade da roda, a MHSE apresentou coeficientes de determinação superiores aos do EKF, com essa diferença se intensificando conforme o ruído nas medidas aumentava, sendo que ambos os métodos demonstraram uma excelente estimativa da velocidade longitudinal do veículo. Notou-se também que o EA foi maior no método EKF, exceto em intervalos específicos na estimação da velocidade longitudinal.

## 8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este estudo desenvolveu estimadores de estados que podem ser aplicados à dinâmica de uma viatura leve, de um veículo em escala reduzida e um militar. Para tal, foram empregados três métodos distintos de estimação: filtro de partículas (PF), filtro de Kalman estendido (EKF) e estimação de estado por horizonte móvel (MHSE).

O método de filtro de partículas na estimação do modelo de um veículo leve, implementado através do algoritmo SIR, revelou estimativas satisfatórias para o coeficiente de atrito utilizando 20 partículas. No entanto, a precisão das estimativas melhorou consideravelmente ao se empregar 1000 partículas, embora isso tenha acarretado um aumento no custo computacional. Para o coeficiente de atrito variável, a aplicação de um ajuste polinomial de quinto grau foi eficaz na minimização do EA das estimativas. Em contrapartida, para o coeficiente constante, a ampliação do passo aleatório mostrou-se útil para o ajuste da curva de estimativa, apesar de ter gerado oscilações. O incremento no número de partículas resultou em maior precisão e exatidão nas estimativas, mas também elevou o custo computacional. As estimativas obtidas com 1000 partículas alcançaram o nível de precisão almejado. Dessa forma, o filtro de partículas provou ser uma técnica eficaz para a estimação de estados em sistemas dinâmicos não lineares, oferecendo estimativas precisas em diversos cenários de variação do coeficiente de atrito.

A implementação de uma estratégia de estimação do veículo em escala, que levou em consideração a estrutura hierárquica dos dados, serviu como uma solução alternativa para o problema da baixa observabilidade. Essa abordagem facilitou a reconstrução de variáveis de estado não observáveis diretamente a partir de variáveis mensuráveis ao longo de intervalos de tempo curtos, especialmente em cenários onde a disponibilidade de sensores era limitada. A estimação hierárquica organizou tanto as variáveis mensuráveis quanto as não observáveis em diferentes níveis de dependência, aumentando a precisão das estimativas por meio da integração de dados de múltiplas fontes.

A análise realizada com dados simulados e experimentais ofereceu uma ratificação dos algoritmos de estimação na dinâmica longitudinal do veículo. Ao comparar simulações controladas com dados obtidos de testes reais, foi possível avaliar a eficácia do algoritmo em cenários reais, onde a complexidade das variáveis externas superava a dos cenários simulados.

O foco na fase de aceleração do veículo, quando os níveis de excitação eram elevados e o deslizamento mais pronunciado, distinguiu este estudo da maioria das pesquisas existentes, que se concentravam principalmente na fase de frenagem. Durante a fase de aceleração, o impacto da dinâmica lateral é reduzido, facilitando uma análise mais abrangente por meio

da dinâmica longitudinal. A abordagem ofereceu uma nova perspectiva sobre o controle de tração, expandindo, assim, o potencial para o desenvolvimento de sistemas de controle mais eficazes.

Para a estimação dos estados na dinâmica lateral do veículo em escala, o coeficiente de rigidez não respondeu adequadamente às variações nas medições, indicando que um modelo dinâmico excessivamente simplificado tornou o estimador insensível a flutuações, mesmo com medições precisas. Essa limitação demanda ajustes no modelo para refletir melhor as dinâmicas reais, incorporando um modelo lateral mais elaborado. Tanto o EKF quanto a MHSE mostraram eficácia na estimação das medidas ao considerar as entradas do sistema. O modelo bicicleta foi uma aproximação válida para o rastreamento de trajetória, mas teve dificuldades ao estimar estados desconhecidos devido à sua simplificação excessiva, resultando em insatisfatória sensibilidade às medições.

