

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeronáutica e Mecânica, Área de Projeto Aeronáutico, Estruturas e Sistemas Aeroespaciais.

Ivan Issamu Nakamura

**OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA SOB RESTRIÇÃO DE
TENSÃO PARA APLICAÇÃO EM SUBESTRUTURAS DE
SUBMARINO**

Dissertação aprovada em sua versão final pelo abaixo assinado:



Prof. Dr. Rafael Thiago Luiz Ferreira
Orientador

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP – Brasil
2024

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão de Informação e Documentação

Nakamura, Ivan Issamu

Otimização de topologia sob restrição de tensão para aplicação em subestruturas de submarino / Ivan Issamu Nakamura

São José dos Campos, 2024.

128f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Engenharia Aeronáutica e Mecânica. Área de Projeto Aeronáutico, Estruturas e Sistemas Aeroespaciais – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2024. Orientador: Prof. Dr. Rafael Thiago Luiz Ferreira.

1. Otimização Topológica 2. Método dos Elementos Finitos 3. Lagrangiano aumentado 4. Restrição de Tensão 5. Projeto Estrutural. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

NAKAMURA, Ivan Issamu Nakamura. **Otimização de topologia sob restrição de tensão para aplicação em subestruturas de submarino**. 2024. 128f. Dissertação de Mestrado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Ivan Issamu Nakamura

TÍTULO DO TRABALHO: Otimização de topologia sob restrição de tensão para aplicação em subestruturas de submarino

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2024

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação ou tese pode ser reproduzida sem a sua autorização do autor.

Ivan Issamu Nakamura _____

Ivan Issamu Nakamura

DCTA – Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial, Praça Marechal do Ar Eduardo Gomes, 50 – Vila das Acácias – 12228-900 - São José dos Campos - SP

OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA SOB RESTRIÇÃO DE TENSÃO PARA APLICAÇÃO EM SUBESTRUTURAS DE SUBMARINO

Ivan Issamu Nakamura

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Thiago de Paula Sales	Presidente	- ITA
Prof. Dr. Rafael Thiago Luiz Ferreira	Orientador	- ITA
Prof. Dr. Ney Rafael Sêcco	Membro Interno	- ITA
Prof. Dr. Thadeu Alves Senne	Membro Externo	- UNIFESP-SJC
Dr. Rodinei Lopes Junior	Membro Externo	- Marinha do Brasil

ITA

Dedico este trabalho à minha família, que
esteve presente me apoiando em todas
as etapas da busca pelo conhecimento.

Agradecimentos

Inicialmente devo meus mais sinceros agradecimentos a Deus, que sempre esteve por perto me guiando e fortalecendo em cada etapa desta jornada. Em segundo lugar, manifesto minha imensa gratidão à minha família, especialmente à minha esposa Simone e ao meu filho Davi, por estarem sempre ao meu lado, me apoiando, incentivando e dedicando parte de seu tempo e amor para mim. Vocês são minha maior motivação para seguir em frente. Ao meus pais, Isao e Lilia e, irmãos, Ivo e Igor, agradeço por estarem comigo mesmo distantes.

Gostaria de mostrar minha gratidão por todo o suporte e direcionamentos fornecidos pelo meu orientador Rafael Thiago Luiz Ferreira e meu orientador da Marinha do Brasil Rodinei Lopes Junior. Sou abençoado por ter tido a oportunidade de trabalhar com vocês.

Expresso minha sincera gratidão ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica e seus colaboradores por oferecer condições ideais para o desenvolvimento intelectual e o aprimoramento de minha pesquisa.

Ao Centro de Coordenação de Estudos da Marinha em São Paulo (CCEMSP) e a equipe que o integra, agradeço todo o suporte e dedicação oferecida. À Marinha do Brasil deixo meus sinceros agradecimentos, pela confiança e por me proporcionar a oportunidade de aprimorar minhas habilidades técnicas. E a todos os integrantes da Marinha do Brasil que trabalham incansavelmente para dotar o país de tecnologia própria e independência, desejo bons ventos e mares tranquilos.

"Verás que um filho teu não foge à luta"

Joaquim Osório Duque Estrada

Resumo

Devido à evolução no desenvolvimento do projeto do primeiro Submarino Nuclear Convencionalmente Armado (SNCA) brasileiro, a demanda de conhecimento de áreas específicas e cada vez mais críticas tem aumentado, como é o caso do projeto de estruturas submarinas. Nesse contexto, a otimização topológica sob restrições de tensão com aplicações em subestruturas destaca-se pela relevância e pela natureza desafiadora dos problemas de projeto associados. A finalidade deste trabalho foi desenvolver um código computacional para análise por elementos finitos e otimização topológica visando a redução de massa estrutural, sem comprometer a resistência avaliada por limites máximos de tensão do material. A metodologia desenvolvida é baseada em minimizações de função objetivo de massa com a incorporação de restrições de tensão de von Mises em todos os elementos finitos que representam uma estrutura, por meio do método numérico de Lagrangiano Aumentado. As soluções foram obtidas por meio das rotinas de otimização do pacote `fmincon` do MATLAB. Estratégias de relaxação de restrições de tensão são aplicadas para permitir alcançar soluções em regiões degeneradas do domínio de projeto. Os resultados alcançados indicam uma minimização de massa, respeitando adequadamente as restrições de tensão estabelecidas. Além disso, os resultados demonstraram sensibilidade às magnitudes de carga aplicada e aos limites de tensão do material. Comparações entre topologias otimizadas considerando restrições de tensão e aquelas voltadas para flexibilidade média em problemas clássicos também foram realizadas, confirmando que a metodologia desenvolvida respeita os limites de tensão estabelecidos. Desta maneira, concluiu-se que a aplicação conjunta do método dos elementos finitos com a otimização topológica tem pleno potencial para o bom desenvolvimento de estruturas mais leves e eficientes, contribuindo para a viabilidade e competitividade do projeto do submarino no cenário global.

Abstract

Due to the progress in the development of the first Brazilian Conventionally Armed Nuclear Submarine, the demand for knowledge in specific and increasingly critical areas has grown, particularly in the design of submarine structures. In this context, topology optimization under stress constraints, with applications in substructures, stands out due to the importance and challenging nature of the associated design problems. The purpose of this work was to develop a computational code for finite element analysis and topology optimization aimed at structural mass reduction without compromising strength, evaluated through maximum stress limits. The developed methodology is based on minimizing a mass objective function while incorporating von Mises stress constraints across all finite elements representing the structure, using the numerical method of the Augmented Lagrangian. These analyses were performed using optimization routines from MATLAB's `fmincon` package. Relaxation strategies for stress constraints were applied to enable solutions in degenerated regions of the design domain. The results demonstrated a significant reduction in structural mass while adhering to the imposed stress limits. Furthermore, the results exhibited sensitivity to the applied load magnitudes and material stress thresholds. Comparisons between optimized topologies considering stress constraints and those aimed at average flexibility in classical problems further validated the effectiveness of the developed methodology in meeting the specified stress limits. In conclusion, the integration of finite element analysis and topology optimization shows significant potential for the development of lighter and more efficient structures, contributing to the feasibility and competitiveness of the submarine project on the global stage.

Lista de Abreviaturas e Siglas

ALGENCAN	<i>Augmented Lagrangian General Constrained Optimization</i>
ANSYS	Software de Análise de Elementos Finitos
BESO	<i>Bi-directional Evolutionary Structural Optimization</i>
CCEMSP	Centro de Coordenação de Estudos da Marinha em São Paulo
CPSN	Centro de Projetos e Sistemas Navais
DED	<i>Directed Energy Deposition</i>
HH	horas-homem
LA	Lagrangiano Aumentado
MATLAB	Software de computação numérica da empresa MathWorks
MBB	Messerschmitt-Bölkow-Blohm
MEF	Método dos Elementos Finitos
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
OC	<i>Optimality Criteria</i>
OT	Otimização Topológica
RAMP	<i>Rational Approximation of Material Properties</i>
SESO	<i>Sequential Element Sensitivity Optimization</i>
SLM	<i>Selective Laser Melting</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
SLP	<i>Sequential Linear Programming</i>
SNCA	Submarino Nuclear Convencionalmente Armado
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming</i>

Lista de Símbolos

A_e	Área do elemento e
\mathbf{B}	Matriz de derivadas das funções de forma
β	Parâmetro de penalização
\mathbf{D}	Matriz de elasticidade do material
γ	Fator de ponderação adaptativo
E	Módulo de elasticidade
ϑ	Parâmetro Ersatz
ε	Parâmetro de relaxação utilizado na otimização topológica
$f(x)$	Função objetivo a ser minimizada
\mathbf{f}	Vetor de forças aplicadas
ν	Coefficiente de Poisson do material
σ_{adm}	Tensão admissível
σ_{vm}^e	Tensão no elemento e
σ_{vm}	Tensão de von Mises
H_{ej}	Função de ponderação
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana
k	Número de passos (<i>loops</i>) de otimização
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global da estrutura
\mathbf{K}_e	Matriz de rigidez do elemento
\mathbf{K}_0	Matriz de rigidez para um elemento sólido
L	Lagrangiano
n	Número total de elementos
\mathbf{N}	Matriz das funções de forma

N_c	Número de restrições
N_e	Conjunto de elementos vizinhos do elemento e
p	Fator de penalização
ρ_e	Densidade do elemento e
$\tilde{\rho}_e$	Densidade penalizada do elemento e
r_{min}	Raio de influência
λ_e	Multiplicador de Lagrange
η	Fator de escala
μ	Parâmetro de penalização adicional
t	Espessura do elemento
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos nodais
V_e	Volume do elemento

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Motivação e revisão do tema.....	14
1.2	Objetivos do trabalho.....	15
1.3	Estrutura dos capítulos	16
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1	Fundamentos da teoria de elementos finitos	18
2.2	Métodos de otimização topológica	18
2.2.1	Otimização de topologia: problema clássico de <i>compliance</i>	20
2.2.2	Otimização de topologia para as tensões	20
2.2.3	Método do Lagrangiano Aumentado	22
2.3	Regra do material na otimização topológica.....	22
2.4	Método de otimização.....	23
2.5	Instabilidades numéricas em soluções de problemas de otimização topológica.....	25
2.6	Estudos relacionados	26
3	METODOLOGIA.....	29
3.1	Fundamentos de elementos finitos	29
3.1.1	Introdução ao elemento plano de 4 nós.....	29
3.1.2	Inter-relações.....	31
3.1.3	Montagem global e cálculo de tensões	34
3.2	Método de otimização topológica	36
3.2.1	Definição do problema de otimização	37
3.2.2	Métodos e estratégias para otimização	38
3.2.3	Implementação e solução computacional	47
3.3	Fluxograma do código de otimização topológica	52
3.4	Algoritmo SQP.....	54
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	57
4.1	Validação do código de elementos finitos	58
4.1.1	Modelos desenvolvidos e malha	58
4.1.2	Análise numérica em elementos finitos	59
4.2	Problema 4x2	64
4.2.1	Primeiro teste com <i>fmincon</i>	65
4.2.2	Implementação de <i>loops</i>	66

4.2.3	Implementação da relaxação (ϵ)	68
4.2.4	Implementação da penalização de densidades (β) e fator de ponderação adaptativo (γ)	69
4.3	Problema quadrado diagonal	75
4.4	Problema de duas barras	79
4.4.1	Variação do raio mínimo de influência do filtro de densidades (r_{min}).....	81
4.4.2	Variação de magnitude da força aplicada	84
4.4.3	Variação da tensão admissível do material.....	88
4.5	Viga MBB	89
4.6	Viga cantilever (engastada-livre)	94
4.7	Viga cantilever (engastada-livre) com malha mais refinada	99
5	APLICABILIDADE DA OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA EM ESTRUTURAS DE SUBMARINOS	102
5.1	Principais partes do submarino	103
5.2	Aplicação dos métodos dos elementos finitos e otimização topológica em subestruturas de suporte de equipamentos	107
5.3	Otimização de anteparas submarinas.....	107
5.4	Manufatura aditiva em estruturas otimizadas	108
6	CONCLUSÃO.....	109
	REFERÊNCIAS	112
	APÊNDICE A –MATRIZ K_e DO ELEMENTO UTILIZADO	116
	APÊNDICE B – IMPLEMENTAÇÃO DA ANÁLISE ESTRUTURAL POR ELEMENTOS FINITOS	118
	APÊNDICE C – IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO COM FMINCON	123
C.1	Implementação do fmincon.....	123
C.2	Otimização topológica	124

1 Introdução

1.1 Motivação e revisão do tema

Os submarinos nucleares são embarcações estratégicas fundamentais para a defesa nacional, capazes de operar de forma autônoma e submersa por longos períodos. Com sistemas de propulsão nuclear, possuem navegação praticamente ilimitada, diferenciando-se dos submarinos convencionais em alcance, autonomia e furtividade. Essas características permitem patrulhar amplas áreas marítimas, proteger recursos estratégicos e reforçar a soberania nacional, além de representar um marco tecnológico e militar.

O Brasil encara o projeto e construção do primeiro Submarino Nuclear Convencionalmente Armado (SNCA) como um desafio inovador e estratégico para o Brasil. É o primeiro deste gênero no país, sendo assessorado pela assistência técnica francesa, o qual tem total *know-how* deste tipo de empreendimento. Os submarinos nucleares exigem excelência em habilidades técnicas e, necessitam de mais mão de obra e tempo de execução do que outros projetos também complexos como, aviões, carros e até mesmo submarinos de propulsão convencional. Havendo uma complexidade em todas as áreas envolvidas, desde resistência estrutural em condições subaquáticas adversas até sistemas complexos de propulsão e controle de segurança nuclear.

Este projeto não apenas excede outros empreendimentos de engenharia em termos de horas-homem (HH) e tempo de construção, como também estabelece um novo patamar para a engenharia naval brasileira. A Figura 1 ilustra a complexidade relativa de diferentes projetos de engenharia, destacando o submarino nuclear. Este esforço coloca o Brasil em uma posição significativa no cenário global, demonstrando tanto competência técnica quanto avanços tecnológicos.

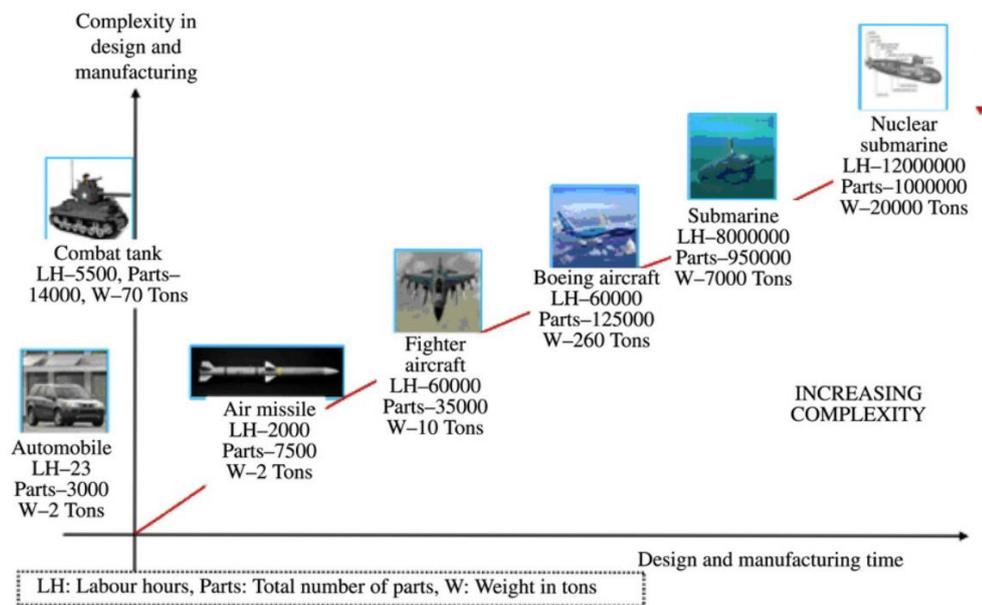


Figura 1: Complexidade no projeto e manufatura de estruturas de engenharia moderna. Fonte: adaptado de Gordon S. (2009).

Nos últimos anos, diversos estudos têm explorado a aplicação conjunta do método dos elementos finitos (MEF) e da otimização topológica (OT) em projetos estruturais, com benefícios comprovados. Esses avanços têm sido essenciais para a inovação e melhoria contínua dos projetos, garantindo maior segurança, eficiência e sustentabilidade.

Adicionalmente, há uma motivação específica para o aprimoramento dos conhecimentos na área de otimização topológica relacionadas ao desenvolvimento do projeto do submarino nuclear que atualmente está sendo conduzido pela Marinha do Brasil. A Divisão de Estruturas está inserida no Departamento Técnico do Centro de Projetos e Sistemas Navais (CPSN). Nesta divisão, todas as estruturas, resistentes e não resistentes deste submarino estão sendo projetadas, e a otimização topológica é vista como crucial para a viabilidade do projeto como um todo. A questão do peso e da estabilidade do submarino são desafios críticos, sendo a otimização topológica essencial para garantir que o projeto não se torne inviável devido a esses fatores.

1.2 Objetivos do trabalho

Este trabalho tem como objetivo principal desenvolver um código computacional capaz de realizar cálculos de elementos finitos e otimização topológica, para minimização de massa sob restrição de tensão, em uma estrutura retangular plana, e que seja possível aplicar cargas e

condições de contorno conforme necessário. Além disso, serão avaliadas as variações de alguns parâmetros utilizados neste código, tais como raio mínimo do filtro de densidades (r_{\min}), magnitude da força aplicada, valor de penalidade de densidade (β) e limite de tensão de falha, analisando o impacto dessas alterações nos resultados obtidos.

Os conhecimentos adquiridos e o trabalho desenvolvido serão aplicados em trabalhos futuros, em projetos estruturais de submarinos. Os objetivos específicos incluem:

1. Desenvolver e validar uma formulação matemática necessária para análise de elementos finitos em problemas de tensão;
2. Implementar algoritmos de otimização topológica para a redução de massa em estruturas, sob restrição de tensão; e
3. Avaliar a eficácia do método proposto em termos de redução de peso e manutenção da resistência estrutural.

Este trabalho pretende contribuir para o campo da engenharia naval, proporcionando uma ferramenta adicional para o desenvolvimento de estruturas mais eficientes e seguras, essenciais para a operação de submarinos.

1.3 Estrutura dos capítulos

Este trabalho apresenta os seguintes capítulos:

2. **Revisão Bibliográfica:** Será apresentada uma pesquisa aprofundada sobre métodos dos elementos finitos e técnicas de otimização topológica.
3. **Metodologia:** Apresenta a formulação matemática necessária para resolver problemas de otimização topológica. O foco é dado à implementação computacional usando o MATLAB, descrevendo passo a passo o desenvolvimento do código para realizar a análise de elementos finitos e a otimização de estruturas com restrições de tensão;
4. **Resultados e Discussão:** Este capítulo traz a validação do código desenvolvido com a comparação dos resultados obtidos utilizando um *software* comercial, seguido pela aplicação do código em estudos de caso. São discutidas as variações dos parâmetros e o impacto desses ajustes nos resultados obtidos;
5. **Aplicabilidade da Otimização Topológica em Estruturas Submarinas:** Explora as principais partes estruturais de submarinos e apresenta as possibilidades de aplicação da otimização topológica em componentes como anteparas e suportes de equipamentos,

discutindo os desafios e benefícios dessa abordagem no contexto de subestruturas de submarinos.

6. **Conclusão:** Resumo das principais conclusões obtidas com o desenvolvimento do código e sua aplicação, além de sugestões para trabalhos futuros que possam expandir as possibilidades de otimização topológica em estruturas complexas.

2 Revisão bibliográfica

2.1 Fundamentos da teoria de elementos finitos

O método dos elementos finitos (MEF) é uma ferramenta numérica importante para a solução de problemas complexos de engenharia, particularmente aqueles que envolvem equações diferenciais parciais. O MEF envolve a discretização de um domínio contínuo em pequenos subdomínios, chamados elementos, que estão conectados por nós. Para problemas estáticos, as equações diferenciais que descrevem o comportamento do sistema são então resolvidas em termos dos graus de liberdade assumidos nos nós, transformando um problema contínuo em um sistema de equações algébricas.

Zienkiewicz e Taylor (2000) discutem a aplicação do MEF em problemas de elasticidade, um campo fundamental para a análise estrutural. Eles explicam que a teoria da elasticidade trata do comportamento de sólidos deformáveis quando submetidos a cargas e condições de apoio. O MEF permite calcular de forma aproximada os deslocamentos, as tensões e as deformações resultantes. Essa capacidade é fundamental para projetos de estruturas metálicas de submarinos, onde é necessário prever e controlar as respostas estruturais para diferentes tipos de carregamento.

A aplicação do MEF em estruturas de submarinos oferece inúmeras vantagens. Bathe (2014) e Hughes (2000) destacam que o MEF permite uma análise detalhada das tensões e deformações em componentes complexos, possibilitando a identificação de pontos críticos e a realização de melhorias de projeto. Essa abordagem aumenta a confiabilidade e segurança dos projetos, garantindo que as estruturas possam suportar as condições extremas encontradas em ambientes submarinos.

2.2 Métodos de otimização topológica

A otimização topológica (OT) é um ramo da engenharia estrutural que visa buscar a melhor distribuição de material dentro de um dado domínio para otimizar um critério de desempenho, como a rigidez ou o peso. Pode ser interpretado que o projeto, na forma ótima de uma determinada estrutura, é obtido por meio de um problema de distribuição de material. Introduzida por Bendsøe e Kikuchi (1988), essa técnica tem revolucionado o projeto de estruturas e tornou possível a concepção de estruturas mais eficientes.

Em Bendsøe e Kikuchi (1988), foi proposta a obtenção de formas ótimas de uma estrutura para máxima rigidez, com parametrização de material variável (com alto e baixo preenchimento) usando homogeneização assintótica (Guedes; Kikuchi, 1990). Nesse contexto, as formas estruturais ótimas foram determinadas como um problema de distribuição de material. Em Bendsøe (1989), para o mesmo problema, foi proposta uma formulação de material com base numa interpolação simples de variável de projeto de densidade relativa. Esta variável se presta ao controle de presença ou ausência de material, em geral, em um elemento finito. A interpolação proposta foi posteriormente chamada de SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), e permitiu a obtenção de topologias ótimas de maneira mais simples.

A metodologia de otimização topológica envolve várias etapas. Em primeiro lugar, é necessário definir um domínio inicial e estabelecer restrições de projeto e condições de contorno. É muito comum o problema estrutural de interesse ser discretizado num problema de elementos finitos, onde em cada elemento finito é designada uma variável de projeto de presença ou ausência de material. Em seguida, um algoritmo de otimização é utilizado para iterativamente ajustar a distribuição de material, com o objetivo de maximizar ou minimizar um critério de desempenho específico. Bendsøe e Sigmund (2003) oferecem uma descrição detalhada dos fundamentos teóricos e das aplicações práticas da otimização topológica. Eles explicam que uma das principais vantagens dessa técnica é a capacidade de reduzir significativamente o peso das estruturas, garantindo desempenho de uma métrica escolhida.

O avanço contínuo dos estudos em otimização topológica e manufatura aditiva é evidenciado pelos trabalhos recentes, como os de Hayes et al. (2023), Ferreira et al. (2023) e Cool et al. (2024). Estes trabalhos destacam o desenvolvimento de novas tecnologias em otimização integradas com a manufatura aditiva, promovendo ganhos significativos em eficiência estrutural, redução de peso, assim como para a atenuação de ruídos e vibrações. Esses avanços possibilitam o uso de materiais mais leves e eficientes, essenciais para aplicações em setores como o aeroespacial, a geração de energia e a indústria automobilística. Esses estudos exemplificam como a otimização topológica aliada a manufatura aditiva tem se consolidado como uma ferramenta importante para o desenvolvimento de componentes complexos e eficientes, viabilizando soluções inovadoras em diversas indústrias.

Nos casos dos projetos de submarinos, a otimização topológica desempenha um papel crucial na minimização do peso das estruturas. O fato é que a construção dos submarinos exige que as estruturas sejam resistentes, duráveis e leves para maximizar a eficiência e a capacidade de carga. Por meio da otimização topológica, é possível desenvolver componentes que atendam a esses requisitos rigorosos, resultando em projetos mais eficientes e econômicos.

2.2.1 Otimização de topologia: problema clássico de *compliance*

A otimização de topologia no contexto do problema clássico de *compliance* é uma abordagem muito estudada. O objetivo principal desse problema é minimizar a flexibilidade média (o que significa maximizar a rigidez estrutural) de uma estrutura sujeita a certas cargas e restrições. A flexibilidade média, ou *compliance*, pode ser calculada como o trabalho realizado pelas forças aplicadas na estrutura, em face aos deslocamentos reais da posição indeformada até a deformada.

Para resolver o problema de flexibilidade média, são utilizados métodos de otimização iterativos que ajustam a distribuição do material dentro de um domínio definido. Esse processo envolve a solução de um problema de programação matemática onde a função objetivo de flexibilidade média é minimizada, sujeita a restrições de volume e equilíbrio via equações MEF. A abordagem SIMP como mostrada por Bendsøe e Sigmund (2003), é comumente empregada, e penaliza elementos com densidades intermediárias, incentivando soluções finais com elementos que sejam totalmente sólidos ou vazios.

De acordo com Bendsøe e Sigmund (2003), a formulação SIMP transforma um problema de otimização discreta em um problema de otimização contínua, onde cada elemento do domínio é associado a uma variável de densidade que pode variar continuamente entre zero (vazio) e um (sólido). A penalização de densidades intermediárias é realizada elevando a densidade à uma potência maior que um, o que incentiva soluções binárias.

2.2.2 Otimização de topologia para as tensões

Na otimização de topologia, o problema clássico de *compliance* não garante desempenho em resistência. Os resultados obtidos são ótimos do ponto de vista da melhor distribuição de material para a rigidez da estrutura como um todo, sob restrição de uso de material.

A otimização topológica pode ser aplicada em problemas envolvendo tensões em sua formulação. Isso é particularmente relevante em contextos onde a resistência à fadiga e a durabilidade são cruciais, como na engenharia naval e aeroespacial.

A formulação de um problema envolvendo tensões é baseada na definição do problema de otimização que pode considerar tensões como função objetivo ou nas restrições. Diferentes

abordagens podem ser utilizadas para formular e resolver esse problema, destacando-se as formulações baseadas em funções de agregação e a utilização do Lagrangiano Aumentado.

As funções de agregação são técnicas amplamente utilizadas para otimizar tensões em estruturas. Essa abordagem combina várias medidas de tensão em uma única função, permitindo que o problema de otimização seja resolvido de forma eficiente. Verbart et al. (2016) e Le et al. (2010) discutem vários tipos de funções de agregação, incluindo a função norma-p e a função de Kreisselmeier-Steinhauser (KS), que têm se mostrado importantes para a otimização topológica considerando tensões.

A função norma-p é uma técnica para se obter uma espécie de norma de um vetor de tensões considerados em projeto. Este método pode ser ajustado para diferentes níveis de sensibilidade às tensões locais, escolhendo valores apropriados de p. Estudos mostram que a função norma-p é particularmente útil para suavizar distribuições de tensão e evitar concentrações locais excessivas (Verbart et al., 2016).

A função de Kreisselmeier-Steinhauser (KS), por outro lado, é amplamente utilizada em problemas de otimização estrutural com múltiplas restrições de tensão. Essa função combina as tensões locais em uma expressão logarítmica que pode ser ajustada para controlar a suavidade da distribuição de tensões. A função KS foi descrita por Kreisselmeier e Steinhauser e tem sido aplicada com sucesso em vários estudos de otimização topológica (Le et al., 2009).

Entre as vantagens da função de agregação, destaca-se a capacidade de reduzir o custo computacional, uma vez que essas funções transformam múltiplas restrições locais em uma única restrição global, o que simplifica a análise e acelera o processo de otimização. No entanto, uma das principais desvantagens é a perda de controle sobre o comportamento local da tensão, o que pode resultar em soluções que não atendam adequadamente às restrições em regiões específicas do domínio de projeto. Além disso, conforme o número de restrições locais aumenta, a capacidade de representação fiel dessas tensões pode se deteriorar rapidamente, comprometendo a qualidade dos resultados obtidos (Senhora et al., 2020).