Na estimação de estados do veículo militar Unimog, a análise com filtro de partículas mostrou que o tempo de processamento é proporcional ao número de partículas. Após 50 partículas, aumentos adicionais resultaram em variações insignificantes na raiz do erro quadrático médio. O passo aleatório que minimiza a RMSE variou entre 0,003 e 0,007 para o coeficiente de atrito e entre 0,006 e 0,013 para a velocidade angular da roda. Os EA ficaram dentro dos limites esperados, com uma RMSE de 0,01 para o coeficiente de atrito e 0,51 para a velocidade angular.

Na implementação do EKF e da MHSE, foram analisadas as medidas da velocidade da roda e da aceleração com adição de ruídos de 5% e 10%. O impacto do ruído no tempo de computação foi mínimo para o EKF, enquanto aumentos de ruído elevaram o custo computacional da MHSE. Ambos os métodos tiveram tempos de execução inferiores ao tempo de amostragem, permitindo estimativas em tempo real. A MHSE apresentou coeficientes de determinação superiores ao EKF, especialmente com maior ruído, embora ambos estimassem bem a velocidade longitudinal do veículo. O EA foi maior no EKF, exceto em alguns intervalos da estimativa da velocidade longitudinal.

Um aspecto importante a ser destacado foi a identificação de picos de erro durante as mudanças de marcha, que se relacionam a descontinuidades no torque de entrada. Isso ocorre porque a MHSE aborda um problema de otimização em cada iteração. A complexidade do sistema e a FC estabelecida podem levar ao surgimento de soluções instáveis, que não apresentam uma convergência suave. Consequentemente, erros mais significativos tendem a ocorrer nas extremidades da janela de estimativas, especialmente em situações de transições abruptas nos estados.

Um ponto adicional a ser observado é que o EA nos instantes iniciais é mais elevado para o coeficiente de atrito. Contudo, a condição inicial é fixada na simulação. Se essa estimativa inicial não for precisa, isso pode ocasionar erros iniciais que se propagam ao longo do intervalo de estimativa, resultando em um acúmulo de erros. Os elementos

mencionados anteriormente enfatizam a relevância de adequar o horizonte de estimativa e de regularizar o período de amostragem.

Para trabalhos futuros, uma abordagem promissora seria a implementação de um modelo não linear para a dinâmica lateral, o que poderia oferecer uma sensibilidade aprimorada na avaliação do coeficiente de rigidez. Ademais, seria pertinente investigar modelos matemáticos mais elaborados que levem em conta a transferência dinâmica de carga e o movimento de rolagem, aumentando assim a capacidade do modelo de refletir de maneira mais acurada a realidade dinâmica do veículo.

Uma outra alternativa promissora para estudos futuros consiste na adoção de controladores sofisticados que façam uso dos estimadores elaborados, com o objetivo de aprimorar o desempenho do sistema veicular. Dentre as opções disponíveis, sobressai-se a criação de estratégias de controle adaptativo, que modifiquem de maneira dinâmica as respostas do veículo em função das condições operacionais, além da implementação de estratégias de controle hierárquico, que estruturam o controle em diferentes níveis para abordar variados graus de complexidade do sistema, aumentando assim a robustez e a eficácia das soluções de controle.