Segundo Kennedy e Hicken (2015), os métodos de agregação de restrições, em especial os agregados induzidos propostos pelos autores, oferecem uma solução mais precisa e eficiente para problemas de otimização estrutural com restrições de tensão. Esses métodos superam as abordagens tradicionais, como a função de Kreisselmeier-Steinhauser e a norma-p, em termos de acurácia e independência de malha. Além disso, a técnica de análise pós-otimização desenvolvida permite uma melhor avaliação do impacto das agregações de restrições no projeto final, o que é crucial para garantir que o projeto otimizado atenda aos requisitos de desempenho e estabilidade.

2.2.3 Método do Lagrangiano Aumentado

Outra abordagem poderosa para a otimização com tensões é o método do Lagrangiano Aumentado (LA). Esse método combina o método dos multiplicadores de Lagrange com técnicas de penalização para considerar de forma eficiente restrições de igualdade e de desigualdade numa função objetivo. A ideia central é transformar o problema original em um problema equivalente, no qual as restrições são introduzidas como termos de penalidade na função objetivo. Assim, o método ajusta iterativamente os multiplicadores de Lagrange e os parâmetros de penalização, utilizando métodos de otimização padrão, até que a sequência de soluções aproximadas convirja para uma solução ótima que satisfaça todas as restrições.

Segundo Bertsekas (2016), o método do LA é bastante eficaz em problemas com muitas restrições de desigualdade, pois combina as vantagens dos métodos de penalização externa e interna. Com o método do Lagrangiano Aumentado é possível usar esquemas de penalização e ainda obter soluções exatas em relação ao problema original. Além disso, a abordagem permite a utilização de algoritmos de otimização não linear padrão, facilitando a implementação prática.

Em aplicações de otimização topológica, o LA pode ser utilizado para lidar com restrições de tensão locais e globais, garantindo que a solução aproximada encontrada não apenas satisfaça todas as restrições de projeto, como também minimize a função objetivo. Isso é crucial em aplicações industriais, onde a segurança e a durabilidade das estruturas são de extrema importância.

Atualmente, o ALGENCAN (Augmented Lagrangian General Constrained Optimization) destaca-se como um dos principais *softwares* para a resolução de problemas de otimização não linear com restrições, fundamentado na aplicação do Método do Lagrangiano Aumentado, conforme apresentado por Andreani et al. (2008).

2.3 Regra do material na otimização topológica

Ao longo da evolução da otimização topológica, diversos modelos de material foram criados para alcançar os resultados pretendidos. Exemplos desses modelos incluem SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), RAMP (*Rational Approximation of Material Properties*), BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) e SESO (*Sequential Element Sensitivity Optimization*). Além desses, outros modelos como o método de

homogeneização, a abordagem de densidade e o método de variável de fase também têm sido utilizados para obter resultados eficazes na OT.

A técnica SIMP, desenvolvida por Bendsøe (1989), utiliza um material com propriedades fictícias para impor penalidades, identificando as áreas vazias e sólidas por meio de um parâmetro ligado à densidade. A lei de potência determina a relação entre densidade e módulo de elasticidade, como descrito por Bendsøe e Sigmund (2003). A penalidade reduz a presença de elementos com densidades intermediárias, resultando em valores de pseudo-densidades próximos de um ou zero.

O método RAMP, desenvolvido por Stolpe e Svanberg (2001), lida com a concavidade das variáveis de projeto, o que significa que a relação entre a densidade relativa (ρ) e a propriedade material é modelada por uma função côncava no intervalo $[0, 1]$. O RAMP assegura que a função de otimização seja côncava, o que eleva a chance de obter uma solução binária (0 ou 1). Esta técnica ajuda a evitar questões numéricas associadas a densidades baixas e aprimora a acurácia das aproximações.

Yang (1999) criou o método BESO, o qual usa variáveis binárias para representar elementos sólidos (1) e elementos vazios (0). A cada ciclo, os elementos com sensibilidade abaixo de um determinado limite são eliminados, possibilitando o desenvolvimento da estrutura do volume inicial para o volume final fixado antecipadamente. Durante cada iteração, é feito um novo cálculo das sensibilidades, o que permite a reintrodução de elementos que foram removidos anteriormente caso a sensibilidade deles aumente.

Simonetti et al. (2021) sugeriram o método SESO, que diminui gradativamente a contribuição da rigidez de elementos com baixa exigência, ao invés de removê-los completamente. Este método, conhecido como "*soft-kill*", facilita a transição na distribuição de material, levando a uma solução de otimização mais estável.

2.4 Método de otimização

A classificação da otimização pode ser realizada de acordo com o tipo de função envolvida, como linear, não linear ou quadrática. Dentre os principais métodos de aproximação explícita mais comuns estão a SQP (*Sequential Quadratic Programming*), o OC (*Optimality Criteria*) e o MMA (*Method of Moving Asymptotes*).

O método SQP substitui o problema de otimização original por uma sequência de subproblemas, onde a função objetivo é aproximada por uma expansão quadrática de Taylor da

função objetivo original, e as restrições são representadas por aproximações lineares de Taylor das restrições do problema inicial. Esses subproblemas tornam-se convexos quando a matriz Hessiana da função objetivo é positiva-definida, garantindo a existência de um minimizador global. No método SQP, a inclusão de um termo de segunda ordem na função objetivo contribui para a convexidade do subproblema, assegurando maior eficiência e robustez no processo de otimização. Essa característica facilita a resolução dos problemas complexos com alta precisão (Griva et al., 2009). Este método é utilizado neste trabalho.

O OC é utilizado em casos envolvendo otimização com restrições específicas. De acordo com Venkayya (1989), esse processo é especialmente eficiente na otimização de estruturas, sendo conhecido por sua capacidade em lidar com problemas de comportamento linear e não linear. Este método é popularmente utilizado para resolução de problemas clássicos de *compliance*.

O MMA regula o nível de conservadorismo do modelo, garantindo a convexidade e promovendo a convergência no processo de otimização. Em cada iteração, o MMA resolve um subproblema separável, no qual as funções são expressas como a soma de termos dependentes de uma única variável, assegurando sua convexidade. A solução deste subproblema assegura que os valores da função objetivo e das restrições sejam maiores ou iguais aos valores das respectivas funções no problema original. Este método é amplamente utilizado devido à sua eficiência na resolução de problemas complexos de otimização estrutural (Griva et al., 2009) e também é aplicado em outras formulações de OT, como demonstrado no trabalho de Senhora et al. (2020).

Os métodos de programação linear e não linear são amplamente utilizados em engenharia, economia e pesquisa operacional. Ambos os métodos têm um objetivo comum de encontrar o valor ótimo de uma função objetivo, sujeita a um conjunto de restrições.

A programação linear envolve a otimização de uma função objetivo linear, sujeita a restrições também lineares. Na atualidade, o método Simplex é o mais utilizado para resolução (Morgan et al., 1990).

A programação não linear, por sua vez, lida com a otimização de funções objetivo de natureza não linear, podendo incluir restrições que também apresentam comportamento não linear. Neste caso, atualmente não há um método que mais se destaque, sendo alguns deles como, Método de Gradiente, Programação Quadrática Sequencial e o Método de Pontos Interiores. No entanto, pode haver algum destes que tenha um desempenho melhor para um caso específico.

Alguns métodos de otimização não linear para problemas com restrições utilizam técnicas de penalização ou de barreira (com o objetivo de garantir a viabilidade da solução ótima aproximada), transformando o problema de otimização com restrições em uma sequência de problemas de otimização sem restrições. Tais métodos podem ser usados para resolver problemas de otimização topológica.

2.5 Instabilidades numéricas em soluções de problemas de otimização topológica

Os resultados das análises podem apresentar alguns problemas após a aplicação da otimização topológica, que são decorrentes da instabilidade numérica da metodologia aplicada como, a dependência da malha, mínimos locais e padrão de tabuleiro de xadrez. Esses problemas são amplamente estudados e podem ser mitigados através do uso de métodos de filtragem adequados. Entre os filtros mais eficazes, destacam-se os filtros de densidade e de sensibilidade, conforme apresentado em Bendsøe e Sigmund (2003).

O filtro de densidade reconfigura a densidade dos elementos com base nas densidades dos elementos vizinhos, suavizando as transições entre regiões sólidas e vazias, e garantindo maior independência da malha. Já o filtro de sensibilidades modifica heurísticamente as sensibilidades após a resolução do problema de otimização, calculando médias ponderadas das sensibilidades dos elementos vizinhos. Essa técnica evita que padrões de tabuleiro de xadrez apareçam, garantindo uma melhor estabilidade numérica durante o processo de otimização (Sigmund, 2007).

Problemas de otimização não convexos resultam em múltiplos mínimos locais, gerando diferentes soluções para o mesmo problema com variação de parâmetros de otimização (Bendsøe et al., 1994). Portanto, a solução encontrada pode ser apenas um ótimo local e não o ótimo global.

A dependência da malha em problemas de otimização topológica ocasiona variações consideráveis na solução. Essas variações aumentam com diferentes discretizações, levando a geometrias mais complexas e divergentes à medida que o refinamento da malha aumenta. No limite, o refinamento possibilita que a microestrutura do projeto se ajuste para otimizar o desempenho, aproveitando toda a liberdade de projeto oferecida pelo método de otimização. Entretanto, o aumento na resolução da malha não assegura a convergência para formas mais definidas com base em uma solução obtida em uma malha de discretização mais grosseira. Para

lidar com essa questão, o uso de filtros de sensibilidades e de densidades surge como uma solução eficaz, pois auxilia no controle da dependência da malha, permitindo a obtenção de resultados mais estáveis e adequados à manufatura (Sigmund; Petersson, 1998).

A formação de regiões com material sólido e vazio alternados, semelhante a um tabuleiro de xadrez (*checkerboards*), Figura 2, é um problema comum que inviabiliza a fabricação. Filtros (de sensibilidades ou densidades) são utilizados para contornar essa instabilidade (Diaz; Sigmund, 1995; Bendsøe; Sigmund, 2003). Além disso, pode-se utilizar elementos com mais nós, como os elementos quadráticos, que possuem nós nas arestas, além dos nós dos vértices.

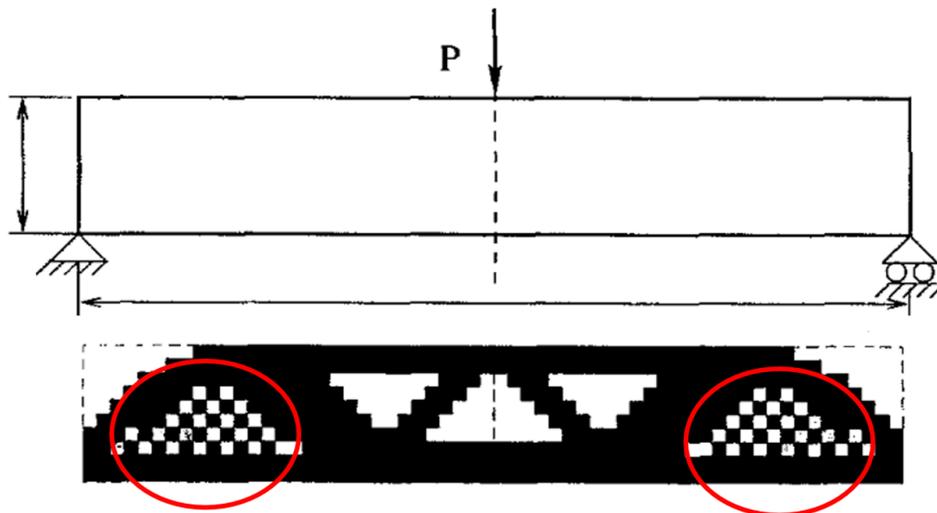


Figura 2: Exemplo de tabuleiro de xadrez (Sigmund, Petersson, 1998).

2.6 Estudos relacionados

A combinação do MEF com a otimização topológica tem sido amplamente estudada devido aos benefícios significativos que habilitam a engenharia estrutural. Diversos pesquisadores têm explorado essa integração para resolver problemas complexos, alcançando resultados promissores.

Bendsøe e Kikuchi (1988) foram pioneiros na geração de topologias ótimas utilizando o método de homogeneização. Este trabalho estabeleceu os fundamentos teóricos para a otimização topológica, permitindo a criação de estruturas com distribuições de material otimizadas para desempenho estrutural máximo.

Bathe (2014) oferece uma visão abrangente sobre os procedimentos do MEF, fornecendo uma base sólida para a análise estrutural necessária na otimização topológica. Sua obra é uma referência essencial para engenheiros que buscam compreender profundamente o funcionamento e a aplicação do MEF em diversos contextos de engenharia.

Sigmund (2001) contribui com um código de otimização topológica de “99 lines” escrito em MATLAB, facilitando o acesso de pesquisadores e engenheiros a ferramentas práticas para implementar algoritmos de otimização topológica de forma eficiente e eficaz. Sua contribuição é amplamente utilizada em estudos acadêmicos e projetos de engenharia, evidenciando a praticidade e a aplicabilidade das técnicas de otimização topológica.

Em Bendsøe e Sigmund (2003) são expandidos esses conceitos, onde detalham os métodos e aplicações da otimização topológica em diversas áreas da engenharia. Este livro é considerado uma referência fundamental para pesquisadores e profissionais que trabalham com otimização estrutural.

Liu e Tovar (2014) discutem a implementação de um código eficiente de otimização topológica tridimensional em MATLAB, destacando a simplicidade e eficiência de uma solução compacta para problemas de otimização estrutural. O estudo deles oferece uma ferramenta prática e acessível que facilita o aprendizado e a aplicação da otimização topológica, proporcionando instruções claras para a modificação de condições de contorno, cargas externas, e para a implementação de estratégias de programação não linear.

Hayes et al. (2023) explora a otimização topológica como ferramenta para reduzir a massa estrutural de geradores de alta potência usados em turbinas eólicas. Utilizando técnicas de manufatura aditiva, os autores apresentam três *designs* de rotores otimizados que reduziram a massa estrutural entre 54% e 67%, resultando em um aumento da densidade de potência de até 25%. As simulações demonstram que a aplicação da otimização topológica, combinada com a impressão 3D, pode levar a avanços significativos na fabricação de estruturas mais leves e eficientes para máquinas elétricas.

Senhora et al. (2020), em seu artigo sobre otimização topológica, apresenta uma implementação de uma abordagem livre de agregação de tensões locais para a otimização de estruturas. Seu trabalho destaca a importância de considerar restrições de tensões de forma direta, o que é especialmente útil em aplicações críticas, como o projeto de submarinos. Conforme apresentado neste artigo, esta abordagem permite uma distribuição de material mais eficiente, resultando em estruturas que são tanto leves quanto capazes de suportar cargas elevadas. Isso melhora significativamente a segurança e a eficiência dos projetos, demonstrando uma aplicação prática e eficiente das técnicas de otimização.

Ferreira et al. (2023) focam na combinação de otimização topológica e de forma com a modelagem de elementos finitos para projetar componentes aeroespaciais fabricados por manufatura aditiva a laser. A abordagem proposta visa a redução de peso e a otimização estrutural de uma carcaça de caixa de engrenagens, demonstrando uma redução de 5,12% na massa final do componente. A simulação de processos aditivos é integrada ao projeto para validar a viabilidade de impressão e garantir a qualidade estrutural dos componentes, destacando o potencial da otimização topológica para a manufatura de peças complexas.

Cool et al. (2024) abordam a otimização topológica vibro-acústica com o objetivo de minimizar a transmissão de som por meio de estruturas sanduiche. Essa técnica permite projetar materiais leves e rígidos que também possuem excelente desempenho na atenuação de ruídos e vibrações. A metodologia apresentada otimiza o núcleo das estruturas para equilibrar requisitos estruturais e acústicos, considerando diferentes frequências e ângulos de incidência de ondas sonoras. O trabalho destaca a aplicabilidade da otimização topológica para criar *designs* mais eficientes em termos de perda de transmissão de som, superando os métodos convencionais.

3 Metodologia

A metodologia apresentada a seguir, que integra o Método dos Elementos Finitos (MEF) com técnicas de otimização, será empregada na otimização de topologias de estruturas. As topologias resultantes serão comparadas com resultados disponíveis na literatura especializada. Para validação, foram analisados os seguintes casos: problema do quadrado diagonal, problema de duas barras, viga MBB e viga cantilever.

3.1 Fundamentos de elementos finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica amplamente utilizada na engenharia para resolver problemas envolvendo equações diferenciais parciais, sendo particularmente eficaz na análise estrutural. Baseado no Princípio dos Deslocamentos Virtuais, o MEF aproxima o campo de deslocamentos por funções de forma, cujos coeficientes correspondem aos deslocamentos nodais. Neste trabalho, emprega-se o elemento quadrilátero plano de 4 nós, que assume o estado plano de tensão e utiliza funções bilineares para interpolar deslocamentos. A formulação considera a matriz de elasticidade \mathbf{D} , que relaciona tensões e deformações pela Lei de Hooke. Para avaliar os limites de resistência do material, aplica-se o critério de von Mises, garantindo que as tensões equivalentes estejam dentro dos limites admissíveis.

3.1.1 Introdução ao elemento plano de 4 nós

Esta subseção descreve o desenvolvimento do MEF aplicado a um elemento plano de 4 nós, neste caso, um elemento quadrilátero bilinear. A formulação apresentada considera integração analítica das matrizes de rigidez do elemento. Isto permite a definição de uma matriz de rigidez local, comum a todos os elementos, e que pode ser expressa analiticamente.

A geometria do elemento quadrilátero plano de 4 nós é definido por quatro nós localizados nos vértices de um quadrilátero, com coordenadas (x_i, y_i) para $i = 1, 2, 3, 4$, Figura 3.

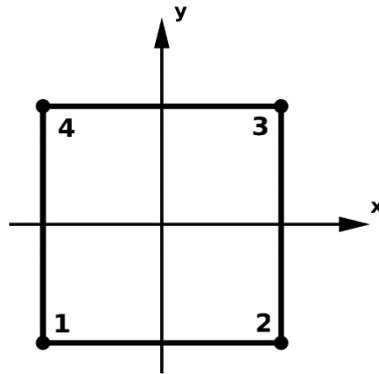


Figura 3: Elemento quadrilátero.

Considera-se que o campo de deslocamentos no elemento plano de 4 nós segue a hipótese de estado plano de tensão, onde os deslocamentos $u(x, y)$ e $v(x, y)$ variam linearmente dentro do elemento.

A interpolação dos deslocamentos é realizada utilizando as funções de forma bilineares N_i , de modo que os deslocamentos dentro do elemento são aproximados a partir dos deslocamentos nos nós, conforme Eq. (1).

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i \quad , \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i \quad , \end{aligned} \tag{1}$$

onde u_i e v_i são os deslocamentos nos nós do elemento nas coordenadas x e y respectivamente. As funções de interpolação de deslocamentos N_i , Eq.(2), são definidas como:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad , \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad , \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad , \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad , \end{aligned} \tag{2}$$

onde ξ e η são coordenadas naturais variando de -1 a 1, conforme Figura 4.

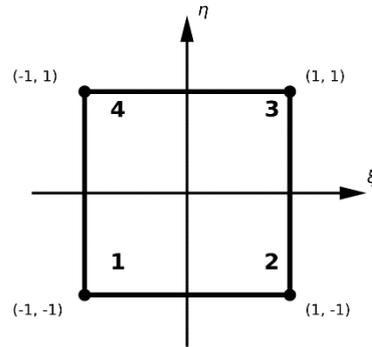


Figura 4: Coordenadas naturais.

3.1.2 Inter-relações

A relação entre deformações e deslocamentos é dada de forma aproximada por:

$$\epsilon = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad , \quad (3)$$

onde \mathbf{B} é a matriz de derivadas das funções de forma em relação às coordenadas x e y (Reddy, 2019). A matriz \mathbf{B} pode ser escrita com a ajuda das funções de interpolação dos deslocamentos apresentadas na Eq. (2) e da matriz de interpolação \mathbf{N} para o elemento plano de 4 nós, expressa como:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} . \quad (4)$$

A matriz \mathbf{B} é calculada utilizando as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas x e y .

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} . \quad (5)$$

Para o cálculo das derivadas na Eq. (5), a matriz Jacobiana \mathbf{J} , Eq. (6), relaciona as coordenadas naturais ξ e η com as coordenadas cartesianas x e y (Figura 5).

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} . \quad (6)$$

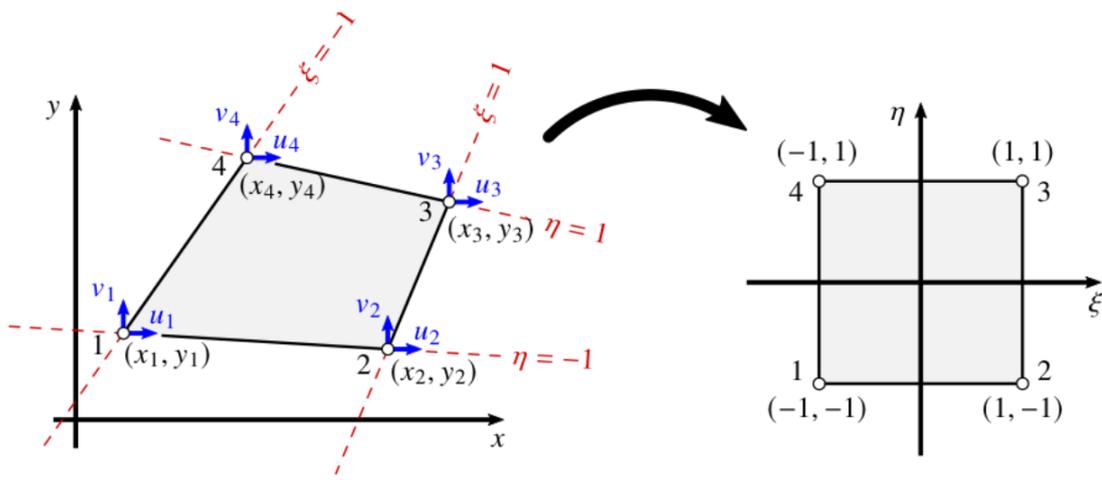


Figura 5: Dimensões e coordenadas do elemento (Jorge et al., 2022).

No estado plano de tensão, a relação entre tensão e deformação para materiais elásticos lineares isotrópicos é assumida via Lei de Hooke, conforme expressa pela Eq. (7).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} , \quad (7)$$

onde:

- $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor de tensões, Eq. (8):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} , \quad (8)$$

- $\boldsymbol{\epsilon}$ é o vetor de deformações, Eq. (9):

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

- \mathbf{D} é a matriz de elasticidade do material isotrópico no estado plano de tensão, Eq. (10), definida como:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

onde E é o módulo de Young e ν é o coeficiente de Poisson (Bathe, 2014; Hughes, 2000; Reddy, 2019).

A matriz de rigidez do elemento \mathbf{K}_e , Eq. (11), que é uma matriz simétrica, é obtida pela integração da matriz de derivadas \mathbf{B} transposta multiplicada pela matriz de elasticidade \mathbf{D} e pela matriz \mathbf{B} , ponderada pelo volume do elemento.

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta, \quad (11)$$

onde t é a espessura do elemento e \mathbf{J} é a matriz Jacobiana da transformação entre coordenadas naturais e coordenadas cartesianas (Zienkiewicz; Taylor, 2000). Incluindo nesta equação a matriz \mathbf{A}_{ij} , Eqs. (12) e (13), e as dimensões a e b (Figura 5):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij} &= t \mathbf{D}, \\ \det(\mathbf{J}) &= a b, \end{aligned} \quad (12)$$

sendo,

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

obtem-se a seguinte equação para a matriz \mathbf{K}_e :

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B} a b d\xi d\eta \quad . \quad (14)$$

Realizando a integração analítica da Eq. (14), obtém-se as Eqs. (43) para cálculo de cada elemento da matriz simétrica 8x8 \mathbf{K}_e , conforme encontra-se no Apêndice A. Estas equações são utilizadas de forma pré-integrada no MATLAB no lugar da Eq. (14), agilizando os cálculos.

3.1.3 Montagem global e cálculo de tensões

A matriz de rigidez global \mathbf{K} , sendo simétrica, é obtida por meio de um processo de montagem típico, no qual as matrizes de rigidez dos elementos \mathbf{K}_e , Eq. (15) são somadas, levando em conta a sobreposição de graus de liberdade compartilhados entre os elementos da malha.

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{K}_e \quad , \quad (15)$$

onde n é o número total de elementos na malha.

Para problemas de elasticidade linear, a formulação matemática do MEF inicia-se com a definição da forma fraca para equilíbrio de um corpo deformável via Princípio dos Deslocamentos Virtuais (Shames; Dym, 2003; Lucena Neto, 2021). O campo de deslocamento admitido é aproximado por interpolações dentro de um elemento finito escolhido (Reddy, 2019), cujos coeficientes correspondem aos deslocamentos nodais. O vetor de forças global \mathbf{f} é montado sobrepondo e somando as contribuições de forças aplicadas em nós dos elementos individuais. Após a integração no domínio dos elementos e a conexão entre eles para representar o domínio completo, a equação de equilíbrio global pode ser expressa como a (16):

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad . \quad (16)$$

onde:

- \mathbf{K} é a matriz de rigidez global da estrutura;
- \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodais; e
- \mathbf{f} é o vetor de forças aplicadas.

A imposição das condições de contorno é fundamental para a solução do problema, ajustando \mathbf{K} e \mathbf{f} para considerar nós com deslocamentos impostos e forças aplicadas (Hughes, 2000).

A deformação ϵ em cada elemento é obtida no centroide do elemento, a partir dos deslocamentos \mathbf{u} , aplicada na forma expandida da Eq. (3) que se apresenta conforme a Eq. (17):

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1+\eta}{4a} & 0 & \frac{1-\eta}{4a} & 0 & \frac{1+\eta}{4a} & 0 & \frac{-1-\eta}{4a} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\xi}{4b} & 0 & \frac{-1-\xi}{4b} & 0 & \frac{1+\xi}{4b} & 0 & \frac{1-\xi}{4b} \\ \frac{-1+\xi}{4b} & \frac{-1+\eta}{4a} & \frac{-1-\xi}{4b} & \frac{1-\eta}{4a} & \frac{1+\xi}{4b} & \frac{1+\eta}{4a} & \frac{1-\xi}{4b} & \frac{-1-\eta}{4a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

Como as análises serão realizadas no centroide de cada elemento, serão utilizados os valores de $\eta = 0$ e $\xi = 0$, sendo estes valores substituídos na Eq. (17).

As tensões calculadas são referentes ao centroide do elemento, usando a matriz de elasticidade \mathbf{D} . A forma expandida da Eq. (7) apresenta-se conforme a Eq. (18).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \nu \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ \nu \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \frac{E}{(1-\nu^2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

Para avaliar o limite de tensão dos elementos, utiliza-se o critério de von Mises, sendo a tensão equivalente calculada no centroide de cada elemento. Primeiramente, são calculadas as tensões principais, Eq. (19), e, posteriormente, a tensão de von Mises σ_{vm}^e , Eq. (20):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned}, \quad (19)$$

$$\sigma_{vm}^e = \sqrt{\frac{1}{2} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} \quad , \quad (20)$$

onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais do elemento.

A tensão σ_3 corresponde a uma das tensões principais, mas no estado plano, o eixo z não tem tensão normal ($\sigma_z = 0$) e não contribui para o comportamento do material no plano analisado, assim, $\sigma_3 = 0$. Portanto, as tensões principais no estado plano são apenas σ_1 e σ_2 .

A condição de tensão é considerada satisfeita se σ_{vm}^e não exceder a tensão admissível σ_{adm} , conforme Eq. (21).

$$\sigma_{vm}^e \leq \sigma_{adm} \quad . \quad (21)$$

Para implementar a análise estrutural por elementos finitos no MATLAB, é fundamental seguir uma série de etapas, detalhadas no Apêndice B.

3.2 Método de otimização topológica

A otimização topológica é uma técnica que tem ganhado destaque na engenharia estrutural por permitir a distribuição ideal de material dentro de um domínio. Neste trabalho, o problema é formulado com o objetivo de minimizar a massa da estrutura, respeitando as restrições de tensão. Este capítulo aborda detalhadamente a formulação do problema de otimização, incluindo as restrições de tensão, a penalização da massa, a função objetivo baseada no método do Lagrangiano Aumentado, além da implementação computacional.

Para a resolução dos problemas, foi utilizado o otimizador `fmincon` do MATLAB, configurado com o método SQP. Essa escolha se deve à sua praticidade e eficácia, sendo uma ferramenta robusta que oferece bons resultados para problemas formulados com o Lagrangiano Aumentado.

3.2.1 Definição do problema de otimização

A forma padrão de um problema de otimização se dá conforme Eq. (22), onde estão incluídos, a função objetivo o qual deve ser minimizada assim como todas as restrições impostas para o problemas, além dos limites das variáveis de decisão.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a:} \\ & \quad \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \quad \mathbf{c}_{\text{eq}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad , \\ & \quad \mathbf{A}_{\text{eq}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_{\text{eq}} \\ & \quad \mathbf{l}_b \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}_b \end{aligned} \quad (22)$$

onde:

- $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo a ser minimizada;
- $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ representa as restrições de desigualdade não lineares;
- $\mathbf{c}_{\text{eq}}(\mathbf{x})$ representa as restrições de igualdade não lineares;
- \mathbf{A} e \mathbf{b} representam matriz e vetor associados às restrições de desigualdade lineares;
- \mathbf{A}_{eq} e \mathbf{b}_{eq} representam matriz e vetor associados às restrições de igualdade lineares; e
- \mathbf{l}_b e \mathbf{u}_b são, respectivamente, os limitantes inferiores e superiores das variáveis de decisão.

Para o problema proposto neste trabalho, a Eq. (22) foi adaptada conforme necessidade, tornando-se a Eq. (23), que trata de minimização de volume ponderado por densidades artificiais, que são as variáveis de projeto do problema. Pode-se notar que não se trata exatamente de minimização de massa. No entanto, assume-se que a densidade específica do material dos elementos é a mesma (constante na estrutura). Nesse caso, minimizar o volume ponderado pelas variáveis de projeto equivale à minimização de massa. A função objetivo utilizada visa a minimização da massa total da estrutura, Eq. (23), expressa como:

$$\min_{\rho} M(\rho) = \sum_{e=1}^n \rho_e V_e$$

$$\text{Sujeito a: } g_e = \frac{\sigma_{vm}^e}{\sigma_{adm}} - 1 \leq 0, \forall e = 1, \dots, n \quad (23)$$

$$0 \leq \rho_e \leq 1, \forall e = 1, \dots, n$$

$$\text{Com: } \mathbf{K}(\rho) \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

onde:

- ρ_e é a densidade relativa de um elemento;
- ρ é o vetor que coleciona as variáveis de projeto ρ_e ;
- V_e é o volume de um elemento e ;
- n é o número total de elementos;
- σ_{vm}^e é a tensão de von Mises associada ao elemento e ;
- σ_{adm} é a tensão máxima admissível para o material;
- \mathbf{K} é a matriz de rigidez global;
- \mathbf{u} é o vetor deslocamento dos nós; e
- \mathbf{f} é o vetor das forças externas aplicadas nos nós.

A matriz \mathbf{K} global, conforme descrito na Seção 3.1.3, é obtida por meio de um processo típico de montagem considerando os graus de liberdade da malha de elementos finitos.

3.2.2 Métodos e estratégias para otimização

Nesta seção, são ilustrados aspectos fundamentais do problema de otimização de topologia com restrições de tensão: penalização de densidades intermediárias na matriz de rigidez global, conceito de degeneração do domínio de projeto, relaxação controlada de restrições de tensão, filtro de densidades e penalização de densidades intermediárias na função objetivo de massa.

Para a resolução do problema de otimização topológica, a matriz de rigidez global \mathbf{K} , será composta pelas matrizes dos elementos individuais dada pela Eq. (24). A formulação utilizada na Eq. (24) garante que a rigidez de cada elemento seja proporcional à sua densidade elevada a uma potência p . Isto penaliza a rigidez de elementos com densidade ρ_e intermediária, facilitando a obtenção de projetos 0-1 (sem elementos com presença parcial de material). Sendo

assim, isto facilita uma distribuição eficiente do material na estrutura otimizada (Senhora et al., 2020).

Cada matriz de rigidez elementar \mathbf{K}_0 é modificada pela densidade relativa do material ρ_e usando o método SIMP modificado, tornando $\mathbf{K}_e(\rho_e)$. Como a seguir:

$$\mathbf{K}_e = [\vartheta + (1 - \vartheta)\rho_e^p]\mathbf{K}_0 \quad , \quad (24)$$

onde:

- ϑ é o parâmetro Ersatz, que evita a singularidade da matriz de rigidez em elementos com densidade zero, $\vartheta = 10^{-6}$;
- p é o fator de penalização, usado para forçar a solução da densidade para valores próximos de 0 ou 1, sendo p maior ou igual a 1; e
- \mathbf{K}_0 é a matriz de rigidez para um elemento sólido.

Uma forma prática de exemplificar aspectos importantes do problema de otimização na Eq. (23) é mostrar o problema quadrado diagonal, encontrado no Senhora et al. (2020). Este é um caso simples que demonstra o fenômeno da singularidade no contexto da otimização topológica baseada em densidade e restrições de tensão. Neste problema é possível ilustrar que problemas com restrições de tensão podem ter soluções em regiões degeneradas, as quais são desconectadas do restante do espaço de solução.

A Figura 6 ilustra a geometria do problema, incluindo as condições de contorno e o carregamento aplicado. Este é um modelo quadrado de lados $L = 2$ (adimensional), discretizado em uma malha de 2×2 elementos. Fixa-se a densidade igual a 1 (elementos pretos) de dois dos elementos e os outros dois têm densidades controladas por ρ_2 e ρ_3 (as variáveis de projeto). O limite de tensão $\sigma_{adm} = 1$ é a tensão máxima de von Mises para o material sólido. O módulo de Young e o coeficiente de Poisson para o material sólido são $E = 1$ e $\nu = 0,3$, respectivamente (problema adimensional). A carga aplicada é $\mathbf{P} = [0,1; -0,1]$, portanto, o valor de P na Figura

$$6 \text{ é } P = |\mathbf{P}| = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

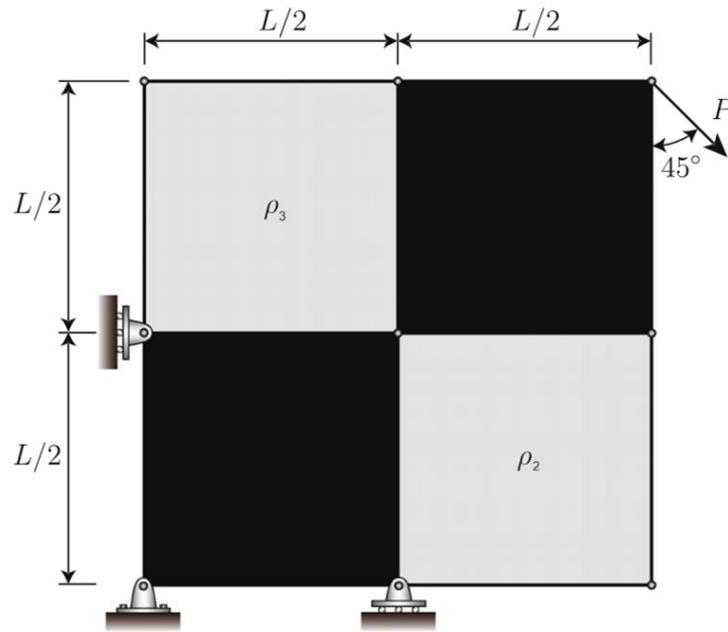


Figura 6: Problema quadrado diagonal: geometria, condições de contorno e carga. Fonte: Senhora et al. (2020).

O objetivo deste problema é minimizar a massa sujeito a restrições de tensão. Portanto, formulação da otimização é apresentada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \min_{\rho} \quad & m(\rho_2, \rho_3) = \rho_2 + \rho_3 \\
 \text{Sujeito a:} \quad & g_2 = \frac{\sigma_{vm}^2}{\sigma_{adm}^2} - 1 \leq 0, \rho_2 > 0 \\
 & g_3 = \frac{\sigma_{vm}^3}{\sigma_{adm}^3} - 1 \leq 0, \rho_3 > 0 \\
 & 0 \leq \rho_e \leq 1, e = 1, 2 \\
 \text{Com:} \quad & \mathbf{K}(\rho_2, \rho_3) \mathbf{u} = \mathbf{f}
 \end{aligned} \tag{25}$$

A Figura 7 ilustra a função objetivo e o espaço de projeto viável para o problema quadrado diagonal. A formulação da otimização é dada pela Eq. (25), onde σ_{vm}^2 e σ_{vm}^3 são as tensões de von Mises dos elementos associados às variáveis de projeto ρ_2 e ρ_3 , respectivamente (Duysinx; Bendsøe, 1998; Duysinx; Sigmund, 1998), e são avaliadas no centroide de cada elemento. O objetivo da Figura 7 é ilustrar as regiões viáveis para minimização de massa quando sujeita a restrições na tensão de von Mises.

O espaço de solução do problema contém regiões viáveis degeneradas com dimensão menor do que a do espaço de projeto (linhas verdes na Figura 7, com esta cor representando a

região viável do problema). Essas regiões degeneradas estão desconectadas do restante do domínio viável de projeto, o que impõe desafios adicionais à solução numérica da formulação de otimização na Eq. (25).

Para identificar as regiões degeneradas do espaço de projeto viável, é importante lembrar que as restrições de tensão g_2 e g_3 , conforme definidas na Eq. (25), só são aplicáveis quando $\rho_2 > 0$ e $\rho_3 > 0$, respectivamente. Consequentemente, se $\rho_2 = 0$, a restrição g_2 perde seu significado, e o mesmo ocorre com g_3 se $\rho_3 = 0$, levando às regiões degeneradas nos eixos ρ_2 e ρ_3 da Figura 7.

Estes resultados obtidos, representados na Figura 7, foram similares aos encontrados no Senhora et al. (2020).

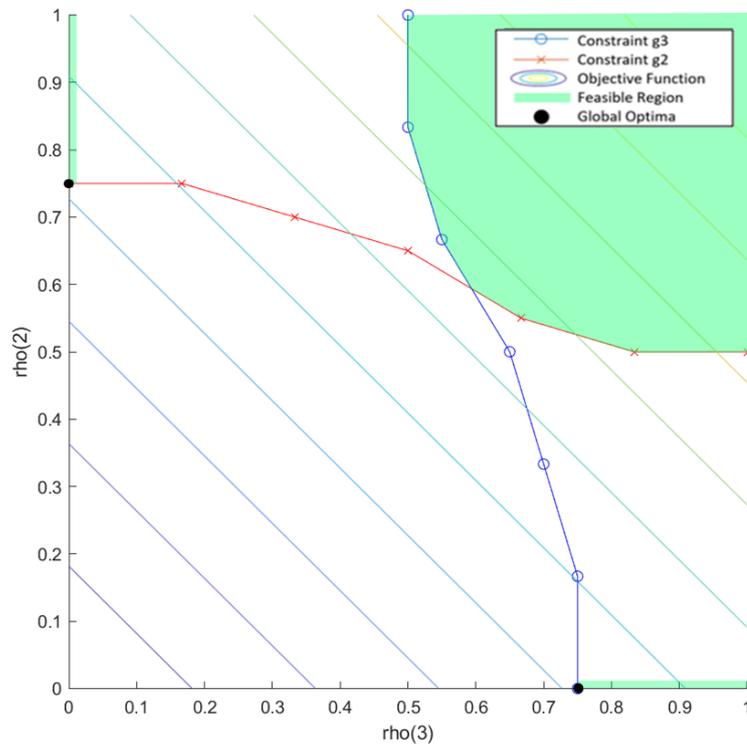


Figura 7: Espaço de projeto viável. Verifica-se que os ótimos globais se encontram em regiões degeneradas, desconectadas da região viável restante.

A técnica de abordagem da ε -relaxação é comumente adotada para otimização topológica baseada em densidade com restrições de tensão. Com a relaxação, a restrição de tensão é expressa conforme a Eq. (26).

$$g_e(\rho) = \frac{\sigma_e}{\sigma_{adm}} - 1 - \frac{\varepsilon}{\rho_e} \leq 0 \quad , \quad (26)$$

onde ε representa o parâmetro de relaxação e deve ser maior que zero ($\varepsilon > 0$, com um maior ε representando maior relaxação). A metodologia da ε -relaxação expande o espaço de projeto viável, aumentando a dimensionalidade das regiões degeneradas. Além de alterar as restrições de tensão conforme a equação acima, a abordagem da ε -relaxação também exige uma modificação nos limites inferiores das variáveis de densidade, estabelecendo que $\rho_e \geq \varepsilon^2$. Essa condição é imposta para assegurar a convergência do método ε -relaxação (Cheng; Guo, 1997; Petersson, 2001).

Portanto, no caso da resolução de problemas de otimização topológica com restrições de tensão utilizando a abordagem da ε -relaxação, é aconselhável iniciar com um valor relativamente alto de ε . Após obter uma solução inicial, deve-se resolver o problema novamente com um valor reduzido de ε , utilizando a solução anterior como uma estimativa inicial. Este procedimento deve ser repetido até que se alcance um valor suficientemente pequeno de ε . Conforme indicado por Cheng e Guo (1997), a sequência de soluções obtidas para valores decrescentes de ε converge para pontos ótimos do problema de otimização com restrições de tensão. Ou seja, este parâmetro é utilizado para suavizar as restrições de tensão, tornando-as mais manejáveis computacionalmente.

Com as restrições relaxadas g_ε^2 e g_ε^3 , obtidas usando a Eq. (26), pode-se obter a região viável mostrada na Figura 8 para $\varepsilon = 0,3$. Nota-se que o espaço viável é expandido e as regiões degeneradas desaparecem, neste caso.

Estes resultados obtidos, representados na Figura 8, foram similares aos encontrados no Senhora et al. (2020).

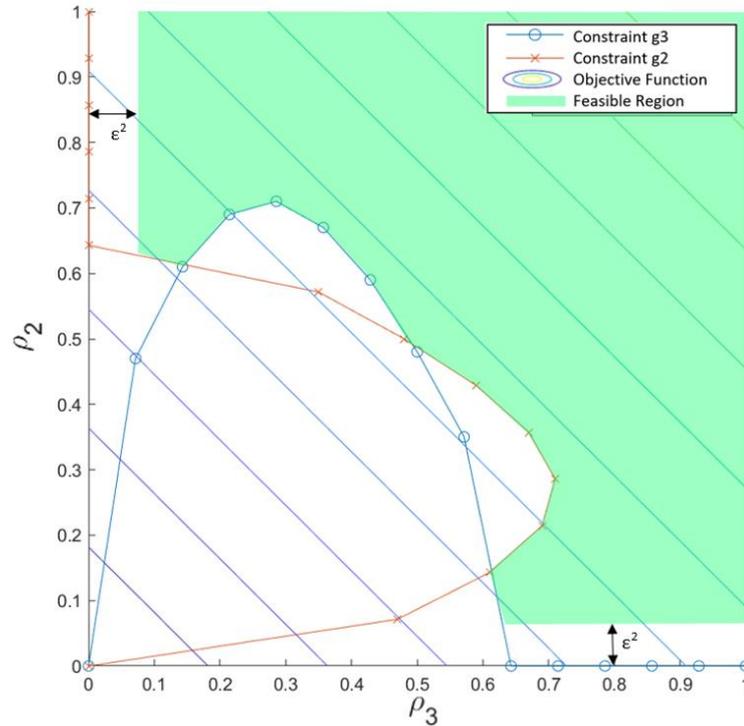


Figura 8: Restrições relaxadas para o problema quadrado diagonal. As restrições g_{ε}^2 e g_{ε}^3 correspondem a ε -relaxação de g_2 e g_3 , respectivamente, usando $\varepsilon = 0,3$.

O parâmetro de relaxação ε é utilizado na otimização topológica para suavizar as restrições de tensão. Este parâmetro é crucial para evitar problemas de convergência e assegurar que as tensões de von Mises nos elementos não ultrapassem os limites admissíveis em soluções finais, ainda assim permitindo uma solução mais flexível e manejável. A variação deste parâmetro é, em geral, dada como segue:

1. **Inicialização:** ε é inicialmente definido como 0,3. Esse valor inicial é relativamente alto para permitir uma maior flexibilidade nas primeiras iterações da otimização;
2. **Ajuste iterativo:** Após cada iteração, ε é gradualmente reduzido em 0,1, tornando as restrições mais rígidas progressivamente até que se atinja o valor mínimo de $\varepsilon = 0,001$. Em cada iteração, ε é monitorado usando a função $\max(0,001, \varepsilon)$. Isso garante que ε não caia abaixo de 0,001, evitando restrições excessivamente rígidas que poderiam dificultar a convergência;
3. **Uso em otimização:** O valor de ε também é utilizado para definir os limites inferiores das variáveis de densidade durante a solução de otimização. O limite inferior é ajustado para ε^2 , garantindo que as densidades não sejam reduzidas a zero absoluto, o que poderia causar problemas numéricos; e

4. **Penalização:** ε também influencia a penalização aplicada às restrições de tensão, g_e . A penalização é calculada com base na relação entre a tensão de von Mises calculada e a tensão admissível, ajustada pelo valor de ε , conforme previamente apresentado na Eq. (26).

O filtro de densidades é um artifício matemático no qual a densidade física de um elemento se torna uma função das variáveis de projeto de densidade de um grupo de elementos vizinhos alcançados por um raio de influência estipulado. É amplamente utilizado para evitar problemas numéricos e obter soluções mais realistas. Esta abordagem suaviza a distribuição de densidades entre os elementos de uma certa região, evitando a formação de padrões indesejados como os tabuleiros de xadrez. É uma técnica de regularização que permite remover a dependência da malha, conforme Figura 10. Segundo Bruns e Tortorelli (2001), a densidade filtrada $\tilde{\rho}_e$ é calculada conforme a Eq. (27):

$$\tilde{\rho}_e = \frac{\sum_{j \in N_e} H_{ej} \rho_j}{\sum_{j \in N_e} H_{ej}} , \quad (27)$$

onde N_e é o conjunto de elementos vizinhos ao elemento e e H_{ej} é uma função de ponderação que depende da distância entre os elementos e e j . A expressão utilizada para calcular H_{ej} é dada pela Eq. (28):

$$H_{ej} = \max(0, r_{\min} - \text{dist}(e, j)) . \quad (28)$$

Nesta equação, o r_{\min} representa o raio de influência e $\text{dist}(e, j)$ a distância entre os centroides dos elementos e e j , sendo e o elemento central e j os elementos alcançados pelo r_{\min} , como pode ser visualizado na Figura 9. A aplicação deste filtro é essencial para garantir a viabilidade e a eficácia das soluções obtidas na otimização topológica, prevenindo a criação de elementos excessivamente pequenos ou "ilhas" de material que são impraticáveis do ponto de vista de fabricação.

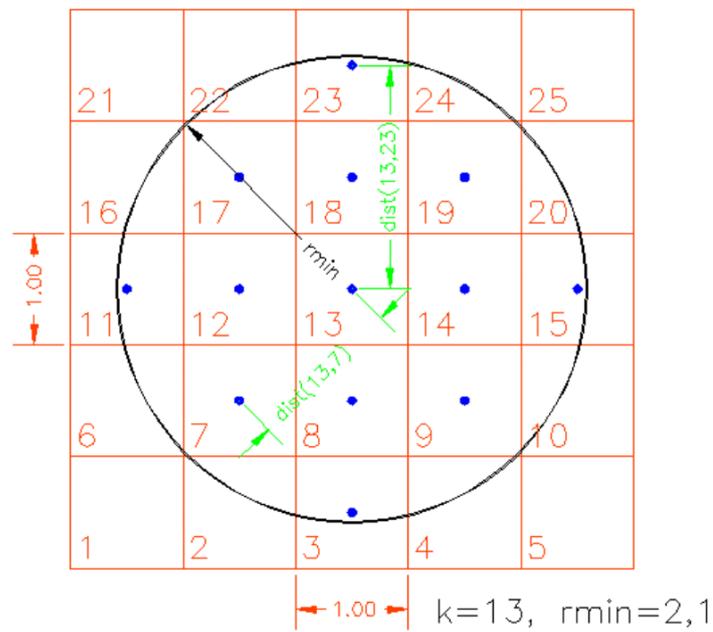


Figura 9: Área de atuação do raio mínimo (r_{min}) em relação ao elemento 13. Os elementos vizinhos contidos nesta região irão influenciar densidade do elemento 13.

A Figura 10 representa a atuação do filtro de densidades.

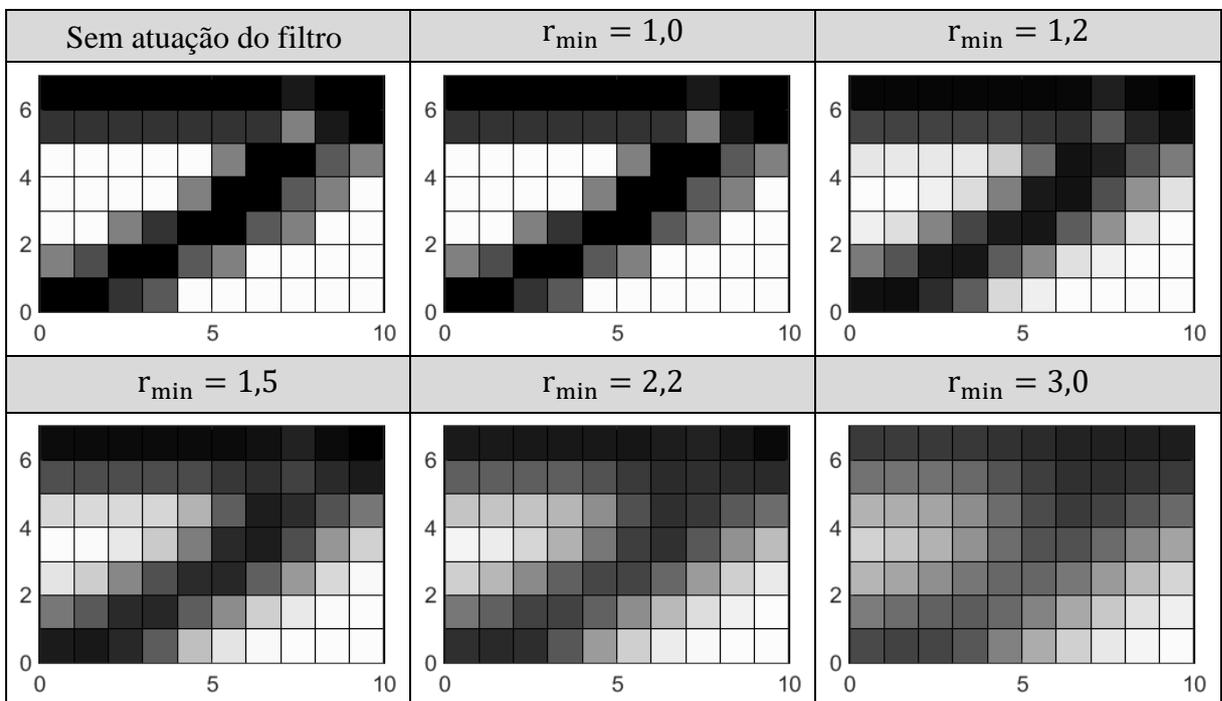


Figura 10: Atuação do raio de influência do filtro nas densidades de um modelo com diversos elementos.

Para favorecer que as densidades ρ_e converjam para valores binários (0 ou 1), aplica-se uma penalização nas densidades na função objetivo de massa. A técnica de penalização é essencial na otimização topológica, pois evita soluções com densidades intermediárias que não são fisicamente realizáveis. A penalização é implementada por meio de uma função que ajusta as densidades intermediárias, para facilitar a obtenção de soluções com densidades 0 ou 1.

Existem diversas formulações de penalização de densidades intermediárias para facilitar a obtenção de soluções em preto e branco (0/1) (Pereira et al. 2004; Navarrina et al. 2005; Paris et al. 2009; Lee et al. 2012). No presente estudo, usamos a função de densidade mostrada na Eq. (29), na qual a densidade penalizada do elemento e , $\tilde{\rho}_e$, é definida em termos da projeção de Heaviside suave (Guest et al. 2004; Sigmund, 2007).

$$\tilde{\rho}_e = 1 - e^{-\beta\rho_e} + \rho_e e^{-\beta} \quad , \quad (29)$$

onde:

- $\tilde{\rho}_e$ é a densidade penalizada;
- ρ_e é a densidade filtrada; e
- β é o parâmetro de penalização, sendo $\beta \geq 0$.

O parâmetro β controla o nível da penalização. Valores maiores de β aumentam a penalização das densidades intermediárias, forçando a convergência para valores binários mais rapidamente. Este parâmetro deve ser escolhido cuidadosamente para equilibrar a precisão da solução e estabilidade do algoritmo. Portanto, quanto maior o valor de β , mais os $\tilde{\rho}_e$ intermediários se distanciam do valor original ρ_e , conforme Figura 11.

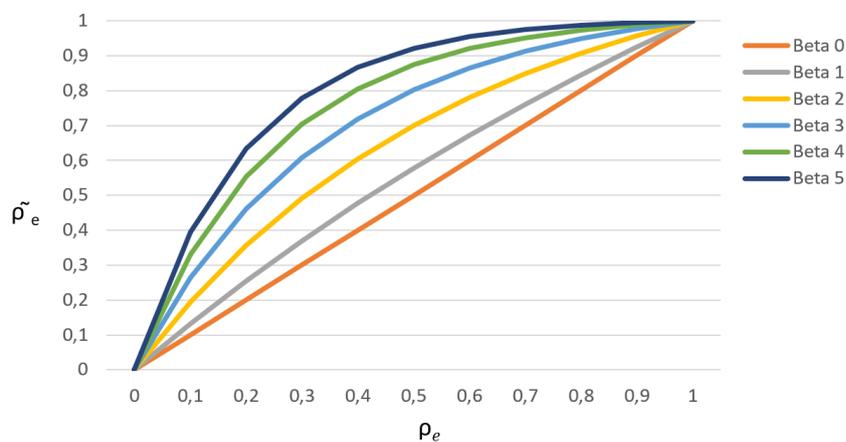


Figura 11: Gráfico de evolução da penalização.

A literatura sobre otimização topológica frequentemente discute a importância da penalização para assegurar a viabilidade das soluções obtidas. Bendsøe e Sigmund (2003) enfatizam que, sem a aplicação de técnicas de penalização, as soluções de otimização podem incluir uma grande proporção de elementos com densidades intermediárias, o que não é prático para a fabricação, e não proporciona a rigidez estrutural necessária. A penalização, portanto, não só facilita a obtenção de soluções binárias, mas também contribui para a obtenção de estruturas otimizadas funcionais.

3.2.3 Implementação e solução computacional

O método do Lagrangiano Aumentado (LA) foi escolhido neste trabalho por conta de contemplar uma formulação que incorpora restrições na função objetivo de maneira eficiente, com termos de penalidade que são regulados por estimativas de multiplicadores de Lagrange. Isto permite convergência para pontos de ótimo que respeitam as restrições de maneira exata.

O LA é uma evolução do método de penalidade exterior quadrática, sustentado por um robusto embasamento matemático (Bertsekas 1996, 2016; Nocedal; Wright, 2006). No método LA, a solução de um problema de otimização com restrições é alcançada resolvendo uma série de problemas que incorporam as restrições numa função objetivo adaptada, e que deve convergir para a solução do problema de otimização original.

A formulação da função objetivo por Lagrangiano Aumentado é uma técnica consagrada para solução de problemas de otimização, e que começa a ser mais difundida na otimização topológica com restrições de tensão. O LA tem sido usado com sucesso em problemas de otimização de topologia com muitas restrições, inclusive.

A função objetivo de massa total de uma estrutura, com incorporação de restrições segundo Lagrangiano Aumentado é expressa pela Eq. (30):

$$L = \sum_{e=1}^n \tilde{\rho}_e V_e + \sum_{e=1}^n \lambda_e h_e + \sum_{e=1}^n \frac{\mu}{2} h_e^2 \quad . \quad (30)$$

Esta é uma função objetivo, onde:

- $\tilde{\rho}_e$ é a densidade penalizada do elemento e ;
- V_e é o volume do elemento e ;

- n é o número total de elementos;
- λ_e é o multiplicador de Lagrange associados a cada restrição de tensão, Eq. (32);
- μ é o parâmetro de penalização das restrições de tensão (que caracteriza o Método do Lagrangiano Aumentado), Eq. (33); e
- h_e é a penalidade calculada para cada elemento, que é expressa como:

$$h_e = \max\left(g_e(\rho), -\frac{\lambda_e}{\mu}\right) . \quad (31)$$

Para a Eq. (30), tanto os multiplicadores de Lagrange $\lambda_e^{(k)}$ quanto o termo de penalidade $\mu^{(k)}$, são atualizados a cada passo k usando as Eqs. (32) e (33), respectivamente. O valor inicial de λ_e foi considerado igual a 1, e o de μ igual a 10, nas análises realizadas. A função L é similar ao Lagrangiano do problema com restrições, mas difere pelos termos $\frac{\mu}{2}h_e^2$, estes termos que justificam o nome “Lagrangiano Aumentado”. A presença dos termos $\lambda_e^{(k)}$ na função LA reduz a possibilidade de mau condicionamento associado aos métodos de penalidade quadrática (Nocedal; Wright, 2006).

$$\lambda_e^{(k+1)} = \lambda_e^{(k)} + \mu^{(k)}h_e^{(k)}, \forall e = 1, \dots, N_c , \quad (32)$$

$$\mu^{(k+1)} = \alpha \mu^{(k)} , \quad (33)$$

onde:

- N_c é o número de restrições; e
- α é uma constante, onde $\alpha > 1$.