## REFERÊNCIAS

- ALESSANDRI, A.; BAGLIETTO, M.; BATTISTELLI, G. Moving-horizon state estimation for nonlinear discrete-time systems: New stability results and approximation schemes. *Automatica*, Elsevier, v. 44, n. 7, p. 1753–1765, 2008.
- ARULAMPALAM, M. S.; MASKELL, S.; GORDON, N.; CLAPP, T. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on signal processing*, Ieee, v. 50, n. 2, p. 174–188, 2002.
- CALDEIRA, A. B. Sistemas mecatrônicos e a guerra do futuro. *Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ciências Militares)–Escola de Comando e Estado-Maior do Exército, Rio de Janeiro*, 2018.
- CHINDAMO, D.; LENZO, B.; GADOLA, M. On the vehicle sideslip angle estimation: a literature review of methods, models, and innovations. *applied sciences*, MDPI, v. 8, n. 3, p. 355, 2018.
- COLAÇO, M. J.; ORLANDE, H. R.; SILVA, W. B. da; DULIKRAVICH, G. S. Application of two bayesian filters to estimate unknown heat fluxes in a natural convection problem. *Journal of Heat Transfer*, v. 134, n. 9, 2012.
- ENISZ, K.; SZALAY, I.; KOHLRUSZ, G.; FODOR, D. Tyre–road friction coefficient estimation based on the discrete-time extended kalman filter. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 229, n. 9, p. 1158–1168, 2015.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Sistemas de controle para engenharia*. [S.l.]: Bookman Editora, 2013.
- GENTA, G.; MORELLO, L. *The automotive chassis: volume 2: system design*. [S.l.]: Springer Nature, 2019.
- GILLESPIE, T. D. Vehicle dynamics. *Warren dale*, 1997.
- HASHEMI, E.; JALALI, M.; KHAJEPOUR, A.; KASAIEZADEH, A.; CHEN, S.-k. Vehicle stability control: Model predictive approach and combined-slip effect. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, IEEE, v. 25, n. 6, p. 2789–2800, 2020.
- HEIDFELD, H.; SCHÜNEMANN, M.; KASPER, R. Ukf-based state and tire slip estimation for a 4wd electric vehicle. *Vehicle System Dynamics*, Taylor & Francis, v. 58, n. 10, p. 1479–1496, 2020.
- IVANOVA, K.; GALLASCH, G. E.; JORDANS, J. Automated and autonomous systems for combat service support: scoping study and technology prioritisation. *Defence Science and Technology Group Edinburgh SA Australia*, 2016.
- JAZAR, R. N. *Vehicle dynamics*. [S.l.]: Springer, 2014. v. 1.
- JIN, C.; MAITLAND, A.; MCPHEE, J. Hierarchical nonlinear moving horizon estimation of vehicle lateral speed and road friction coefficient. *ASME Letters in Dynamic Systems and Control*, American Society of Mechanical Engineers, v. 1, n. 1, p. 011005, 2021.

- KÜHL, P.; DIEHL, M.; KRAUS, T.; SCHLÖDER, J. P.; BOCK, H. G. A real-time algorithm for moving horizon state and parameter estimation. *Computers & chemical engineering*, Elsevier, v. 35, n. 1, p. 71–83, 2011.
- LOPES, E. *Análise do comportamento dinâmico de um veículo leve 4x4 com sistema de controle de tração*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Instituto Militar de Engenharia, 2015.
- LOPES, E. D. R. *Advanced Estimation and Control Applied to Vehicle Dynamic Systems*. 142 p. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, PUC-Rio — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.
- LOPES, E. D. R.; RODRIGUES, G. S.; AYALA, H. V. H. Comparison of nonlinear receding-horizon and extended kalman filter strategies for ground vehicles longitudinal slip estimation. In: *Congresso Brasileiro de Automática-CBA*. [S.l.: s.n.], 2020. v. 2, n. 1.
- LUETTEL, T.; HIMMELSBACH, M.; WUENSCH, H.-J. Autonomous ground vehicles—concepts and a path to the future. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 100, n. Special Centennial Issue, p. 1831–1839, 2012.
- MERCEDES-BENZ. *OF 1722*. 2011. Acessado em 27 de dezembro, 2024. Disponível em: <[https://www.mercedes-benz-bus.com/en\\_NG/models/of-1722.html](https://www.mercedes-benz-bus.com/en_NG/models/of-1722.html)>.
- MERCEDES-BENZ. *Unimog Technical data*. 2024. Acessado em 27 de dezembro, 2024. Disponível em: <<https://special.mercedes-benz-trucks.com/en/the-extreme-off-road-unimog/technical-data.html>>.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. [S.l.]: Pearson Universidades, 2010. ISBN 9788576058106.
- ORLANDE, H. R.; DULIKRAVICH, G. S.; COLAÇO, M. J. et al. Application of bayesian filters to heat conduction problem. *EngOpt*, Citeseer, p. 1–5, 2008.
- PACEJKA, H. *Tire and vehicle dynamics*. [S.l.]: Elsevier, 2005.
- PACEJKA, H. B.; BAKKER, E. The magic formula tyre model. *Vehicle system dynamics*, Taylor & Francis, v. 21, n. S1, p. 1–18, 1992.
- PATIL, A.; GINOYA, D.; SHENDGE, P.; PHADKE, S. Uncertainty-estimation-based approach to antilock braking systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, IEEE, v. 65, n. 3, p. 1171–1185, 2015.
- PAUL, D.; VELENIS, E.; HUMBERT, F.; CAO, D.; DOBO, T.; HEGARTY, S. Tyre–road friction  $\mu$ -estimation based on braking force distribution. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of automobile engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 233, n. 8, p. 2030–2047, 2019.
- PEREIRA, C. L. *Identificação de modelo híbrido baseado em Redes Neurais para dinâmica lateral de veículos militares*. Dissertação (Mestrado) — PUC-Rio, 2023.
- RAO, C. V.; RAWLINGS, J. B.; MAYNE, D. Q. Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximations. *IEEE transactions on automatic control*, IEEE, v. 48, n. 2, p. 246–258, 2003.