Utilizando a Eq. (31), as restrições de desigualdade $g_e(\rho) \leq 0$ da Eq. (26) podem ser substituídas por restrições de igualdade equivalentes na Eq. (30).

Os termos da função objetivo na Eq. (30) são dados por:

1. **Massa total:** O primeiro termo $\sum_{e=1}^n \tilde{\rho}_e V_e$ representa a massa total da estrutura, onde a densidade $\tilde{\rho}_e$ é multiplicada pelo volume;
2. **Termo de penalização linear:** O segundo termo $\sum_{e=1}^n \lambda_e h_e$ é responsável por incorporar as restrições de tensão na função objetivo. Este termo é equivalente ao termo da função Lagrangiana associado à restrição do problema de otimização. Os

multiplicadores de Lagrange λ_e ajustam a penalização aplicada com base na diferença entre a tensão de von Mises calculada σ_{vm}^e e a tensão admissível σ_{adm} ; e

3. **Termo de penalização quadrática:** O terceiro termo $\sum_{e=1}^n \frac{\mu}{2} h_e^2$ adiciona uma penalização quadrática, que suaviza a penalização. Este termo se assemelha à penalização exterior quadrática, e garante uma convergência mais estável do algoritmo de otimização.

Em otimização topológica com restrições de tensão, o fator de ponderação adaptativo γ , como na Eq. (34), tem se demonstrado bastante eficiente. Seu uso traz melhores resultados quando aplicado na função objetivo, ajudando a distribuir melhor o material dentro de um domínio de projeto, e colaborando com a minimização da função objetivo. Ele auxilia na aproximação da solução do problema para valores próximos dos binários 1 e 0, além de ajudar a superar os ótimos locais. Ela é utilizada para minimização de massa com restrições locais de tensão, modificando apenas a função massa.

Segundo Senhora et al. (2020), baseado no efeito desses fatores na função LA, Eq. (34), verifica-se que quando $\sigma_{vm}^e > \sigma_{adm}$, o comportamento da função LA tende a ser dominado pelo termo de penalização, e quando $\sigma_{vm}^e < \sigma_{adm}$, o comportamento tende a ser dominado pelo termo da função objetivo. Para aumentar a relevância do termo de penalização quando $\sigma_{vm}^e > \sigma_{adm}$, reduz-se o valor de γ_e , que afeta apenas o volume do elemento e . Da mesma forma, para aumentar a relevância do termo da função objetivo quando $\sigma_{vm}^e < \sigma_{adm}$, aumenta-se o valor de γ_e para aquele elemento.

Em vista do exposto, a função objetivo de Lagrangiano Aumentado utilizada neste trabalho é dada pela Eq. (34):

$$L = \sum_{e=1}^n \gamma_e \tilde{\rho}_e A_e t + \eta \sum_{e=1}^n \left[\lambda_e h_e + \frac{\mu}{2} h_e^2 \right] , \quad (34)$$

onde:

- $\tilde{\rho}_e$ é a densidade penalizada do elemento e ;
- A_e é a área do elemento e ;
- t é a espessura constante dos elementos;
- n é o número total de elementos;
- η é o fator de escala descrito na Eq. (36);

- λ_e e μ são, respectivamente, os multiplicadores de Lagrange e o parâmetro de penalização utilizados para impor as restrições de tensão; e
- γ_e é um fator de controle que ajusta a penalidade associada à densidade $\tilde{\rho}_e$, (Senhora et al., 2020). A atualização dos parâmetros $\gamma_e^{(k+1)}$ é feita pela seguinte expressão:

$$\gamma_e^{(k+1)} = \begin{cases} \max(a_1 \gamma_e^{(k)} + b_1, \gamma_L) & \text{se } \sigma_{vm}^e > \sigma_{adm} \\ \min(a_2 \gamma_e^{(k)} + b_2, \gamma_U) & \text{se } \sigma_{vm}^e \leq \sigma_{adm} \end{cases}, \quad (35)$$

onde γ_L e γ_U são os limites inferior e superior de γ_e , respectivamente. Os parâmetros a_1 , a_2 , b_1 e b_2 são obtidos empiricamente, sendo que a única exigência é que γ_e diminua caso $\sigma_{vm}^e > \sigma_{adm}$; ou aumente, caso contrário. Enfatiza-se que o fator de ponderação adaptativo, γ_e , é atualizado a cada passo k . Se estes requisitos forem atendidos, os resultados da otimização são relativamente insensíveis à escolha das constantes numéricas na Eq. (35). Aqui foram utilizados os seguintes valores: $a_1 = 0,7$, $a_2 = 2,5$, $b_1 = -0,1$, $b_2 = 0,5$, $\gamma_L = 0$ e $\gamma_U = 4$.

No código MATLAB desenvolvido, γ é atualizado em cada iteração do processo de otimização com base nas tensões de von Mises calculadas. Isso garante que a função objetivo penalize adequadamente elementos que não atendem às restrições de tensão, promovendo uma distribuição de material mais adequada, obtendo resultados mais robustos e eficientes no processo de otimização.

A busca de uma solução viável utilizando o método LA depende da proporção entre a função objetivo e o termo de penalidade da função LA. A magnitude do termo de penalidade é dependente do número de restrições. Na otimização topológica com restrições locais de tensão, o número de restrições aumenta quando a malha é refinada e diminui quando a malha é grosseira (Senhora et al., 2020).

Para preservar a proporção objetivo-penalidade na função LA, conforme a malha seja refinada ou grosseira, o termo de penalidade será multiplicado por um fator de escala η , conforme mostrado na Eq. (34), que é dado pela Eq. (36):

$$\eta = \frac{1}{N_c}, \quad (36)$$

onde N_c é o número de restrições. Sendo assim, o fator de escala η auxilia na obtenção de resultados de otimização viáveis.

O otimizador `fmincon`¹, disponível no MATLAB, se mostrou uma ferramenta poderosa para resolver problemas de programação não linear com restrições. Este otimizador utiliza diversos algoritmos para encontrar soluções ótimas, incluindo o SQP, região de confiança e métodos de pontos interiores. Na formulação proposta, o `fmincon` é empregado para ajustar as densidades dos elementos de forma a minimizar a massa total da estrutura enquanto se mantém as restrições de tensão dentro dos limites admissíveis.

O `fmincon` resolve problemas de otimização na forma padrão, conforme apresentando na Eq. (22). Na formulação proposta para a otimização topológica, a função objetivo minimiza a massa total da estrutura, conforme detalhado na Eq. (34) e a restrição inclui o limite de densidade dos elementos (entre 0 e 1).

O Apêndice C apresenta os códigos desenvolvidos para a implementação do `fmincon` no MATLAB, bem como para a realização da otimização topológica em um modelo retangular com dimensões 4x2, composto por oito elementos quadrados de quatro nós.

¹ `fmincon` - é uma função do MATLAB usada para resolver problemas de otimização não linear restrita. Ele faz parte do pacote de otimização do MATLAB, chamado *Optimization Toolbox*, e está integrado diretamente na plataforma MATLAB. A função `fmincon` é projetada para encontrar o mínimo de uma função objetivo que pode estar sujeita a restrições de igualdade, desigualdade, limites nas variáveis e restrições não lineares.

3.3 Fluxograma do código de otimização topológica

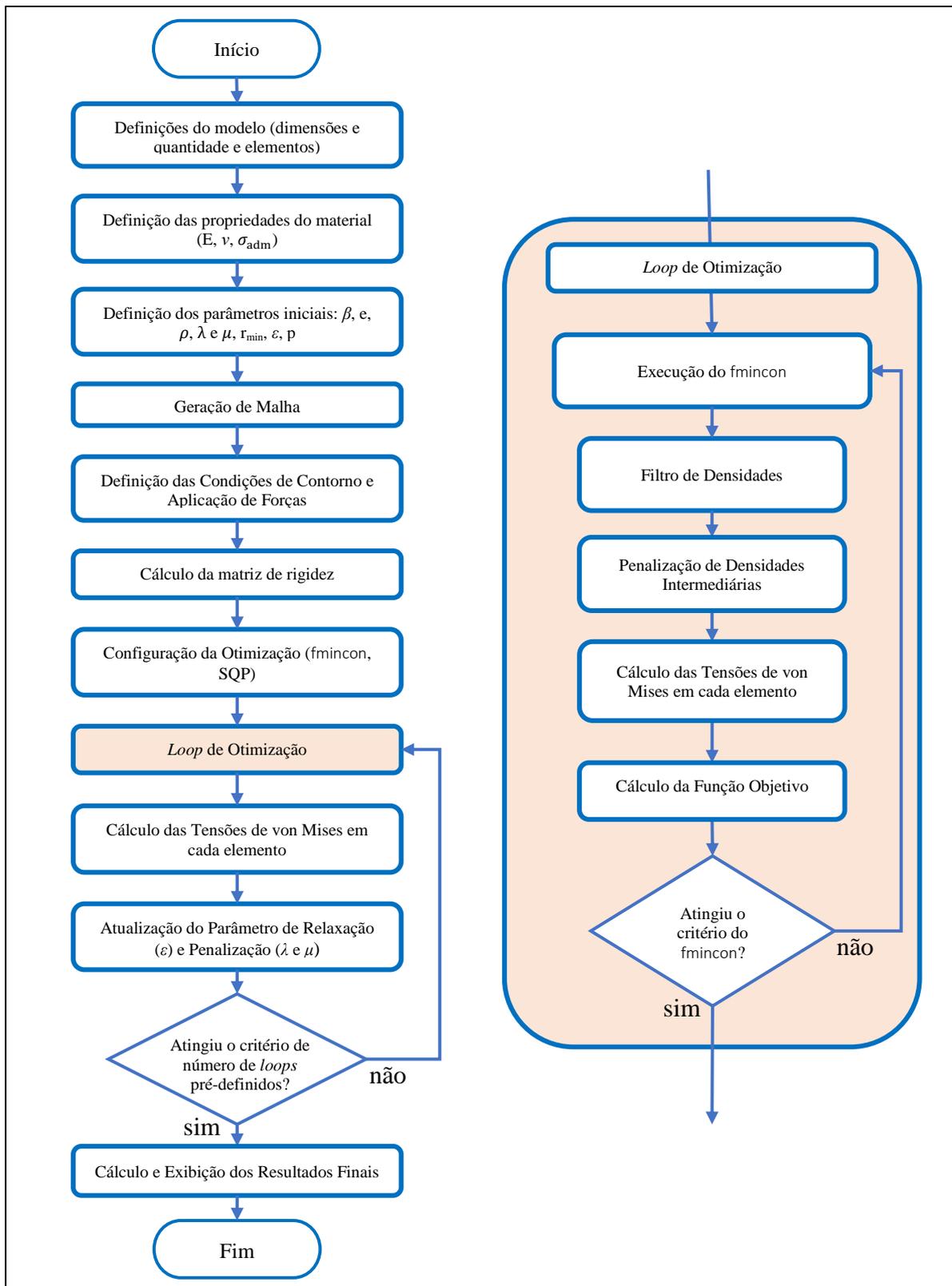


Figura 12: Fluxograma da rotina de otimização topológica desenvolvida. O fluxograma a direita é a rotina principal e a esquerda a *loop* de otimização.

A Figura 12 apresenta o fluxograma da rotina de otimização de topologia presente no código desenvolvido, sendo executado da seguinte forma:

- **Início:** O programa inicia com a limpeza das variáveis, caso tenha informação armazenada previamente.
- **Definições do modelo (dimensões e quantidade de elementos):** Nesta etapa, define-se a geometria do problema, incluindo as dimensões da estrutura (comprimento e largura) e o número de elementos finitos nas direções x e y. Realizando a discretização do domínio físico, permitindo a formulação do modelo de elementos finitos.
- **Definição das propriedades do material (E , ν , σ_{adm}):** São estabelecidos os parâmetros mecânicos do material, como o módulo de elasticidade (E), o coeficiente de Poisson (ν) e a tensão limite admissível (σ_{adm}). Definindo assim, o comportamento elástico do material.
- **Definição dos parâmetros iniciais (β , e , ρ , λ , μ , r_{min} , ϵ , p):** São atribuídos valores iniciais às variáveis de projeto, como densidades dos elementos (ρ), multiplicadores de Lagrange (λ), parâmetro de penalização (β), parâmetro de relaxação (ϵ) e coeficiente de penalização (μ).
- **Geração da malha:** A estrutura será discretizada em elementos finitos, através da criação de uma malha de nós e elementos. A conectividade entre os nós é definida.
- **Definição das condições de contorno e aplicação de forças:** São especificadas as condições de contorno, identificando os nós que serão fixados. Além disso, as forças externas são aplicadas nos nós definidos.
- **Cálculo da matriz de rigidez:** Nesta etapa, a matriz de rigidez é calculada.
- **Configuração da otimização (fmincon, SQP):** Configura-se o problema de otimização por meio da função fmincon do MATLAB, utilizando o algoritmo SQP. Essa configuração determina como o problema será resolvido numericamente.
- **Loop de otimização:** A fase de otimização é conduzida iterativamente, buscando minimizar a função objetivo (massa total) e ajustar as variáveis de projeto (densidades ρ) até que o critério de convergência seja atingido. Este *loop* é composto por várias subetapas:
 - **Definição dos limites de tensão:** São estabelecidos limites para as tensões admissíveis em cada elemento, conforme o critério de von Mises, de modo a garantir que a estrutura final não falhe por excesso de tensão.

- **Execução do fmincon:** O solver fmincon é executado em cada iteração para encontrar as densidades ótimas que minimizam a função objetivo, respeitando as restrições impostas.
 - **Filtro de densidades:** É aplicado o filtro de densidades para suavizar a distribuição de densidades entre os elementos de uma certa região.
 - **Penalização de densidades intermediárias:** É aplicado esta penalização para incentivar que as soluções converjam para valores binários (0 ou 1).
 - **Cálculo das tensões de von Mises:** As tensões de von Mises são calculadas para todos os elementos, verificando se os limites estabelecidos são respeitados.
 - **Cálculo da função objetivo:** A função objetivo é recalculada após cada iteração para verificar o progresso da otimização.
 - **Critério de parada:** Verifica-se se o critério de convergência do fmincon foi atendido. Caso contrário, o processo de otimização continua com uma nova iteração.
- **Cálculo das tensões de von Mises:** Após a conclusão do *loop* de otimização, as tensões de von Mises são calculadas para todos os elementos utilizando as densidades otimizadas. Isso permite avaliar a integridade estrutural da solução obtida.
 - **Atualização do parâmetro de relaxação (ϵ) e penalização (λ e μ):** Durante o *loop* de otimização, os parâmetros de relaxação e penalização são atualizados conforme o progresso da solução, garantindo que as penalizações sejam aplicadas corretamente e que o problema convirja para uma solução factível.
 - **Voltar ao início do *loop* (se necessário):** O algoritmo retorna ao início do *loop*, repetindo o processo de otimização conforme pré-definido.
 - **Cálculo e exibição dos resultados finais:** Ao final do processo de otimização, são obtidos os resultados, das densidades otimizadas dos elementos, as tensões de von Mises e a massa final da estrutura.
 - **Fim:** O processo de otimização se encerra, apresentando a estrutura otimizada.

3.4 Algoritmo SQP

No método SQP, o problema de otimização original é tratado como uma sequência de subproblemas de programação quadrática que são resolvidos iterativamente. Cada subproblema

aproxima a função objetivo e as restrições do problema original utilizando uma expansão em série de Taylor de segunda ordem.

Para o Lagrangiano Aumentado utilizado neste trabalho, a função Lagrangiana é modificada para incluir um termo de penalização das restrições de igualdade. Contudo, para o caso de um problema de otimização mais geral, com restrições de igualdade e desigualdade, a formulação é dada pela Eq. (37):

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i c_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^p h_j(\mathbf{x})^2, \quad (37)$$

onde:

- $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo;
- $c_i(\mathbf{x}) \leq 0$ são as restrições de desigualdade;
- $h_j(\mathbf{x}) = 0$ são as restrições de igualdade;
- v_j e λ_j são, respectivamente, os multiplicadores de Lagrange para as restrições de desigualdade e igualdade; e
- μ é o parâmetro de penalização.

O processo iterativo do SQP pode ser descrito pelas seguintes etapas:

1. **Inicialização:** Definição de um ponto inicial \mathbf{x}_0 , cálculo das funções objetivo e restrições no ponto inicial;
2. **Formulação do subproblema quadrático:** Em cada iteração k , o SQP resolve um subproblema de programação quadrática da forma:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}_k \mathbf{d} + \mathbf{g}_k^T \mathbf{d} \\ \text{sujeito a:} \quad & \\ & \begin{cases} \mathbf{A}_k \mathbf{d} \leq \mathbf{b}_k \\ \mathbf{A} \mathbf{e} \mathbf{q}_k \mathbf{d} = \mathbf{b} \mathbf{e} \mathbf{q}_k \end{cases} \end{aligned} \quad (38)^2$$

² A Eq.(38) apresenta uma formulação de subproblema aproximado mais geral para o SQP, incluindo também aproximações lineares para as restrições. Na formulação utilizada neste trabalho, as restrições são incluídas na função objetivo, através da método de Lagrangiano Aumentado. Sendo assim, o SQP utilizado neste trabalho não aproxima as restrições.

onde:

- \mathbf{H}_k é a matriz Hessiana do Lagrangiano no ponto \mathbf{x}_k ;
- \mathbf{g}_k é o vetor gradiente da função objetivo no ponto \mathbf{x}_k ;
- \mathbf{A}_k e \mathbf{b}_k são as matrizes e vetores de restrições de desigualdade lineares; e
- \mathbf{Aeq}_k e \mathbf{beq}_k são as matrizes e vetores de restrições de igualdade lineares (Nocedal; Wright, 2006).

3. **Resolução do subproblema quadrático:** O subproblema quadrático é resolvido para obter o vetor de busca \mathbf{d}_k ;
4. **Atualização do ponto de solução:** O ponto de solução é atualizado utilizando \mathbf{d}_k , conforme Eq. (39):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \quad , \quad (39)$$

onde α_k é o comprimento do passo, determinado por um método de busca linear;

5. **Atualização dos Multiplicadores de Lagrange:** Os multiplicadores de Lagrange são atualizados com base nas novas aproximações das restrições, conforme Eq. (40):

$$\begin{aligned} \lambda_{i,k+1} &= \lambda_{i,k} + \mu h_i(\mathbf{x}_{k+1}) \quad , \\ v_{i,k+1} &= v_{i,k} + \mu h_i(\mathbf{x}_{k+1}) \quad . \end{aligned} \quad (40)$$

6. **Verificação de convergência:** Verifica-se se as condições de parada são satisfeitas. Se não forem, o algoritmo retorna à etapa 2 e itera novamente.

4 Resultados e discussão

Neste capítulo, o foco da primeira parte é validar o código desenvolvido para o cálculo de elementos finitos, utilizando um *software* comercial (ANSYS) em um modelo de 4x2 elementos, comparando os resultados obtidos, para validação do cálculo numérico desenvolvido. Em seguida, utilizando o mesmo modelo, são apresentados os resultados obtidos para cada recurso aplicado com intuito de melhorar o código de otimização, assim como a evolução de cada parâmetro utilizado no código completo. Depois, em um modelo de 2x2 elementos (problema quadrado diagonal), será apresentado o mapeamento da evolução dos parâmetros de otimização, detalhando os resultados dentro de cada *loop* de otimização. Por final, serão mostrados os resultados obtidos a partir da aplicação do código desenvolvido em alguns casos clássicos, como o problema do projeto ótimo de duas barras, o MBB e cantilever (viga engastada-livre). Nestes resultados, foram estudadas as variações de alguns dos parâmetros principais: raio mínimo do filtro de densidades (r_{\min}), força aplicada, valor de penalidade de densidade (β) e limite de tensão de falha, para análise do comportamento do código. O fator de ponderação adaptativo γ se ajusta de forma automática, favorecendo a convergência dos resultados. A seguir, discute-se o impacto dessas variações nos resultados obtidos, considerando massa final, porcentagem de redução de massa, tensões resultantes e em alguns casos flexibilidade média. Cada seção apresenta uma análise detalhada das variações, seguida de conclusões sobre os resultados.

Para as análises a seguir, os resultados serão apresentados em escalas de cores de densidades artificiais de ρ , conforme Figura 13.

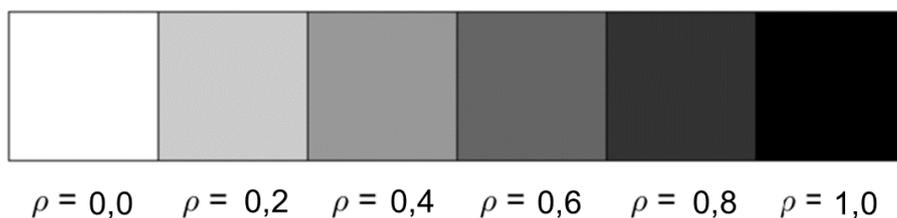


Figura 13: Escalas de cores de densidades artificiais de ρ .

A execução dos algoritmos deste trabalho foi realizada em uma máquina com as seguintes configurações: processador Intel Core i5-1135G7 (2,40 GHz), 20 GB de memória

RAM, unidade SSD de 500 GB, placa de vídeo NVIDIA GeForce MX350 (2,0 GB) e sistema operacional Windows 11 Home.

4.1 Validação do código de elementos finitos

Para validação do código de elementos finitos desenvolvido neste trabalho utilizando MATLAB, foram realizadas análises de deslocamentos dos nós e de tensão de von Mises nos elementos, em um modelo similar utilizando o *software* ANSYS.

4.1.1 Modelos desenvolvidos e malha

Para este estudo será utilizado um modelo adimensional de 4x2 elementos, conforme Figuras 14 e 15, com massa total inicial de 8 (cada elemento possui massa equivalente a 1), engastado nos nós da base (nós 1 a 5) e com uma carga concentrada de intensidade 1, aplicada horizontalmente e a direita, no ponto médio da parte superior (nó 13). Considera-se módulo de elasticidade igual a 1 e coeficiente de Poisson igual a 0,3.

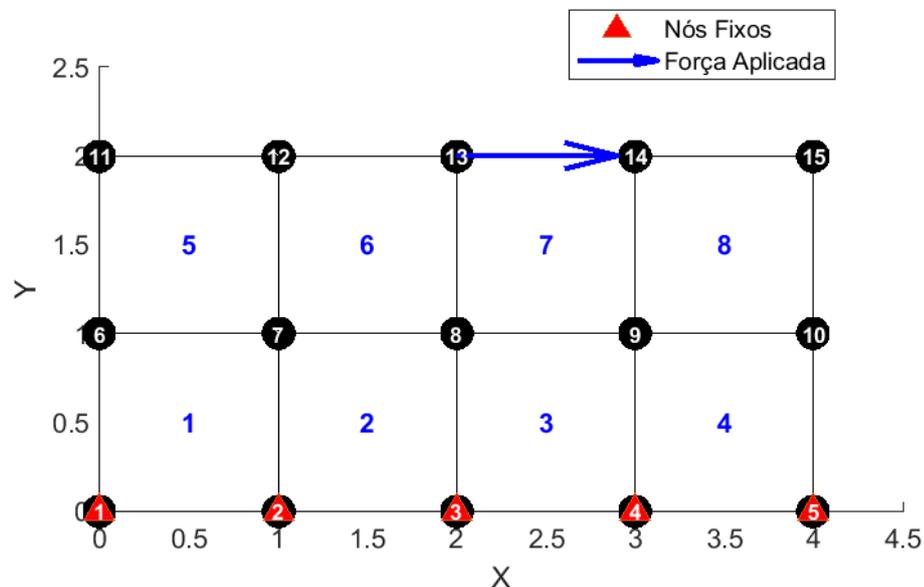


Figura 14: Malha, numeração dos elementos e nós, carga e condições de contorno do modelo de elementos finitos.

Já o modelo mostrado na Figura 14, foi desenvolvido utilizando o MATLAB, já contendo a malha, condições de contorno e força externa aplicada, além das propriedades do material.

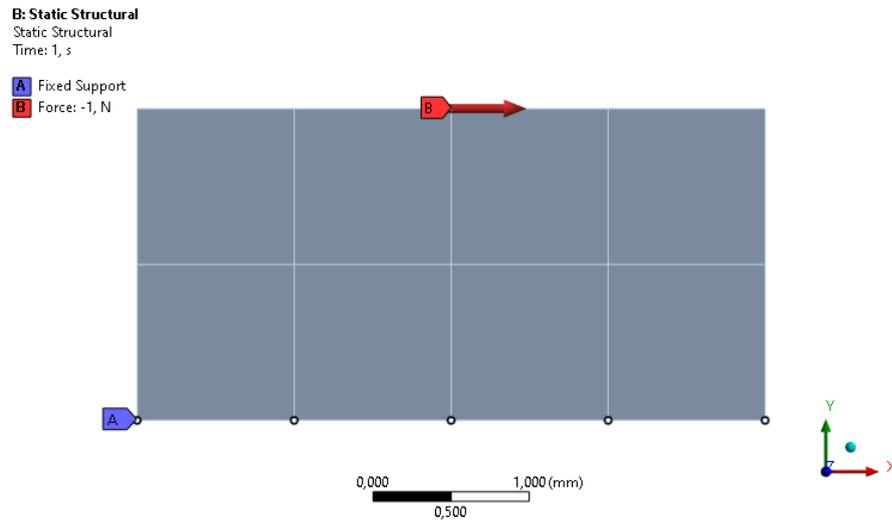


Figura 15: Malha, condições de contorno e aplicação da força no modelo.

O modelo acima, Figura 15, foi desenvolvido utilizando o *software* ANSYS Workbench, módulos *SpaceClaim* e *Static Structure*, já contendo a malha, condições de contorno e força externa aplicada, além das propriedades do material. Este modelo é similar ao modelo desenvolvido em MATLAB.

4.1.2 Análise numérica em elementos finitos

Foram realizadas duas análises para validação do modelo desenvolvido em MATLAB, conforme abaixo:

- Comparação dos deslocamentos dos nós; e
- Comparação das tensões de von Mises nos elementos.

Comparação dos deslocamentos dos nós

São apresentados os resultados das análises de deslocamentos dos nós e ao final realiza-se um comparativo, por meio das Figuras 16 e 17 e Tabela 1.

A Figura 16 apresenta os resultados da análise de deslocamentos dos nós no modelo gerado utilizando o código desenvolvido neste trabalho, em MATLAB, nas coordenadas x e y.

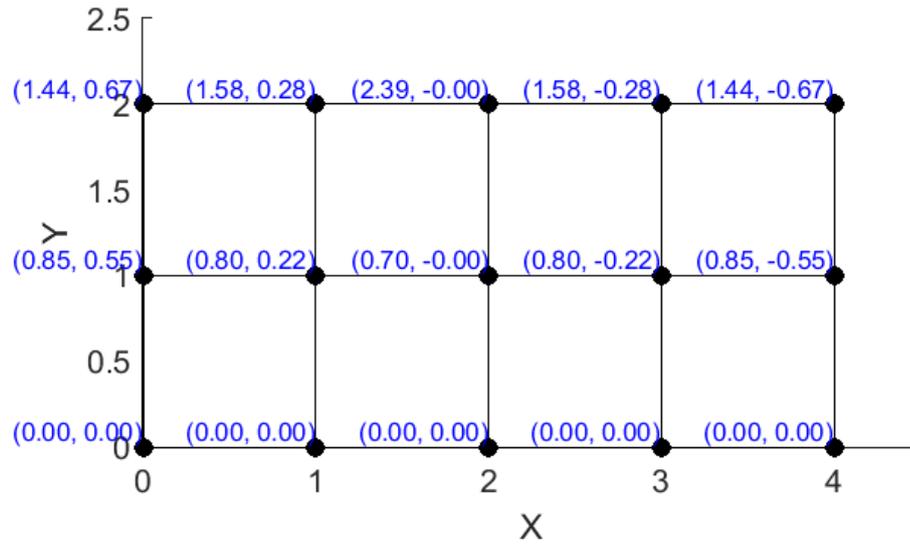


Figura 16: Deslocamentos dos nós nas coordenadas (x,y). Modelo desenvolvido no MATLAB.