- RIBEIRO, M. I. Kalman and extended kalman filters: Concept, derivation and properties. *Institute for Systems and Robotics*, v. 43, n. 46, p. 3736–3741, 2004.
- RISTIC, B.; ARULAMPALAM, S.; GORDON, N. *Beyond the Kalman filter: Particle filters for tracking applications*. [S.l.]: Artech house, 2003.
- SANTINI, S.; ALBARELLA, N.; ARRICALE, V. M.; BRANCATI, R.; SAKHNEVYCH, A. On-board road friction estimation technique for autonomous driving vehicle-following maneuvers. *Applied sciences*, MDPI, v. 11, n. 5, p. 2197, 2021.
- SAVARESI, S. M.; TANELLI, M.; CANTONI, C.; CHARALAMBAKIS, D.; PREVIDI, F.; BITTANTI, S. Slip-deceleration control in anti-lock braking systems. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 38, n. 1, p. 103–108, 2005.
- SILVA, W. B. D. *Aplicação de filtros de partículas para a assimilação de dados em problemas de fronteira móvel*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, PEM/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2012.
- SIMIONI, A. E. *Uso da dinâmica lateral e do método de Levenberg-Marquardt para estimar parâmetros de uma viatura de transporte não especializada - VTNE 3/4 T militarizada*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Militar de Engenharia, 2021.
- SNOBAR, F.; MICHALKA, A.; HORN, M.; STROHMEYER, C.; GRAICHEN, K. Sensitivity-based moving horizon estimation of road friction. In: IEEE. *2024 European Control Conference (ECC)*. [S.l.], 2024. p. 718–724.
- SOUSA, L.; AYALA, H. Slip estimation with receding-horizon strategy for off-road vehicles with nonlinear tire interactions. In: IEEE. *2020 28th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. [S.l.], 2020. p. 381–386.
- WANG, G.; BAI, G.; YU, M.; LIU, L.; GU, Q.; MA, Z. A hierarchical estimation method for road friction coefficient combining single-step moving horizon estimation and inverse tire model. *Electronics*, MDPI AG, v. 12, n. 3, p. 525, 2023.
- WANG, Q.; ZHAO, Y.; XIE, W.; ZHAO, Q.; LIN, F. Hierarchical estimation of vehicle state and tire forces for distributed in-wheel motor drive electric vehicle without previously established tire model. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 359, n. 13, p. 7051–7068, 2022.
- WANG, T.; ZHANG, Y. Vehicle parameter estimation based on strong tracking extended kalman filter. In: IEEE. *2023 International Conference on Applied Physics and Computing (ICAPC)*. [S.l.], 2023. p. 218–223.
- WONG, J. Y. *Theory of ground vehicles*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.
- ZAREIAN, A.; AZADI, S.; KAZEMI, R. Estimation of road friction coefficient using extended kalman filter, recursive least square, and neural network. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 230, n. 1, p. 52–68, 2016.
- ZHANG, X.; PEI, W.; YIN, X.; YUAN, S. An observation algorithm for key motion states of skid-steered wheeled unmanned vehicle. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 237, n. 10-11, p. 2431–2443, 2023.

---

ZHANG, X.; XU, Y.; PAN, M.; REN, F. A vehicle abs adaptive sliding-mode control algorithm based on the vehicle velocity estimation and tyre/road friction coefficient estimations. *Vehicle System Dynamics*, Taylor & Francis, v. 52, n. 4, p. 475–503, 2014.