A Figura 17 apresenta os resultados da análise de deslocamentos dos nós no modelo desenvolvido em ANSYS, para a coordenada x, Figura 17(a), e para a coordenada y, Figura 17(b).

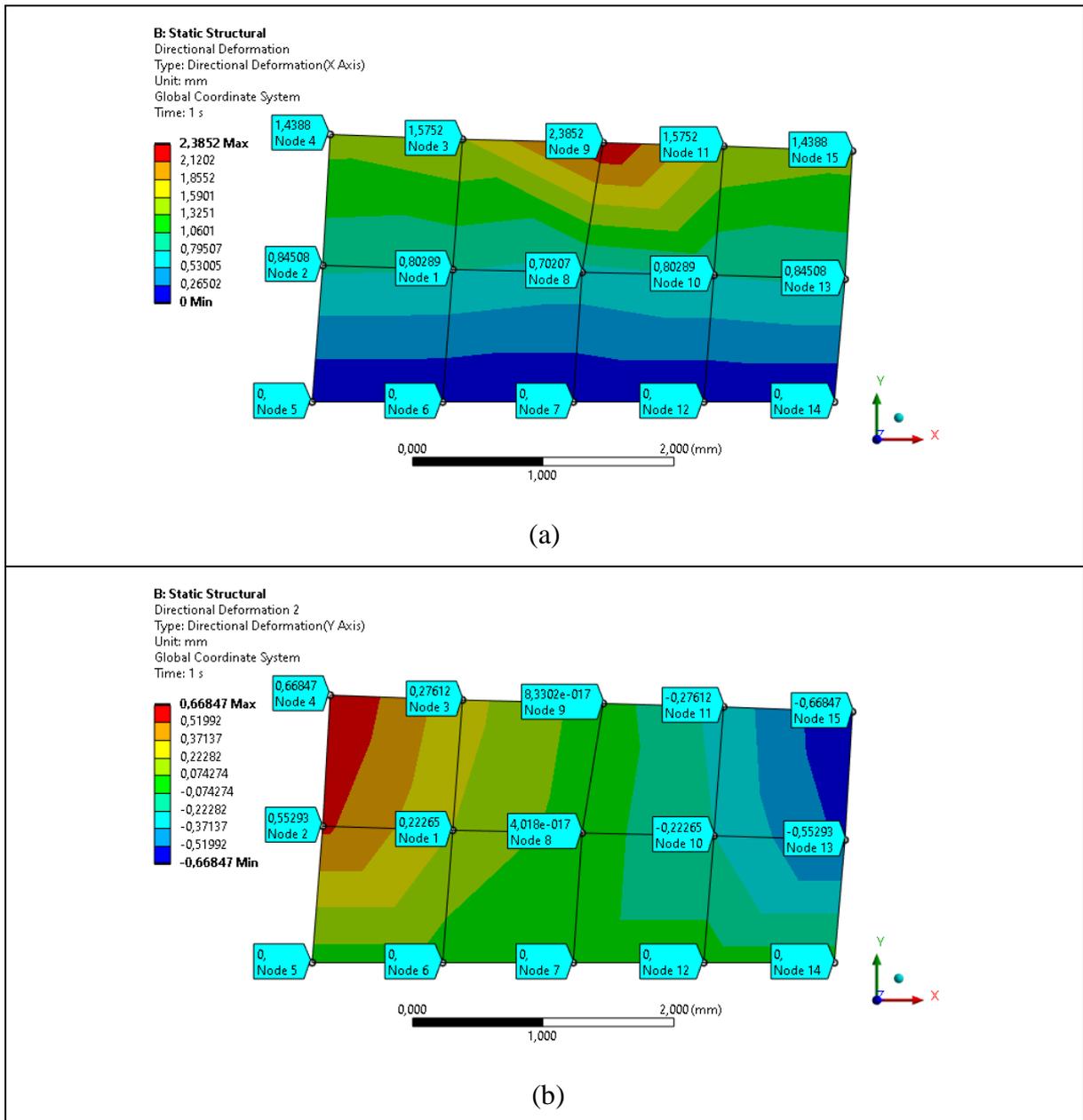


Figura 17: Deslocamentos dos nós nas coordenadas (x,y), na posição deformada. (a): deslocamentos em x, (b): deslocamentos em y. Modelo desenvolvido no ANSYS.

A Tabela 1 apresenta os deslocamentos e as diferenças obtidas nas direções x e y, entre o modelo desenvolvido em código MATLAB e o modelo analisado utilizando o *software* ANSYS. Esta diferença é calculada conforme Eq. (41).

$$\text{Diferença relativa (\%)} = \left| \frac{\text{Deslocam. (ANSYS)} - \text{Deslocam. (MATLAB)}}{\text{Deslocam. (ANSYS)}} \right| \times 100 \quad . \quad (41)$$

Analisando a Tabela 1, verifica-se que os valores das diferenças encontradas foram mínimos, tendo uma diferença máxima de 0,003%, ou seja, a diferença ocorreu na 5ª casa decimal após a vírgula dos resultados apresentados.

Tabela 1: Comparativo dos deslocamentos de cada nó, entre o código desenvolvido (MATLAB) e o ANSYS.

Nó	Código Desenvolvido		ANSYS		Diferença	
	Deslocam. em x	Deslocam. em y	Deslocam. em x	Deslocam. em y	Diferença em x	Diferença em y
1	0	0	0	0	0,000%	0,000%
2	0	0	0	0	0,000%	0,000%
3	0	0	0	0	0,000%	0,000%
4	0	0	0	0	0,000%	0,000%
5	0	0	0	0	0,000%	0,000%
6	0,845	0,553	0,845	0,553	0,000%	0,000%
7	0,803	0,223	0,803	0,223	0,000%	0,000%
8	0,702	0	0,702	0	0,001%	0,000%
9	0,803	-0,223	0,803	-0,223	0,000%	0,000%
10	0,845	-0,553	0,845	-0,553	0,000%	0,000%
11	1,439	0,669	1,439	0,669	0,001%	0,000%
12	1,575	0,276	1,575	0,276	0,003%	0,002%
13	2,385	0	2,385	0	0,000%	0,000%
14	1,575	-0,276	1,575	-0,276	0,003%	-0,002%
15	1,439	-0,669	1,439	-0,669	0,001%	0,000%

Comparação das tensões de von Mises nos elementos

São apresentados os resultados das análises de tensões de von Mises nos elementos e ao final realiza-se um comparativo, por meio das Figuras 18 e 19 e Tabela 2.

A Figura 18 apresenta os resultados da análise de tensão de von Mises nos elementos do modelo gerado utilizando o código desenvolvido neste trabalho, em MATLAB, discretizado por cores.

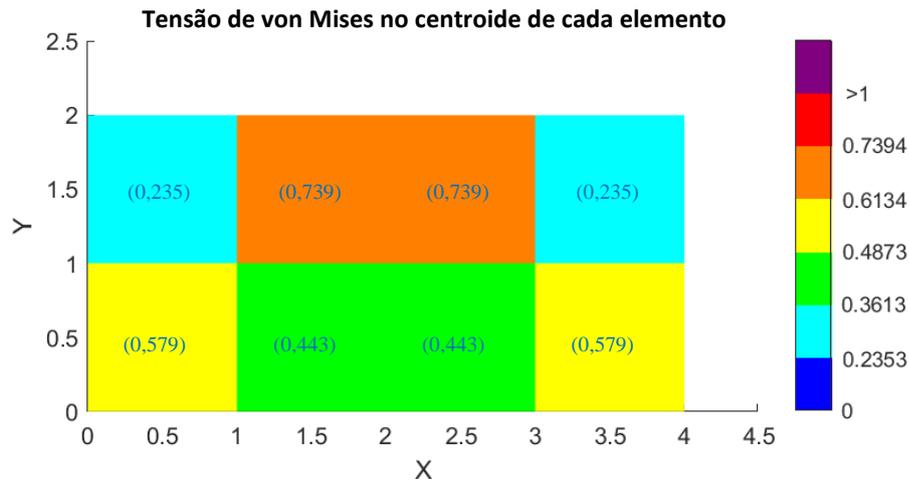


Figura 18: Tensão de von Mises no centroide de cada elemento. Modelo desenvolvido no MATLAB.

A Figura 19 apresentam os resultados da análise de tensão de von Mises nos elementos do modelo gerado utilizando o ANSYS, discretizado por cores.

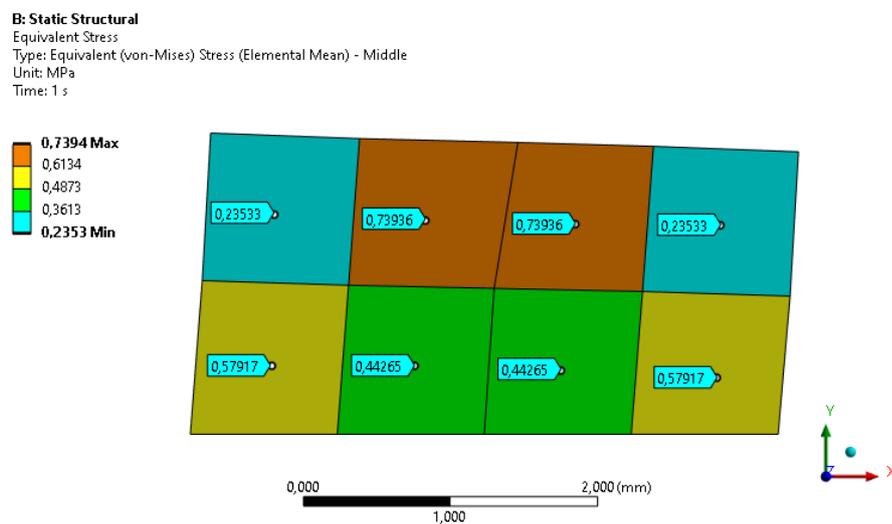


Figura 19: Tensão de von Mises nos elementos (posição deformada). Modelo desenvolvido no ANSYS.

A Tabela 2 apresenta a diferença entre os resultados das tensões de von Mises obtidos para cada elemento, usando o modelo desenvolvido em código MATLAB e o modelo do *software* ANSYS. Esta diferença é calculada conforme Eq. (42).

$$\text{Diferença relativa (\%)} = \left| \frac{\text{Tensão (ANSYS)} - \text{Tensão (MATLAB)}}{\text{Tensão (ANSYS)}} \right| \times 100 \quad . \quad (42)$$

Analisando a Tabela 2, verifica-se que os valores das diferenças encontradas foram mínimos, tendo uma diferença máxima de 0,013%, ou seja, a diferença ocorreu na 5ª casa decimal após a vírgula dos resultados apresentados.

Tabela 2: Comparativo de tensão de von Mises em cada elementos, entre o código desenvolvido (MATLAB) e o ANSYS.

Elemento	Código Desenvolvido	ANSYS	Diferença
1	0,579	0,579	0,005%
2	0,443	0,443	0,011%
3	0,443	0,443	0,011%
4	0,579	0,579	0,005%
5	0,235	0,235	0,013%
6	0,739	0,739	0,005%
7	0,739	0,739	0,005%
8	0,235	0,235	0,013%

Após os comparativos, de deslocamentos dos nós e tensão nos elementos, o código desenvolvido neste trabalho pode ser considerado válido, visto a paridade de resultados com o *software* comercial ANSYS.

4.2 Problema 4x2

Nesta seção, apresentam-se os primeiros resultados de otimização topológica com restrições de tensão, utilizando-se o mesmo modelo plano da Seção 4.1, de dimensões 4x2. Com este problema, é possível verificar a evolução de resultados para cada recurso implementado no código. Isto permite refinar a obtenção de melhores resultados no problema, tanto em termos de definição de variáveis de projeto (valores próximos de 0/1), quanto em relação às restrições de tensão.

O problema de otimização resolvido é o da Eq. (30), considerando 8 elementos finitos conforme o caso estrutural desta seção.

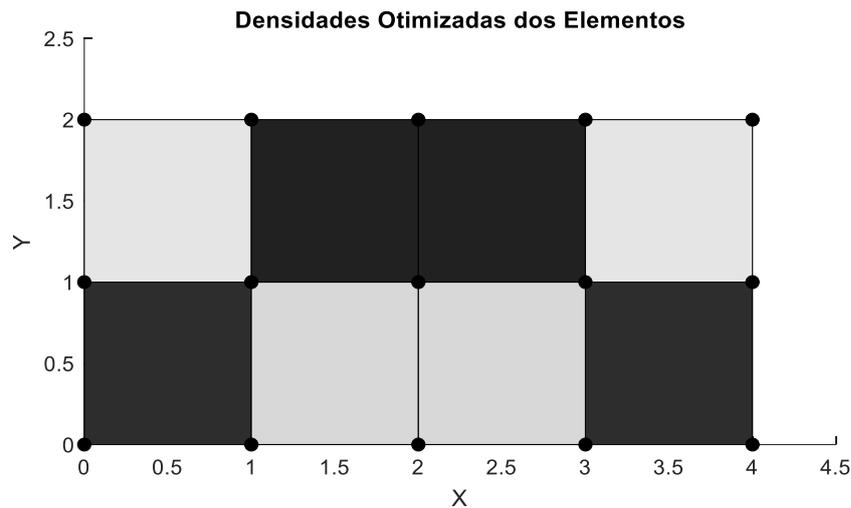


Figura 21: Densidades dos elementos após otimização.

Tabela 4: Densidades dos elementos.

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
Densidades	0,825	0,151	0,151	0,825	0,151	0,825	0,825	0,151

4.2.2 Implementação de loops

Nesta subseção, o problema foi resolvido com a inclusão de 4 *loops* de otimização baseados em *fmincon*. Estes *loops* são ciclos fechados que têm o objetivo de otimizar a topologia, respeitando critérios estabelecidos para ele. Em cada *loop* a topologia é otimizada gradualmente, sendo assim, o *loop* se inicia a partir dos dados obtidos no anterior, ou seja, a cada *loop* a estrutura fica mais próxima do ótimo. A adoção de 4 *loops* foi suficiente para obter resultados que minimizam a massa, respeitando a tensão admissível do material e com boa resolução 0/1. Nesta etapa iniciará a utilização dos multiplicadores de Lagrange λ e o parâmetro de penalização μ , detalhados nas Eqs. (32) e (33). Foram obtidos os resultados conforme apresentados nas Figuras 22 e 23 e nas Tabelas 5 e 6.

Com a implementação dos *loops* em torno do *fmincon* no código, todos os elementos do modelo extrapolaram o limite de tensão, conforme Figura 22 e Tabela 5. Os *loops* distribuíram as densidades dos elementos conforme Figura 23 e Tabela 6. Os resultados mostram que, após a implementação dos *loops*, todos os elementos ficaram com tensão sutilmente acima da tensão admissível. Houve a otimização da estrutura, porém, ainda não foi possível se atingir resultados próximos a 0/1 para as variáveis de projeto. Obteve-se uma redução de massa, alcançando uma

massa final de 3,856, o que equivale a uma redução de 51,799% em relação ao modelo inicial, onde todos os elementos possuem densidade igual a 1.

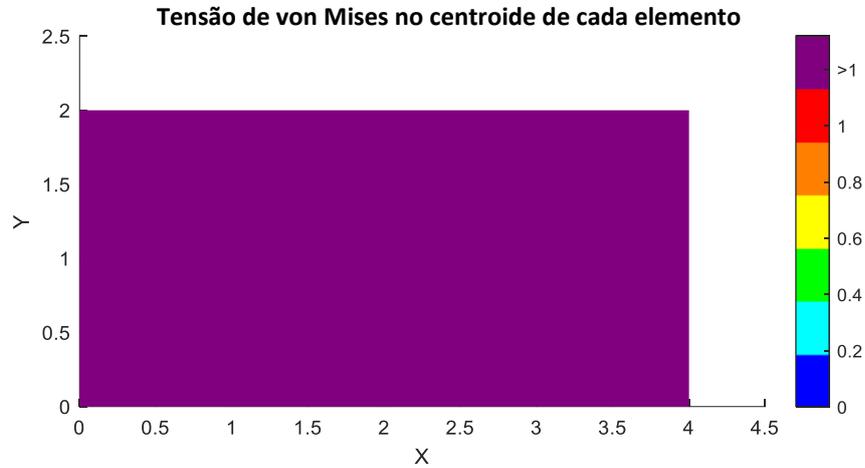


Figura 22: Tensão de von Mises no centroide de cada elemento, após implementação do *loop*.

Tabela 5: Tensão de von Mises em cada elemento.

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
Tensão de von Mises	1,011	1,001	1,001	1,011	1,006	1,010	1,010	1,006

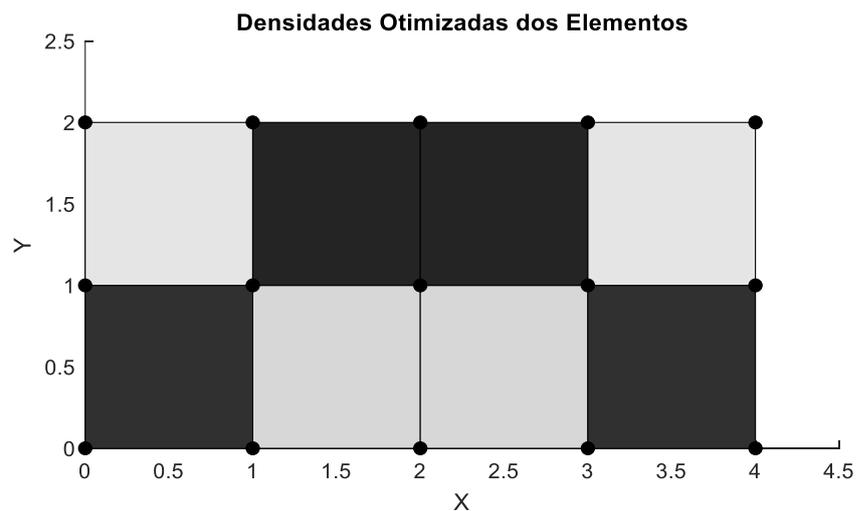


Figura 23: Densidades dos elementos após otimização.

Tabela 6: Densidades dos elementos.

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
Densidades	0,810	0,158	0,158	0,810	0,103	0,858	0,858	0,103

4.2.3 Implementação da relaxação (ϵ)

Além dos multiplicadores de Lagrange λ e o parâmetro de penalização μ , também foi implementada a ϵ -relaxação para cada *loop* de otimização do *fmincon*, obtendo os resultados conforme apresentados nas Figuras 24 e 25 e nas Tabelas 7 e 8. A estratégia de relaxação segue detalhada na Eq. (26). Foram executados 4 *loops*, onde o parâmetro de relaxação para cada um deles foi $\epsilon = 0,3$, $\epsilon = 0,2$, $\epsilon = 0,1$ e por final $\epsilon = 0,001$, permanecendo constante dentro de cada *loop*.

Com a implementação da ϵ -relaxação para cada *loop* do código, alguns elementos do modelo extrapolaram o limite de tensão, conforme Figura 24 e Tabela 7. A ϵ -relaxação auxiliou na distribuição de densidades dos elementos conforme Figura 25 e Tabela 8. Os resultados mostram que, após a implementação da ϵ -relaxação nos *loops*, alguns elementos pertencentes à estrutura final ainda ficaram com tensão acima da tensão admissível. Houve a otimização da estrutura, porém, ainda não conseguiu atingir resultados próximos a 0/1 para as variáveis de projeto por completo. Conseguiu-se uma redução de massa, alcançando uma massa final de 4,957, uma redução de 38,036% em relação ao modelo inicial, onde todos os elementos possuem densidade igual a 1.

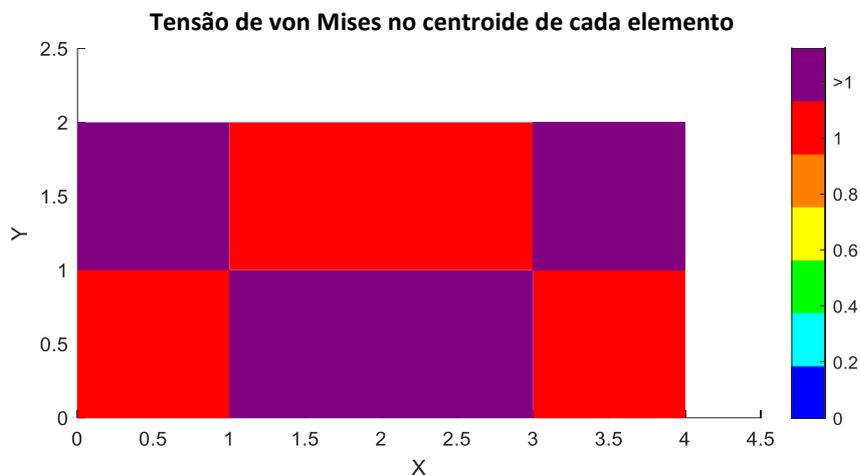


Figura 24: Tensão de von Mises no centroide de cada elemento, após implementação da relaxação.

Tabela 7: Tensão de von Mises em cada elemento.

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
Tensão de von Mises	0,964	1,171	1,171	0,964	1,008	0,931	0,931	1,008

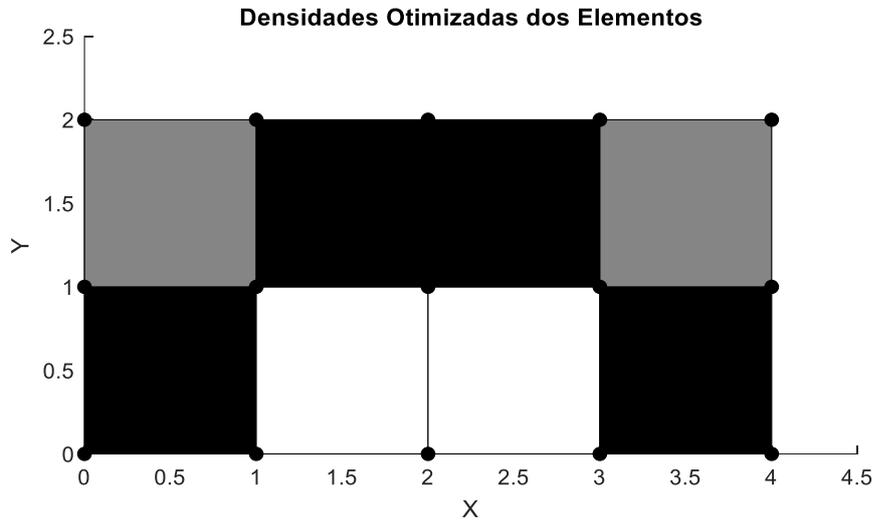


Figura 25: Densidades dos elementos após otimização.

Tabela 8: Densidades dos elementos.

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
Densidades	1	0	0	1	0,479	1	1	0,479

4.2.4 Implementação da penalização de densidades (β) e fator de ponderação adaptativo (γ)

Por fim, além dos parâmetros previamente descritos, foram implementadas a penalização de densidades intermediárias (β), conforme especificado na Eq. (29), e o fator de ponderação adaptativo (γ), conforme detalhado na Eq. (35). Essa implementação resultou na transformação da Eq. (30) para a Eq. (34), obtendo os resultados apresentados nas Figuras 26 e 27 e nas Tabelas 9 e 10.

Com a implementação da penalização de densidades intermediárias (β) e o fator de ponderação adaptativo (γ) no código, alguns elementos do modelo extrapolaram o limite de tensão, conforme Figura 26 e Tabela 9. A penalização de densidades intermediárias (β) e o fator de ponderação adaptativo (γ) auxiliaram na distribuição de densidades dos elementos conforme Figura 27 e Tabela 10. Os resultados mostram que, após a implementação da penalização de

densidades intermediárias (β) e o fator de ponderação adaptativo (γ), assim como os artifícios anteriormente descritos, todos os elementos pertencentes à estrutura final ficaram com tensão dentro do limite admissível. Houve a otimização da estrutura, atingindo resultados de 0/1 por completo, para as densidades relativas (variáveis de projeto). Conseguiu-se uma redução de massa, alcançando uma massa final de 4, uma redução de 50% em relação ao modelo inicial, onde todos os elementos possuem densidade igual a 1.

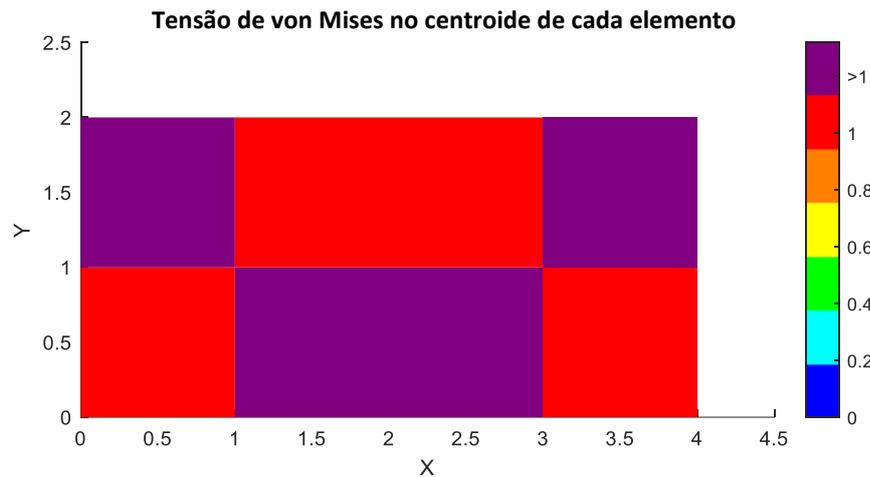


Figura 26: Tensão de von Mises no centroide de cada elemento, após implementação de β e γ .

Tabela 9: Tensão de von Mises em cada elemento.

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
Tensão de von Mises	0,978	1,058	1,058	0,978	1,430	0,978	0,978	1,430

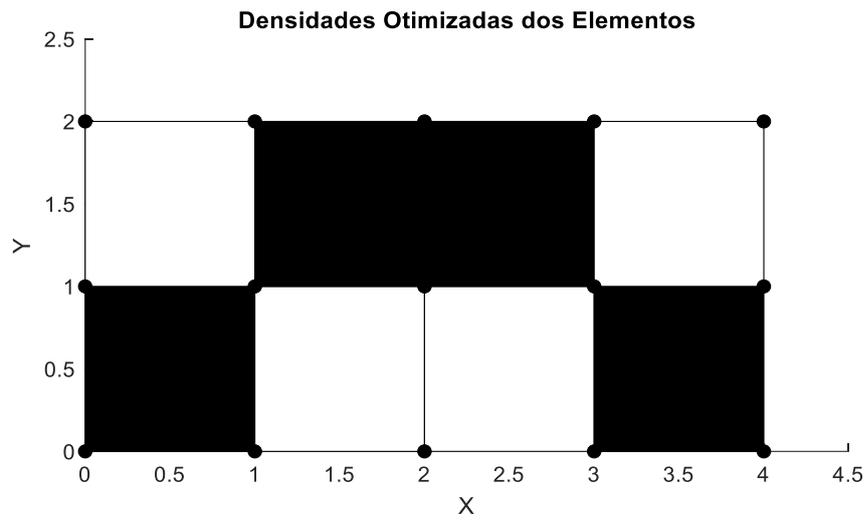


Figura 27: Densidades dos elementos após otimização.

Tabela 10: Densidades dos elementos.

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
Densidades	1	0	0	1	0	1	1	0

Evolução de resultados

A Figura 28 e a Tabela 11 apresentam a evolução das densidades dos elementos em cada *loop*.

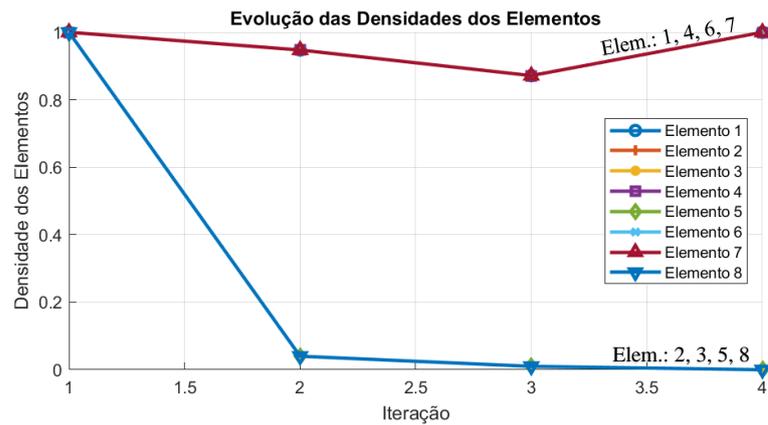


Figura 28: Evolução das densidades dos elementos, ρ .

Tabela 11: Evolução das densidades dos elementos.

Densidades	Elem. 1	Elem. 2	Elem. 3	Elem. 4	Elem. 5	Elem. 6	Elem. 7	Elem. 8
<i>Loop 1</i> ($\varepsilon=0,3$)	1	1	1	1	1	1	1	1
<i>Loop 2</i> ($\varepsilon=0,2$)	0,948	0,040	0,040	0,948	0,040	0,948	0,948	0,040
<i>Loop 3</i> ($\varepsilon=0,1$)	0,872	0,010	0,010	0,872	0,010	0,872	0,872	0,010
<i>Loop 4</i> ($\varepsilon=0,001$)	1	0	0	1	0	1	1	0

A Figura 29 apresentam a evolução da massa da estrutura em cada *loop*.

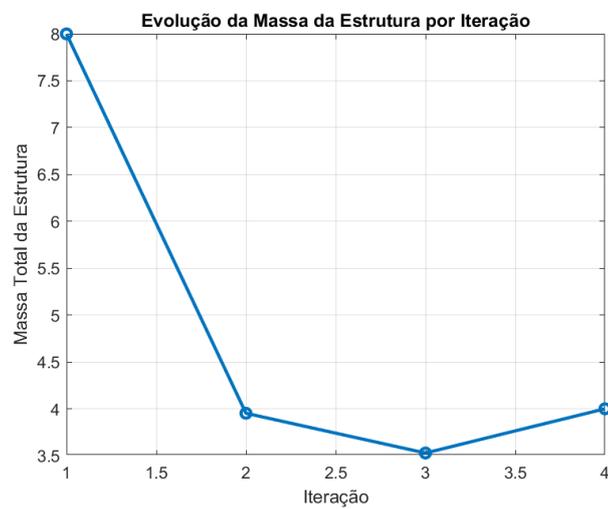


Figura 29: Evolução da massa da estrutura

A Figura 30 e a Tabela 12 apresentam a evolução das tensões de von Mises dos elementos em cada *loop*.

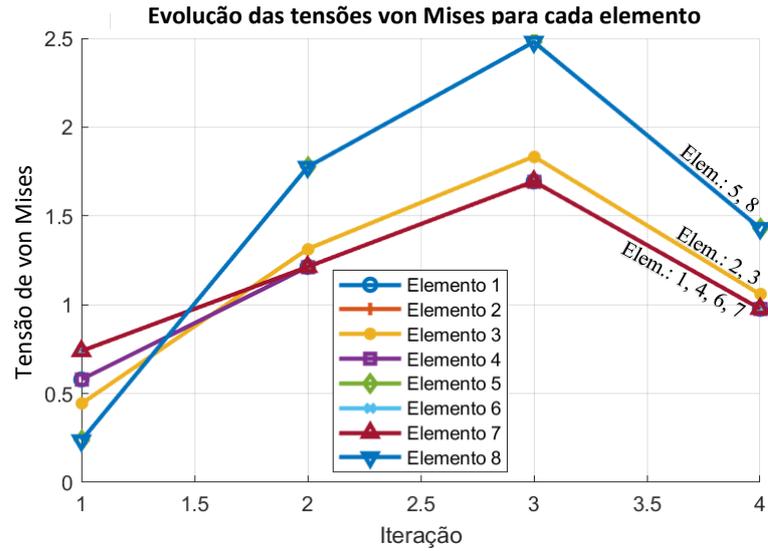


Figura 30: Evolução das tensões de von Mises de cada elemento.

Tabela 12: Evolução das Tensões de von Mises nos elementos.

Tensão de von Mises	Elem. 1	Elem. 2	Elem. 3	Elem. 4	Elem. 5	Elem. 6	Elem. 7	Elem. 8
<i>Loop 1</i> ($\varepsilon=0,3$)	0,579	0,443	0,443	0,579	0,235	0,739	0,739	0,235
<i>Loop 2</i> ($\varepsilon=0,2$)	1,213	1,313	1,313	1,213	1,775	1,213	1,213	1,775
<i>Loop 3</i> ($\varepsilon=0,1$)	1,694	1,834	1,834	1,694	2,479	1,694	1,694	2,479
<i>Loop 4</i> ($\varepsilon=0,001$)	0,978	1,058	1,058	0,978	1,430	0,978	0,978	1,430

A Figura 31 e a Tabela 13 apresentam a minimização da função objetivo em cada *loop*.

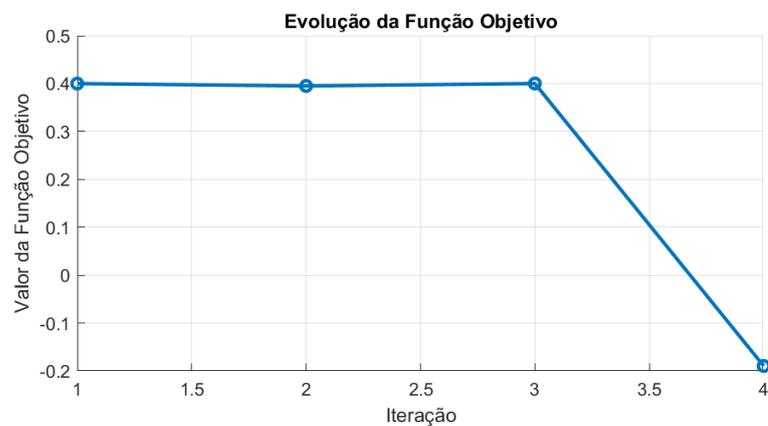
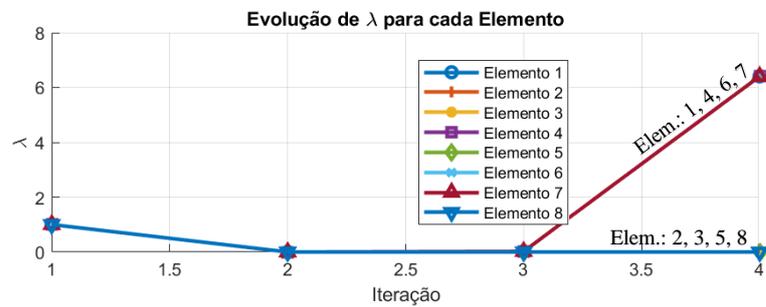


Figura 31: Evolução da função objetivo.

Tabela 13: Evolução dos valores da função objetivo.

	Função Objetivo
<i>Loop 1</i>	0,400
<i>Loop 2</i>	0,395
<i>Loop 3</i>	0,400
<i>Loop 4</i>	-0,190

A Figura 32 e a Tabela 14 apresentam a evolução dos valores dos multiplicadores de Lagrange λ , em cada *loop*.

Figura 32: Evolução dos Multiplicadores de Lagrange, λ .Tabela 14: Evolução dos valores dos Multiplicadores de Lagrange, λ .

λ	Elem. 1	Elem. 2	Elem. 3	Elem. 4	Elem. 5	Elem. 6	Elem. 7	Elem. 8
<i>Loop 1</i>	1	1	1	1	1	1	1	1
<i>Loop 2</i>	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>Loop 3</i>	0,020	0	0	0,020	0	0,020	0,020	0
<i>Loop 4</i>	6,409	0	0	6,409	0	6,409	6,409	0

A Figura 33 e Tabela 15 apresentam a evolução do parâmetro de penalização μ , em cada *loop*.

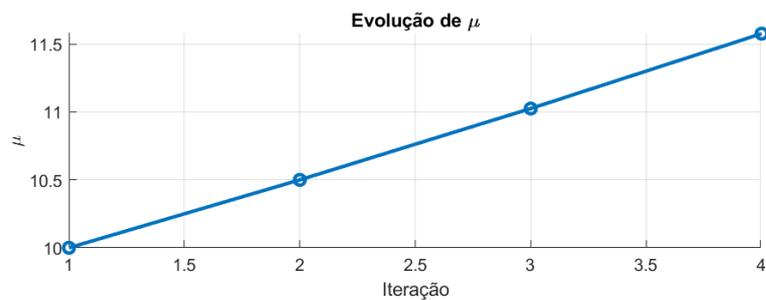
Figura 33: Evolução do parâmetro de penalização, μ .

Tabela 15: Evolução do valor do parâmetro de penalização, μ .

	μ
<i>Loop 1</i>	10
<i>Loop 2</i>	10,500
<i>Loop 3</i>	11,025
<i>Loop 4</i>	11,576

Constata-se que, com a utilização combinada de todos esses recursos descritos anteriormente na Seção 4.2, há uma tendência de gerar resultados ótimos na otimização topológica.

As Figuras 20 a 33, assim como as Tabelas 3 a 15, mostram as variações de alguns parâmetros que o código utiliza para otimização até alcançar uma topologia ótima. Cada ponto marcado nos gráficos mostra o valor do parâmetro associados ao final de dado *loop*.

4.3 Problema quadrado diagonal

Considere o problema quadrado diagonal da Figura 6, definido na Subseção 3.2.2, com 2x2 elementos e mesmas propriedades de material já especificados anteriormente. Foi realizada uma análise detalhada do comportamento de cada parâmetro de otimização dentro de cada *loop* iterativo, onde se mapearam valores obtidos.

A Figura 34 apresenta a malha do modelo e as Figuras 35 a 38 apresentam a evolução detalhada dos parâmetros multiplicadores de Lagrange λ e penalização μ , função objetivo e densidades durante a otimização.

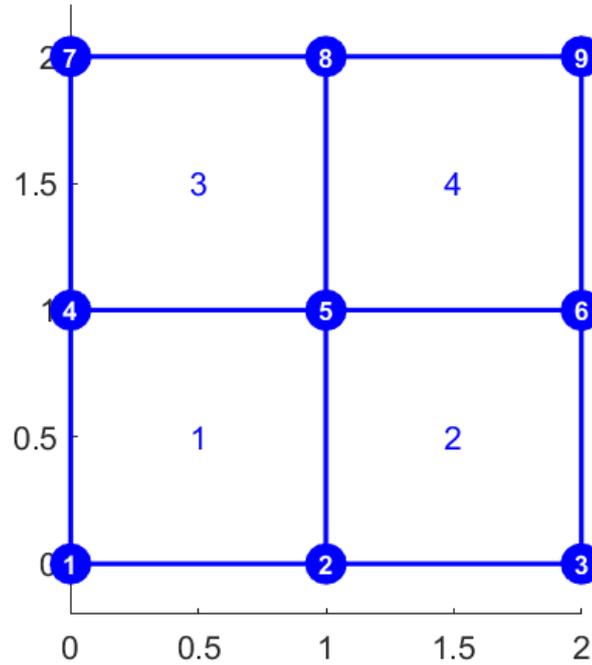


Figura 34: Malha 2x2 de elementos finitos para o problema da Figura 6. Coordenadas dos nós utilizados no problema adimensional.

Os multiplicadores de Lagrange, λ , iniciaram com o valor igual a 1 e ao final da otimização se encontraram os valores $\lambda_2 = 3,535$ e $\lambda_3 = 0$, conforme Figura 35(a). O parâmetro de penalização, μ , iniciou com o valor de 10 e finalizou em 11,576, conforme Figura 35(b).

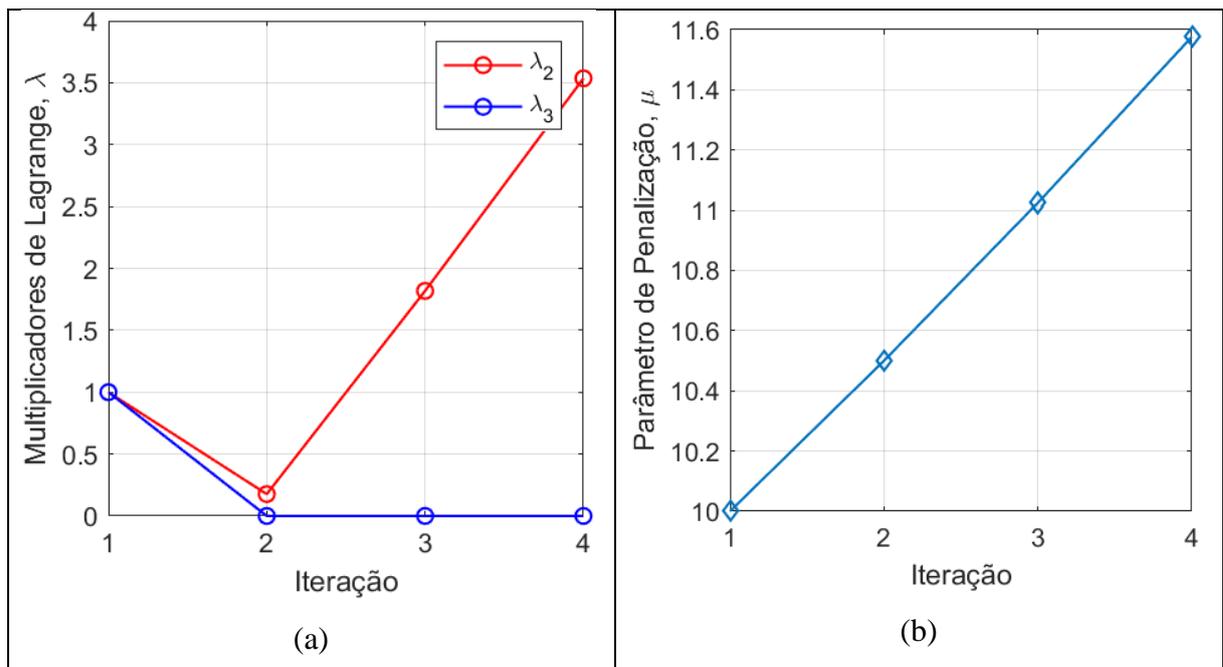


Figura 35: (a) Evolução dos multiplicadores de Lagrange, λ . (b) parâmetro de penalização, μ .

A Figura 36 mostra a evolução detalhada da função objetivo, que se inicia com o valor de 1,049 e termina em 0,151.

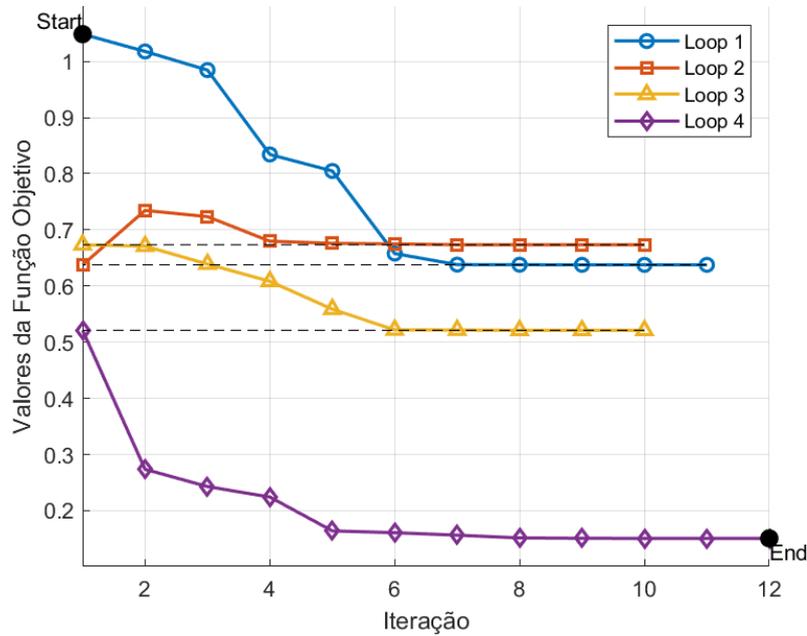


Figura 36: Evolução detalhada da função objetivo, para cada *loop*.

A densidade do elemento 2 inicia com $\rho_2 = 0,4$ e, após a otimização, atinge o valor de 0,688. A densidade do elemento 3 inicia com $\rho_3 = 0,6$ e termina em 0, conforme mostrado na Figura 37.

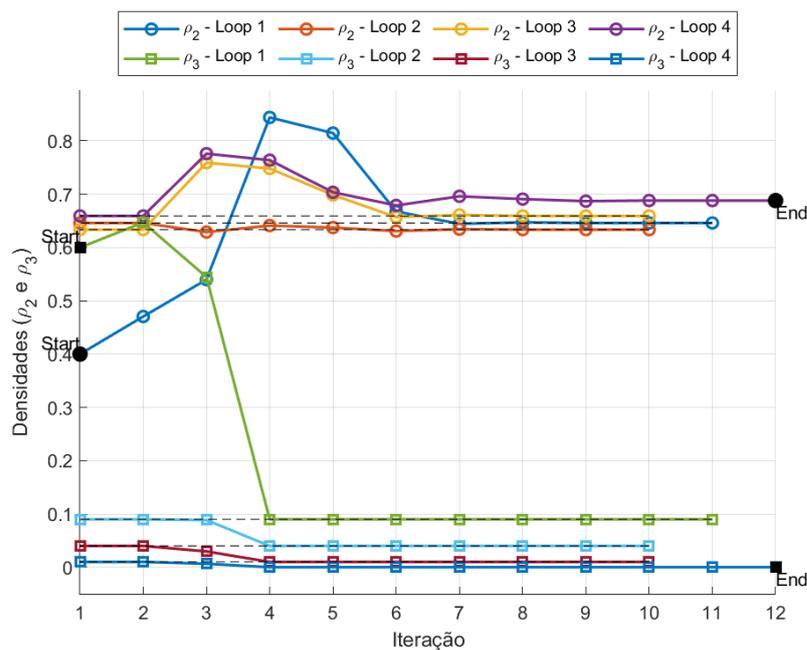


Figura 37: Evolução detalhada das densidades dos elementos, ρ , para cada *loop*.

A Figura 38 mostra o gráfico já descrito anteriormente na Figura 7, incluindo a evolução do código desenvolvido no espaço de projeto, em busca de um ponto ótimo, em cada *loop* executado. Cada *loop* é apresentado com uma cor diferente.

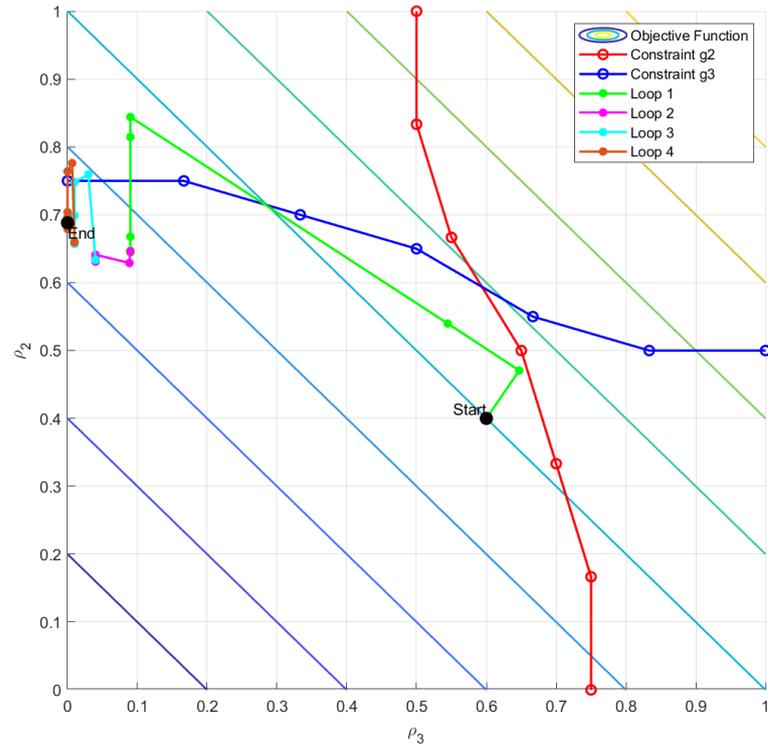


Figura 38: Busca do ponto ótimo, para cada *loop*.

Nos resultados das Figuras 35 a 38, a relaxação está ativa, e o parâmetro ε varia conforme Tabela 16, relaxando cada vez menos a cada *loop* executado.

Tabela 16: Relação entre *loop* e os valores ε .

<i>loop</i>	ε
1	0,3
2	0,2
3	0,1
4	0,001

A Figura 39 apresenta a topologia final da estrutura após a otimização.

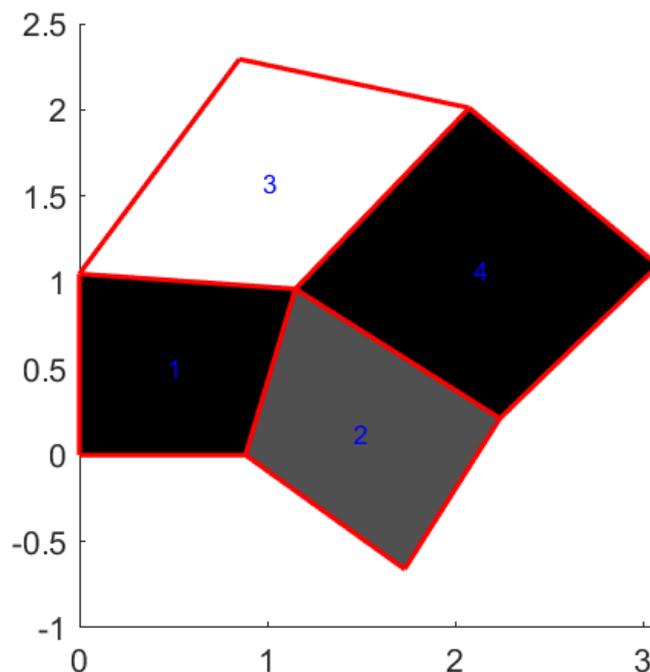


Figura 39: Topologia final (posição deformada).

Verificou-se nesta análise, utilizando como referência os parâmetros medidos e plotados, que o código efetivamente minimiza a massa. Na solução obtida, tenta-se alcançar um dos dois valores ótimos apresentados anteriormente na Figura 7. Para isto, o código varia os parâmetros λ e μ , Figura 35. Esta busca pelo ótimo pode ser vista na Figura 38. A Figura 39 apresenta a topologia final, assim como a forma deformada da estrutura sob ação do carregamento externo.

4.4 Problema de duas barras

Nesta seção, o código desenvolvido neste trabalho é avaliado utilizando o problema de duas barras. Hassani e Hinton (1998) e Suzuki e Kikuchi (1991) realizara estudos de casos similares, com a diferença de que estes adotam a minimização da flexibilidade média, enquanto que as análises realizadas utilizando código e metodologia aqui desenvolvida aplica-se a otimização topológica com restrições de tensão. Embora existam diferenças nos métodos e modelos, os resultados obtidos com o código desenvolvido convergem para soluções topológicas similares às observadas nesses estudos, corroborando a eficácia da metodologia proposta neste capítulo. Essa similaridade indica que, apesar das variações metodológicas, as soluções otimizadas atendem aos requisitos estruturais desejados, oferecendo uma base de validação comparativa para os resultados alcançados.

Considera-se o problema de projeto de topologia ótica do domínio estrutural da Figura 40. O resultado em geral esperado é uma topologia que remete a uma treliça de duas barras. Foram realizados testes no problema de otimização associado ao modelo, para estudar o comportamento do código desenvolvido. O objetivo dos testes a seguir é avaliar a influência de diferentes parâmetros nos resultados, tais como o filtro de densidades, a magnitude da força aplicada, a tensão admissível do material, bem como a intensidade da penalização das densidades intermediárias. Esses aspectos são importantes para compreender a relação destes parâmetros com a topologia final.

Os dados de entrada para as análises são:

- **Dimensões (adimensionais):** $4 \times 8 \times 1$ (comprimento \times altura \times espessura);
- **Malha (quantidade de elementos):** 12×24 (comprimento \times altura) = 288 elementos;
- **Dimensões dos elementos finitos:** $0,333 \times 0,333$ (comprimento \times altura);
- **Massa Inicial:** 32;
- **Propriedades do material (adimensional):** $E = 1$, $\nu = 0,3$, $\sigma_{adm} = 1$;
- **Condições de contorno:** Engastado na extremidade esquerda;
- **Parâmetros de otimização:** Número máximo de *loops* = 4, $p = 3$, valores iniciais de $\epsilon = 0,3$, $\rho = 1$, $\gamma = 0,1$, $\lambda = 1$ e $\mu = 10$. Penalização de densidades (β): 0, 1, 3 e 5;

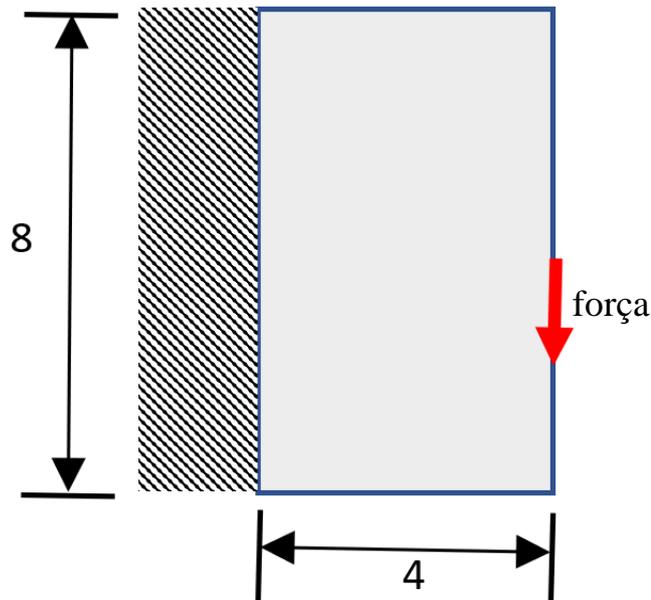


Figura 40: Problema do projeto ótico “duas barras”.

4.4.1 Variação do raio mínimo de influência do filtro de densidades (r_{min})

Nesta seção é testada a influência do filtro de densidades, aliado à penalização de densidades intermediárias, no domínio da Figura 40. O raio mínimo de influência (r_{min}) é um parâmetro importante na otimização topológica, pois determina a área de densidades de elementos para a densidade de cada elemento finito, conforme Eq. (27). Isto afeta a distribuição de material.

Para esta análise será aplicada uma força de 0,2 de magnitude, conforme Figura 40.

Os resultados obtidos para as variações de r_{min} estudadas são mostradas na Figura 41 e na Tabela 17.

Figura 41: Resultado (distribuição de material) do problema de duas barras devido a variação de r_{min} . (continua)

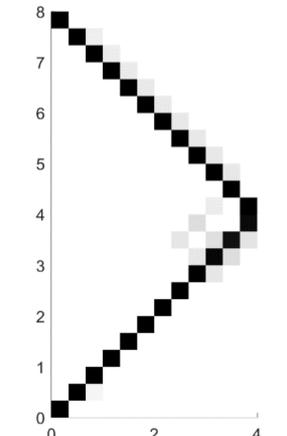
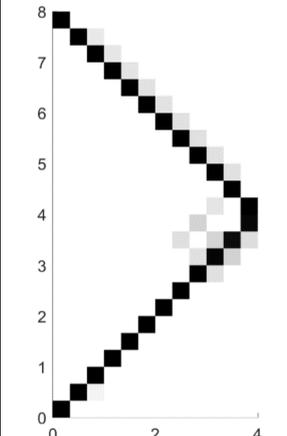
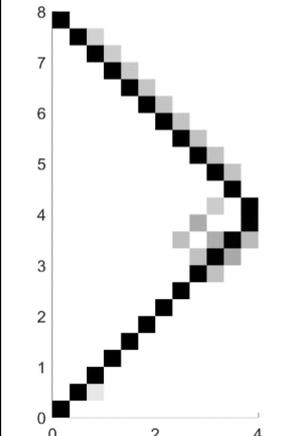
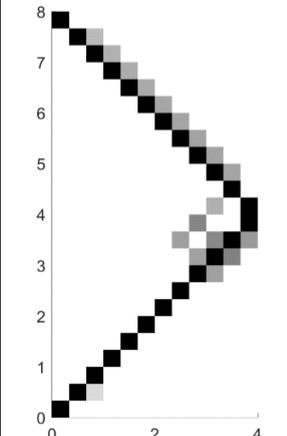
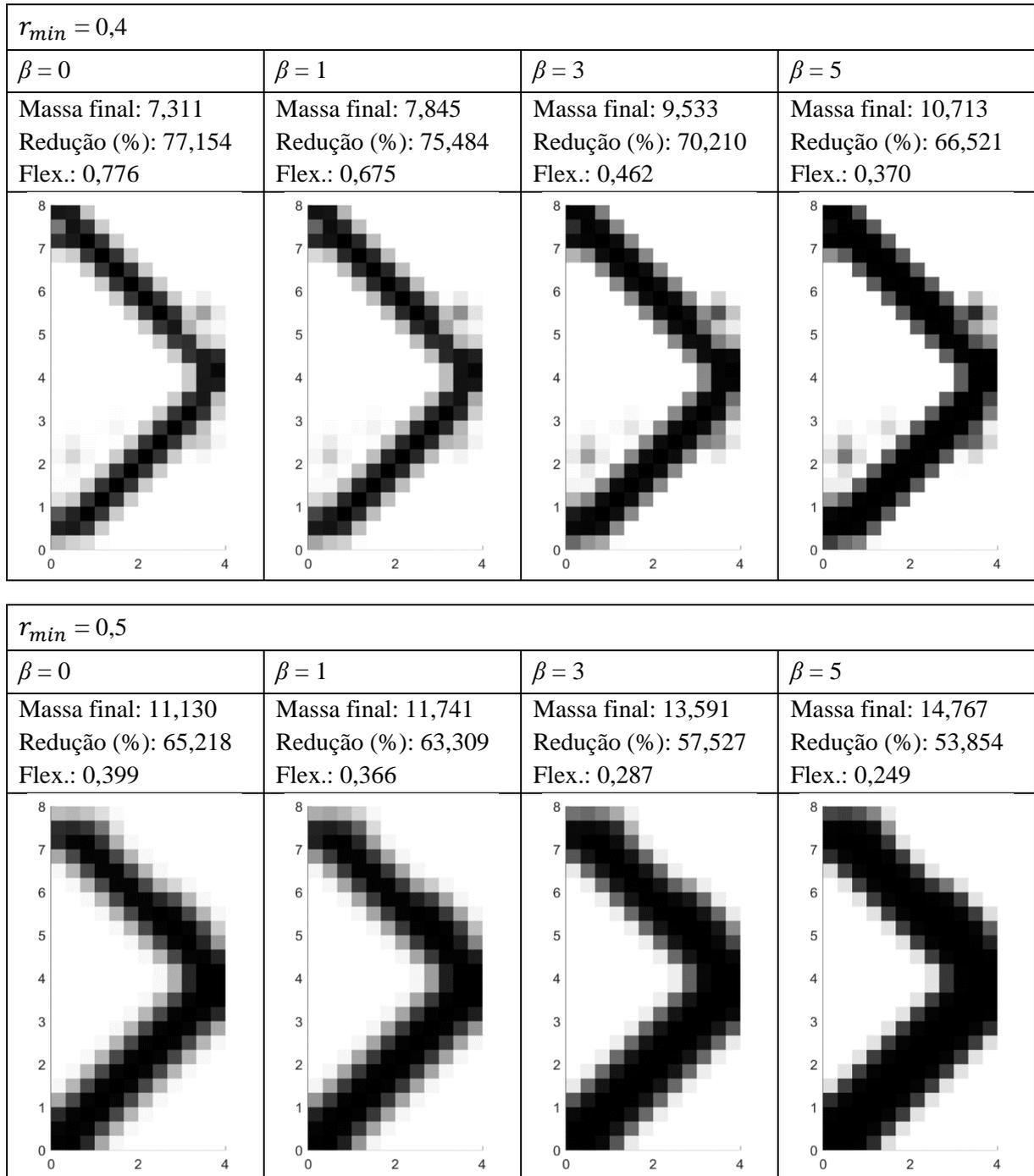
$r_{min} = 0,2$			
$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 3$	$\beta = 5$
Massa final: 2,826 Redução (%): 91,167 Flex.: 0,980	Massa final: 2,888 Redução (%): 90,977 Flex.: 0,972	Massa final: 3,132 Redução (%): 90,211 Flex.: 0,957	Massa final: 3,370 Redução (%): 89,468 Flex.: 0,949
			

Figura 41 (continuação)



Cada um destes problemas acima foi processado em um tempo aproximado de 20 minutos.

Tabela 17: Comparativo de resultados do problema de 2 barras devido a variação de r_{min} .

r_{min}	β	Massa Final	Porcentagem de Redução (%)*	Flexibilidade
0,2	0	2,827	91,167	0,980
	1	2,888	90,977	0,972
	3	3,132	90,211	0,957
	5	3,370	89,468	0,949
0,4	0	7,311	77,154	0,776
	1	7,845	75,484	0,675
	3	9,533	70,210	0,462
	5	10,713	66,521	0,370
0,5	0	11,130	65,218	0,399
	1	11,741	63,309	0,366
	3	13,591	57,527	0,287
	5	14,767	53,854	0,249

* Porcentagem de Redução (%) – é a comparação entre o valor da massa inicial (onde todos os elementos possuem densidade igual a 1) e a massa final.

Quanto à massa final e seu percentual de redução em relação ao projeto inicial, aumentos no valor de r_{min} resultaram em um aumento na massa final da estrutura. Isto sugere que um maior r_{min} leva a estruturas mais reforçadas, mas menos otimizadas em termos de material utilizado. Além disso, o aumento de β que, eleva a penalização das densidades intermediárias, forçando os elementos a adotarem valores próximos a 0 (vazio) ou 1 (sólido). Esse efeito favorece a formação de regiões sólidas mais extensas, resultando em um aumento da massa total da estrutura. A flexibilidade média diminui com o aumento de r_{min} e de β , conseqüentemente, as tendências observadas são consistentes.

Destaca-se que, para todos os projetos obtidos, foi respeitada a tensão admissível do material, em todos os elementos. Sendo assim, de um ponto de vista prático, pode-se pensar que os melhores projetos seriam aqueles com melhor resolução (menos elementos cinzas com densidades intermediárias, mais pretos e brancos), menor massa e possibilidade de eventual fabricação.

4.4.2 Variação de magnitude da força aplicada

Nesta seção, é testada a influência da magnitude da força aplicada, aliado à penalização de densidades intermediárias, no domínio da Figura 40. A força aplicada afeta diretamente a distribuição de tensões, e conseqüentemente a distribuição de material na estrutura.

Para esta análise será usado um raio mínimo de influência de (r_{min}) 0,4.

Os resultados obtidos para as variações de magnitude de força aplicada estudadas são mostrados na Figura 42 e na Tabela 18.

Figura 42: Resultados (distribuição de material) do problema de duas barras devido a variação de força. (continua)

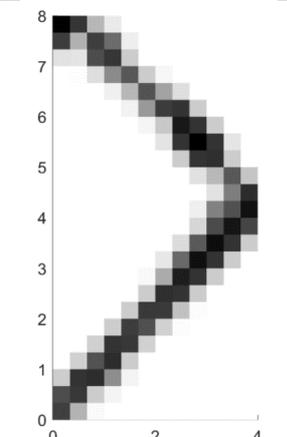
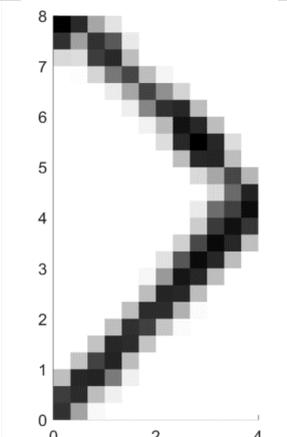
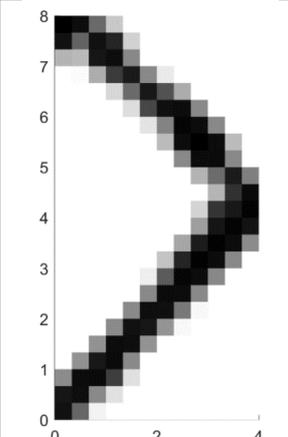
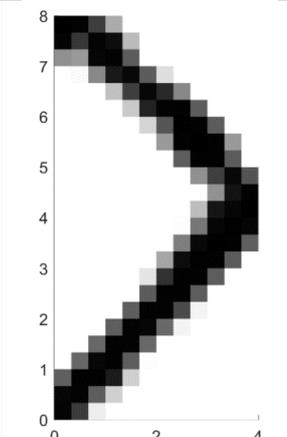
Força: 0,1			
$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 3$	$\beta = 5$
Massa final: 5,350 Redução (%): 83,280 Flex.: 0,470	Massa final: 5,897 Redução (%): 81,571 Flex.: 0,353	Massa final: 7,594 Redução (%): 76,270 Flex.: 0,181	Massa final: 8,731 Redução (%): 72,714 Flex.: 0,129
			

Figura 42 (continuação)

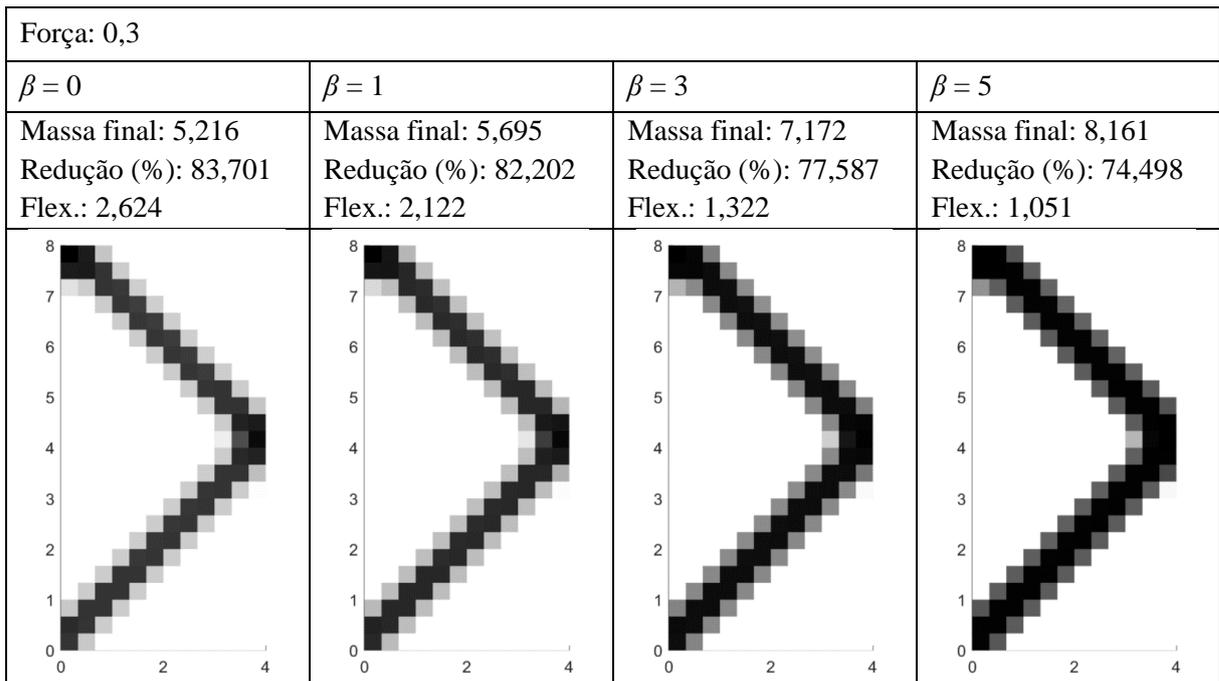
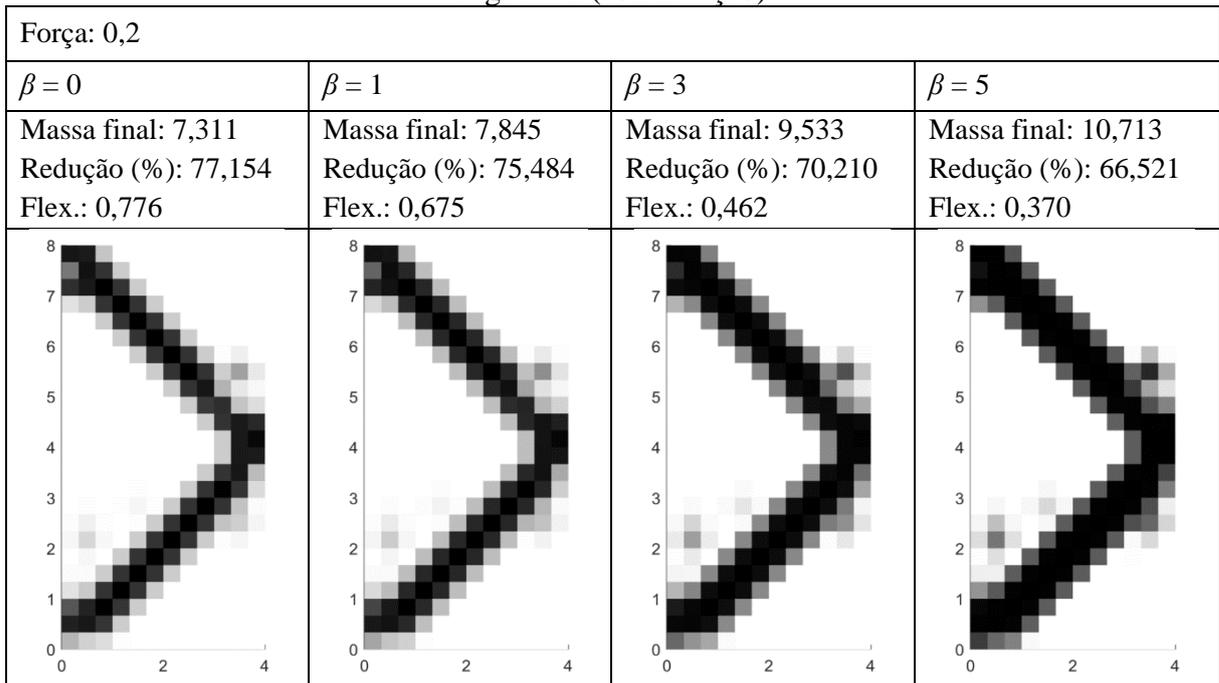
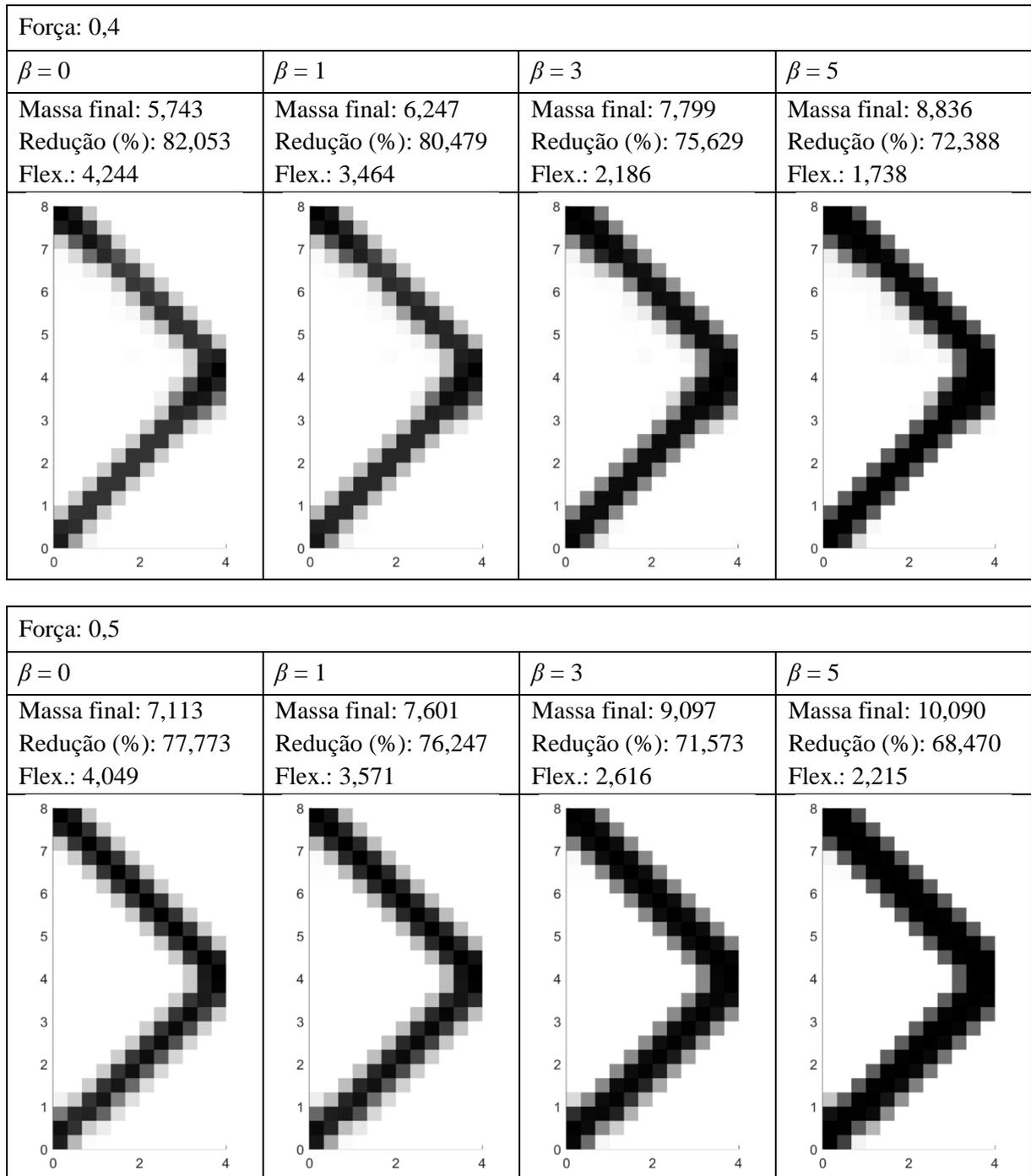


Figura 42 (continuação)



Cada um destes problemas acima foi processado em um tempo aproximado de 20 minutos.

Tabela 18: Comparativo de resultados do problema de duas barras devido a variação de magnitude de força.

Força	β	Massa Final	Porcentagem de Redução (%)*	Flexibilidade
0,1	0	5,351	83,280	0,470
	1	5,897	81,571	0,353
	3	7,594	76,270	0,181
	5	8,732	72,714	0,129
0,2	0	7,311	77,154	0,776
	1	7,845	75,484	0,675
	3	9,533	70,210	0,462
	5	10,713	66,521	0,370
0,3	0	5,216	83,701	2,624
	1	5,695	82,202	2,122
	3	7,172	77,587	1,322
	5	8,161	74,498	1,051
0,4	0	5,743	82,053	4,244
	1	6,247	80,479	3,464
	3	7,799	75,629	2,186
	5	8,836	72,388	1,738
0,5	0	7,113	77,773	4,049
	1	7,601	76,247	3,571
	3	9,097	71,573	2,616
	5	10,090	68,470	2,215

* Porcentagem de Redução (%) – é a comparação entre o valor da massa inicial (onde todos os elementos possuem densidade igual a 1) e a massa final.

Em relação à massa final e à sua redução percentual em comparação ao projeto inicial, observou-se que aumentos na magnitude da força resultante levaram a um incremento na massa final da estrutura. Isso indica que forças de maior magnitude exigem estruturas mais robustas, mas menos eficientes no uso de material. Além disso, verificou-se que a flexibilidade média aumenta à medida que a magnitude da força cresce e diminui com o aumento do parâmetro β . Assim, as tendências identificadas mostram-se coerentes e consistentes com o comportamento esperado.

Desse modo, sob uma perspectiva prática, os projetos ideais seriam aqueles com maior definição (menos elementos com densidades intermediárias e mais regiões sólidas ou vazias), menor massa e viabilidade para eventual fabricação.

Destaca-se que, para todos os projetos obtidos, foi respeitada a tensão admissível do material, em todos os elementos.

4.4.3 Variação da tensão admissível do material

Nesta seção, é testada a influência do limite de tensão de falha no domínio da Figura 40. A tensão admissível do material (σ_{adm}) afeta diretamente a distribuição de material e a otimização da estrutura. Os dados específicos para esta análise são:

- **Força aplicada:** 0.5 (magnitude na Figura 40);
- **Raio mínimo de influência (r_{min}):** 0,4.
- **Penalização de densidades (β):** 0;

Os resultados obtidos para as variações da tensão admissível do material estudadas são mostradas na Figura 43 e na Tabela 19.

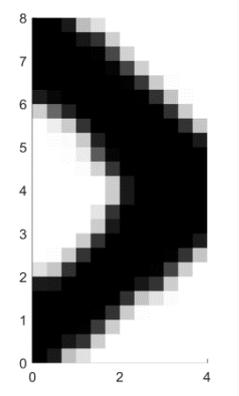
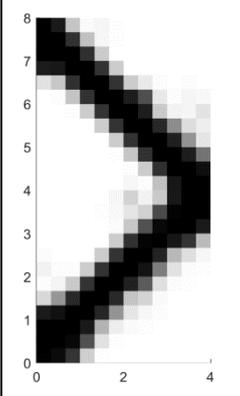
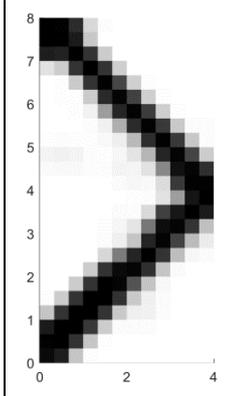
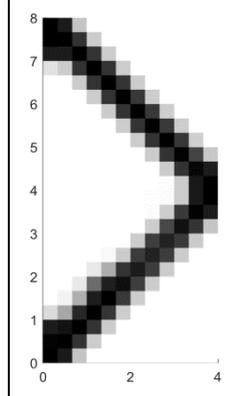
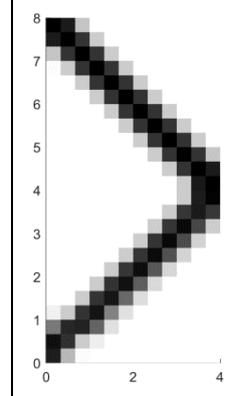
$\sigma_{adm} = 0,2$	$\sigma_{adm} = 0,4$	$\sigma_{adm} = 0,6$	$\sigma_{adm} = 0,8$	$\sigma_{adm} = 1$
Massa final: 17,807 Redução (%): 44,353 Flex.: 1,264	Massa final: 11,031 Redução (%): 65,528 Flex.: 2,144	Massa final: 8,851 Redução (%): 72,341 Flex.: 3,048	Massa final: 7,773 Redução (%): 75,709 Flex.: 3,509	Massa final: 7,113 Redução (%): 77,773 Flex.: 4,049
				

Figura 43: Resultado (distribuição de material) do problema de duas barras devido a variação da tensão admissível (σ_{adm}).

Cada um destes problemas acima foi processado em um tempo aproximado de 16 minutos.

Tabela 19: Comparativo de resultado do problema de duas barras devido a variação da tensão admissível (σ_{adm}).

σ_{adm}	Massa Final	Porcentagem de Redução (%)*	Flexibilidade
0,2	17,807	44,353	1,264
0,4	11,031	65,528	2,144
0,6	8,851	72,341	3,048
0,8	7,773	75,709	3,509
1	7,113	77,773	4,049

* Porcentagem de Redução (%) – é a comparação entre o valor da massa inicial (onde todos os elementos possuem densidade igual a 1) e a massa final.

Quanto à massa final e seu percentual de redução em relação ao projeto inicial, variações no valor tensão admissível do material resultaram em mudanças na massa final da estrutura. Isto sugere que uma tensão admissível maior leva a estruturas mais flexíveis, mas mais otimizadas em termos de material utilizado. A flexibilidade média aumenta com o aumento da tensão admissível, sendo estes resultados consistentes com as tendências observadas.

Sendo assim, de um ponto de vista prático, pode-se pensar que os melhores projetos seriam aqueles com melhor resolução (menos elementos cinzas com densidades intermediárias, mais pretos e brancos), menor massa e possibilidade de eventual fabricação.

Ressalta-se que, em todos os projetos gerados, a tensão admissível do material foi atendida em todos os elementos estruturais.

4.5 Viga MBB

Nesta seção, são mostrados resultados de otimização de topologia com restrições de tensão, que também são comparados com resultados de topologias para flexibilidade média.

Nas comparações, foram utilizados modelos estruturais iguais em termos de dimensões, variáveis de densidade, condições de contorno e forças aplicadas. Foi otimizado o modelo MBB da Figura 44, usando códigos e metodologias diferentes. Especificamente, para resolver o problema de minimização de massa com restrições de tensão, foi utilizado código e metodologia

aqui desenvolvida, e para resolver o problema clássico de minimização de flexibilidade média (mostrado na Seção 2.2.1), foi empregado o código “99 lines” (Sigmund, 2001).

Para assegurar uma base comparativa consistente, além dos dados iguais necessários para entrada em ambos os códigos, a fração de volume obtida por meio do código desenvolvido neste trabalho foi utilizada como dado de entrada no código “99 lines”.

Durante a execução, variaram-se as magnitudes das forças aplicadas aos modelos, possibilitando uma comparação detalhada dos resultados obtidos. Essa abordagem permitiu avaliar a consistência e a precisão dos métodos de otimização topológica e de análise de elementos finitos implementados, estudando variações nos parâmetros que influenciam os resultados.

Os dados de entrada para a análise são:

- **Dimensões:** 25 x 10 x 1 (comprimento x altura x espessura);
- **Malha (quantidade de elementos):** 25 x 10 (comprimento x altura) = 250 elementos;
- **Dimensões dos elementos finitos:** 1 x 1 (comprimento x altura);
- **Massa inicial:** 250;
- **Propriedades do material (adimensional):** $E = 1$, $\nu = 0,3$, $\sigma_{adm} = 1$;
- **Condições de contorno:** Simetria na extremidade esquerda, último nó inferior na extremidade direita com deslocamento livre em x;
- **Parâmetros de otimização:** Número máximo de *loops* = 4, $p = 3$, $\beta = 3$, $r_{min} = 1,45$, valores iniciais de $\varepsilon = 0,3$, $\rho = 1$, $\gamma = 0,1$, $\lambda = 1$ e $\mu = 10$.

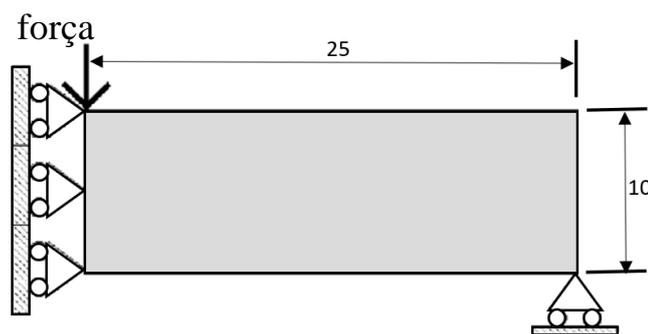


Figura 44: Problema do projeto ótimo MBB.

Os resultados comparativos obtidos para as variações da força aplicada estudadas são mostrados na Figura 45 e na Tabela 20. Verifica-se que a massa final de ambos os modelos se manteve similares em casos de mesma magnitude de força, conforme imposto. Porém, pode-se ver que as tensões nos elementos nos resultados do “99 lines” alcançam valores mais altos, e

alguns deles ultrapassam o valor de 1 (elementos com cor roxa), pois neste código não é estipulada uma tensão limite admissível, σ_{adm} .

Figura 45: Resultado do problema de Viga MBB – código desenvolvido x “99 lines”. (continua)

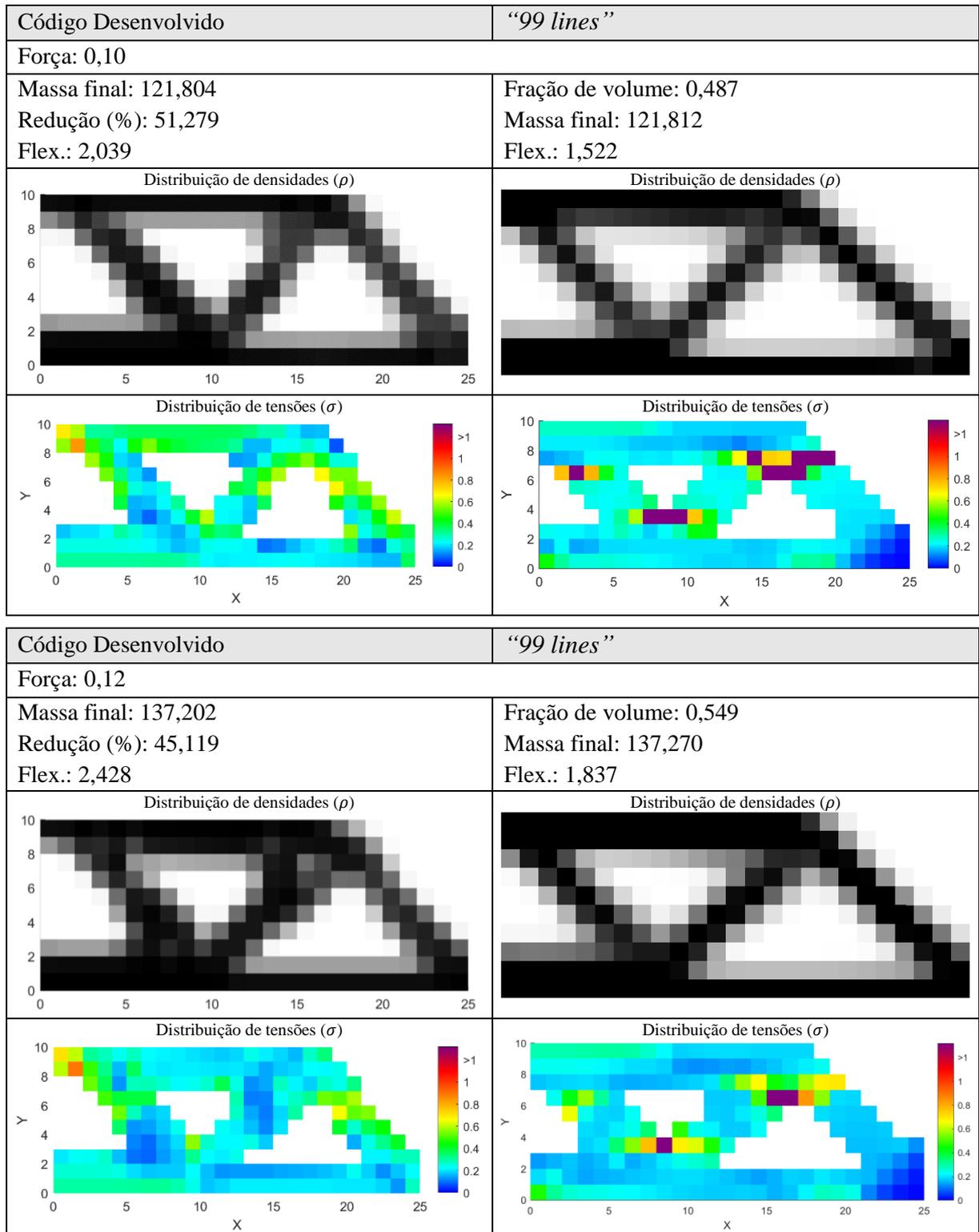


Figura 45 (continuação)

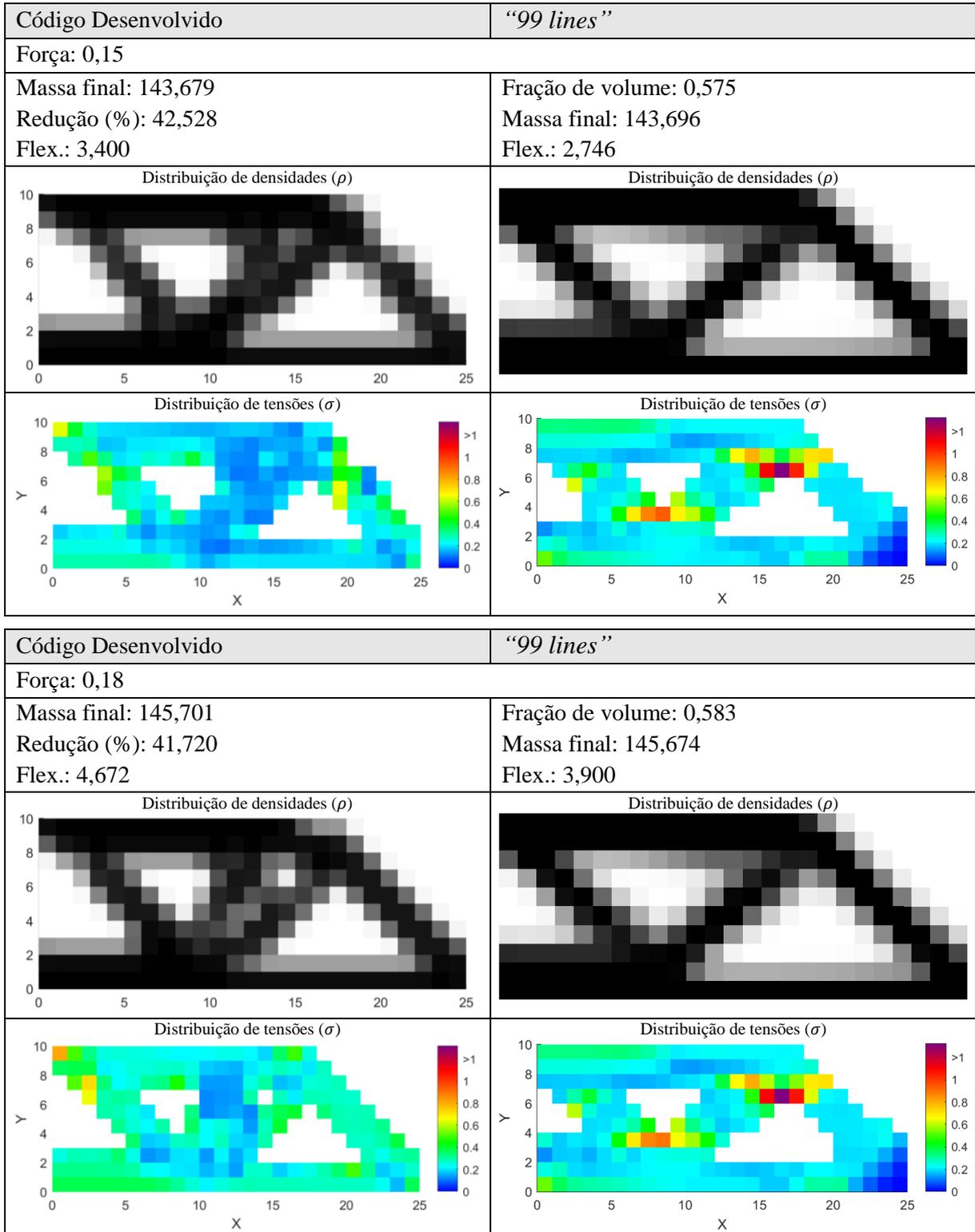
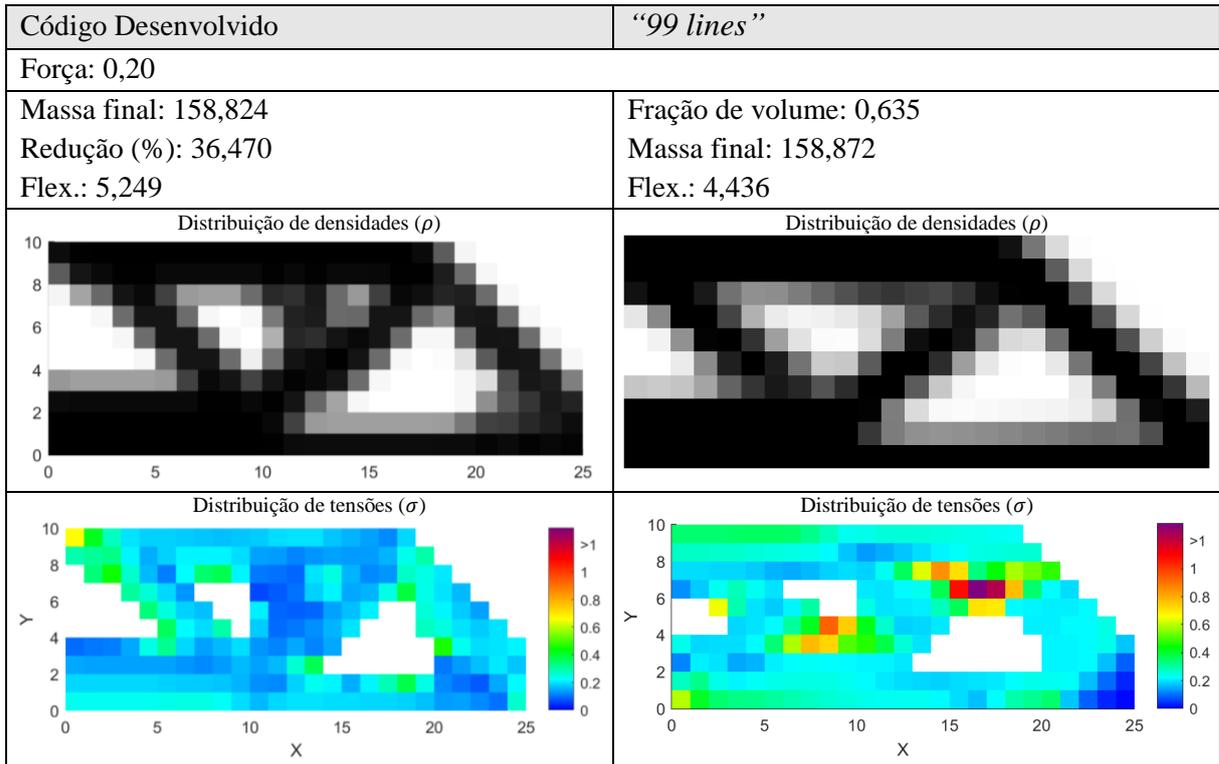


Figura 45 (continuação)



Cada um dos problemas com restrições de tensão foi processado em um tempo aproximado de 16 minutos, enquanto que os problemas de flexibilidade média levaram cerca de 6 segundos no mesmo equipamento.

Tabela 20: Comparativo dos resultados do problema MBB.

Força Aplicada	Código Desenvolvido		"99 lines"	
	Massa Final	Flexibilidade	Massa Final	Flexibilidade
0,1	121,804	2,039	121,812	1,522
0,12	137,202	2,428	137,270	1,837
0,15	143,679	3,400	143,696	2,746
0,18	145,701	4,672	145,674	3,901
0,2	158,824	5,249	158,872	4,436

Os resultados reafirmaram a tendência observada anteriormente: o aumento na força aplicada resulta em um aumento da massa final e da flexibilidade média. Além disso, todos os elementos das topologias geradas pelo código desenvolvido respeitam o critério de tensões estabelecido. Observou-se que a flexibilidade média das topologias geradas pelo código "99

lines" tende a ser menor em comparação às geradas pelo código desenvolvido, uma vez que o objetivo do "*99 lines*" é minimizar a flexibilidade média, enquanto o código desenvolvido tem como objetivo principal a minimização da massa.

4.6 Viga cantilever (engastada-livre)

Nesta seção, a mesma metodologia de comparação de resultados para minimização de massa sob restrições de tensão e para minimização de flexibilidade sob restrição de volume da Seção 4.5 foi empregada para estudar o problema de uma viga cantilever, ilustrada na Figura 46. O código utilizado para resolução deste problema clássico de minimização de flexibilidade média foi adaptado do código "*99 lines*" (Sigmund, 2001), modificando o posicionamento da força e o tipo de condições de contorno. Esta análise tem como objetivo verificar se diferentes modelos, em comparação aos estudados anteriormente, podem apresentar variações nos resultados.

Os dados de entrada para a análise são:

- **Dimensões (adimensionais):** 24 x 15 x 1 (comprimento x altura x espessura);
- **Malha (quantidade de elementos):** 24 x 15 (comprimento x altura) = 360 elementos;
- **Dimensões dos elementos finitos:** 1 x 1 (comprimento x altura);
- **Massa inicial:** 360;
- **Propriedades do material (adimensional):** $E = 1$, $\nu = 0,3$, $\sigma_{adm} = 1$;
- **Condições de contorno:** Engastado na extremidade esquerda;
- **Parâmetros de otimização:** Número máximo de *loops* = 4, $p = 3$; $\beta = 3$, $r_{min} = 1,5$, valores iniciais de $\varepsilon = 0,3$, $\rho = 1$, $\gamma = 0,1$, $\lambda = 1$ e $\mu = 10$.

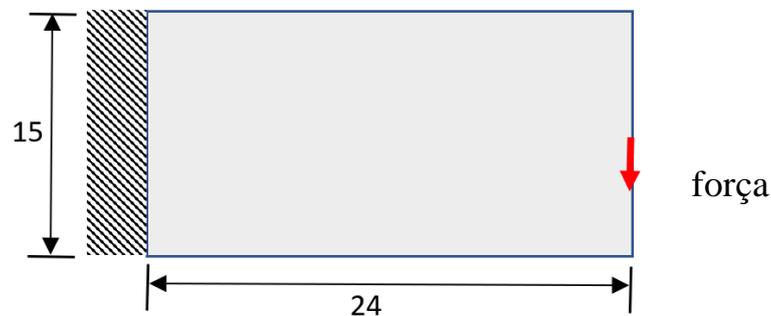


Figura 46: Problema do projeto ótimo cantilever (viga engastada-livre).

Os resultados comparativos obtidos para as variações da força aplicada estudadas são mostrados na Figura 47 e na Tabela 21. Verifica-se que as massas finais de ambos os modelos são similares em todos os casos, porém, pode-se ver que as tensões nos elementos do código “99 lines” alcançam valores mais altos, pois o problema de minimização da flexibilidade média não tem compromisso em respeitar limites de tensão locais.

Figura 47: Resultado do problema cantilever – código desenvolvido x “99 lines”. (continua)

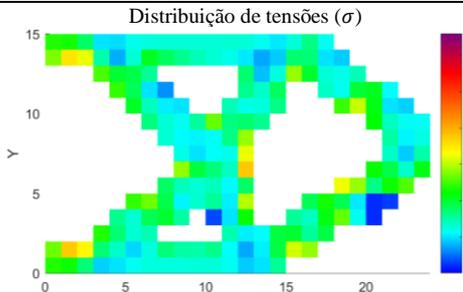
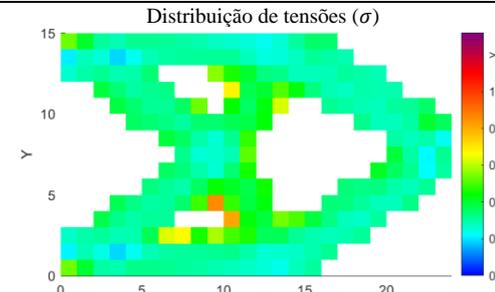
Código Desenvolvido	“99 lines”
Força: 0,10 (dividido em 2 nós)	
Massa final: 131,626 Redução (%): 59,101 Flex.: 1,189	Fração de volume: 0,409 Massa final: 147,1626 Flex.: 0,6407
Distribuição de densidades (ρ) 	Distribuição de densidades (ρ) 
Distribuição de tensões (σ) 	Distribuição de tensões (σ) 

Figura 47 (continuação)

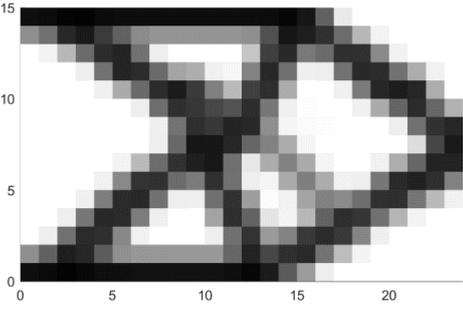
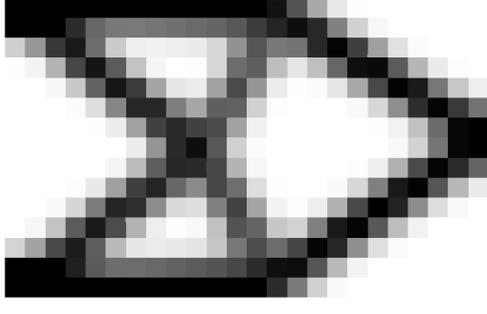
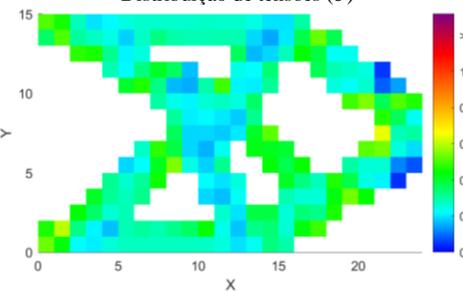
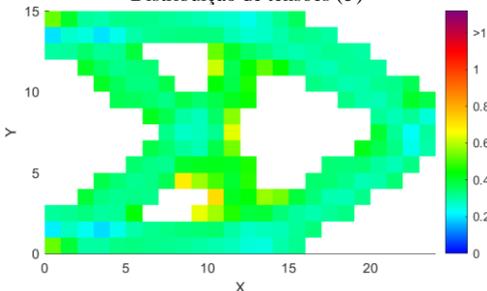
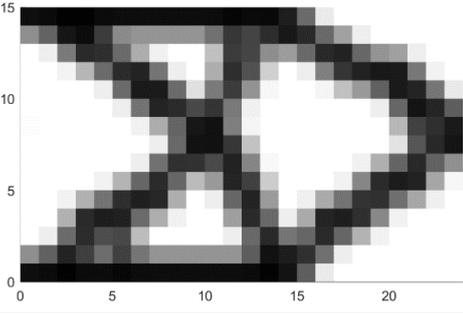
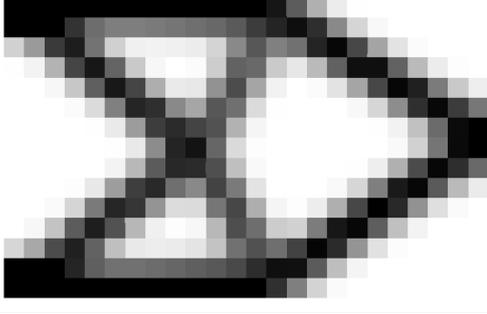
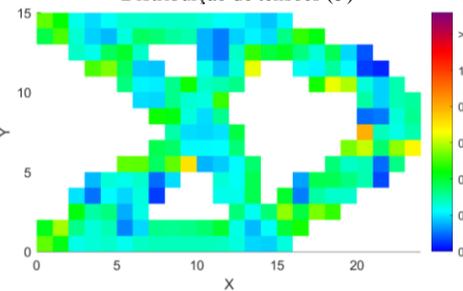
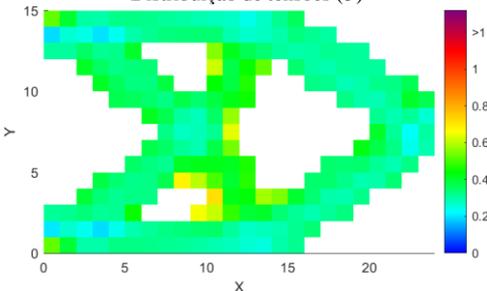
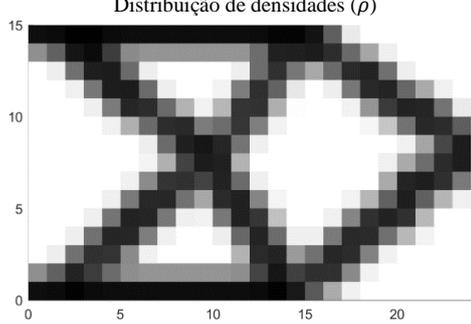
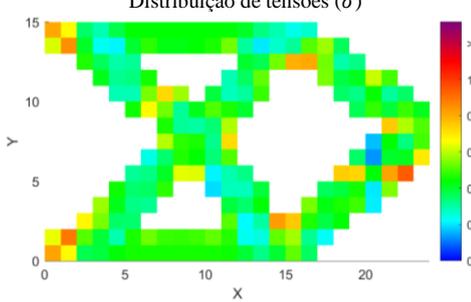
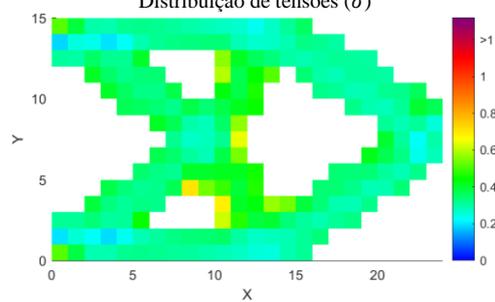
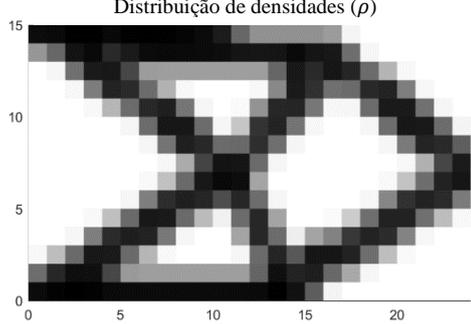
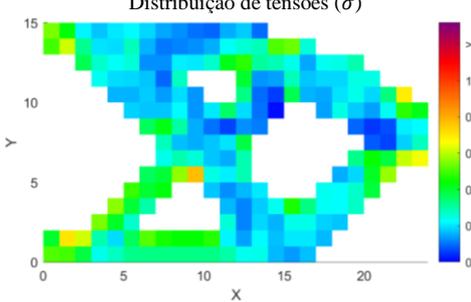
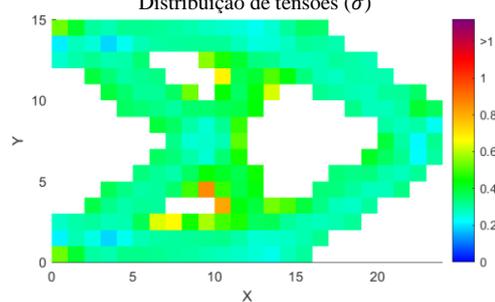
Código Desenvolvido		"99 lines"	
Força: 0,12 (dividido em 2 nós)			
Massa final: 141,881 Redução (%): 60,589 Flex.: 1,429		Fração de volume: 0,394 Massa final: 142,021 Flex.: 0,984	
Distribuição de densidades (ρ) 		Distribuição de densidades (ρ) 	
Distribuição de tensões (σ) 		Distribuição de tensões (σ) 	
Código Desenvolvido		"99 lines"	
Força: 0,14 (dividido em 2 nós)			
Massa final: 140,232 Redução (%): 61,047 Flex.: 1,926		Fração de volume: 0,390 Massa final: 140,164 Flex.: 1,371	
Distribuição de densidades (ρ) 		Distribuição de densidades (ρ) 	
Distribuição de tensões (σ) 		Distribuição de tensões (σ) 	

Figura 47 (continuação)

Código Desenvolvido		"99 lines"	
Força: 0,15 (dividido em 2 nós)			
Massa final: 139,344 Redução (%): 61,293 Flex.: 2,134		Fração de volume: 0,387 Massa final: 139,182 Flex.: 1,598	
Distribuição de densidades (ρ) 		Distribuição de densidades (ρ) 	
Distribuição de tensões (σ) 		Distribuição de tensões (σ) 	
Código Desenvolvido		"99 lines"	
Força: 0,20 (dividido em 2 nós)			
Massa final: 147,235 Redução (%): 59,101 Flex.: 3,278		Fração de volume: 0,409 Massa final: 147,188 Flex.: 2,556	
Distribuição de densidades (ρ) 		Distribuição de densidades (ρ) 	
Distribuição de tensões (σ) 		Distribuição de tensões (σ) 	

Cada um dos problemas com restrições de tensão foi processado em um tempo aproximado de 50 minutos, enquanto que os problemas de flexibilidade média levaram cerca de 5 segundos no mesmo equipamento.

A diferença no tempo de execução entre os dois códigos muito provavelmente está com a metodologia de cálculo dos gradientes da função objetivo na análise de sensibilidade. O programa desenvolvido utiliza diferenças finitas, que requerem a perturbação de cada variável de projeto e múltiplas avaliações da função objetivo, resultando em maior custo computacional. Em contrapartida, o código “99 lines” emprega derivadas analíticas por meio do método adjunto, permitindo o cálculo eficiente do gradiente completo diretamente a partir das equações de equilíbrio estrutural. Essa abordagem elimina a necessidade de perturbar individualmente as variáveis, reduzindo significativamente o tempo de processamento. Assim, a eficiência superior do “99 lines” decorre do uso de gradientes analíticos, enquanto o método numérico adotado no programa desenvolvido é mais custoso.

Tabela 21: Comparativo dos resultados do problema cantilever (viga engastada-livre).

	Código Desenvolvido		“99 lines”	
Força Aplicada	Massa Final	Flexibilidade	Massa Final	Flexibilidade
0,1	131,626	1,189	147,163	0,641
0,12	141,881	1,429	142,021	0,984
0,13	137,086	1,644	136,915	1,243
0,14	140,232	1,926	140,164	1,371
0,15	139,344	2,134	139,182	1,598
0,2	147,235	3,278	147,188	2,556

Os resultados apresentaram uma tendência: o aumento na força aplicada leva a um aumento na massa final e da flexibilidade, apesar de algumas oscilações que ocorreram com a força igual a 0,12 e 0,15. Além disso, todos os elementos das topologias geradas pelo código desenvolvido respeitam o critério de tensões. Verificou-se de maneira geral, que a flexibilidade média das topologias geradas pelo código “99 lines” tende a ser menor em comparação às geradas pelo código desenvolvido, uma vez que o objetivo do “99 lines” é minimizar a flexibilidade média.

4.7 Viga cantilever (engastada-livre) com malha mais refinada

Nesta seção, será analisado um problema de otimização topológica utilizando uma viga cantilever com uma malha mais refinada, visando testar o comportamento do código desenvolvido em situações com maior número de variáveis de projeto. Esse aumento na quantidade de elementos finitos permite avaliar a estabilidade e a eficiência da solução diante de um refinamento na discretização do domínio.

Os dados de entrada para a análise são:

- **Dimensões (adimensionais):** 25 x 15 x 1 (comprimento x altura x espessura);
- **Malha (quantidade de elementos):** 45 x 27 (comprimento x altura) = 1215 elementos;
- **Dimensões dos elementos finitos:** 0,556 x 0,556 (comprimento x altura);
- **Massa inicial:** 375;
- **Propriedades do material (adimensional):** $E = 1$, $\nu = 0,3$, $\sigma_{adm} = 1$;
- **Condições de contorno:** Engastado na extremidade esquerda;
- **Parâmetros de otimização:** Número máximo de *loops* = 4, $p = 3$; $\beta = 8$, $r_{min} = 1,4$, valores iniciais de $\varepsilon = 0,3$, $\rho = 1$, $\gamma = 0,1$, $\lambda = 1$ e $\mu = 10$.

A configuração inicial do problema é ilustrada na Figura 48, representando a viga cantilever.

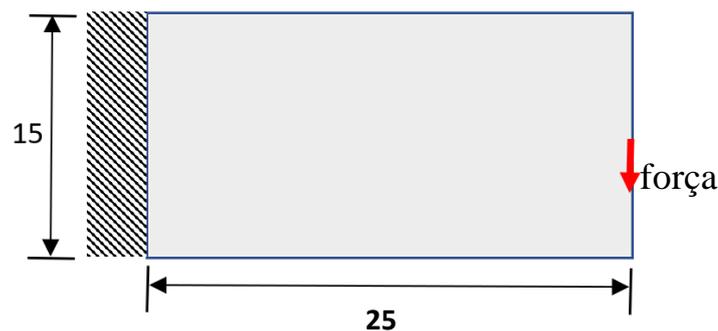


Figura 48: Problema do projeto ótimo cantilever (viga engastada-livre).

Os resultados da análise indicam que o modelo gerado pelo código desenvolvido apresenta uma topologia final com configuração similar às das análises realizadas anteriormente, mesmo com o uso de uma malha mais refinada, conforme ilustrado na Figura 49. Esses resultados demonstram a estabilidade da solução em relação ao aumento no número

de elementos finitos. A topologia final obteve uma massa de 179,349 (redução de 52,174%) e flexibilidade de 1,846. Além disso, foi observado que todos os elementos das topologias finais respeitaram os critérios de tensão estabelecidos na análise, indicando que as restrições de tensão foram adequadamente atendidas, conforme evidenciado na Figura 50. Isto indica eficiência do método implementado na obtenção de soluções com mais variáveis de projeto.

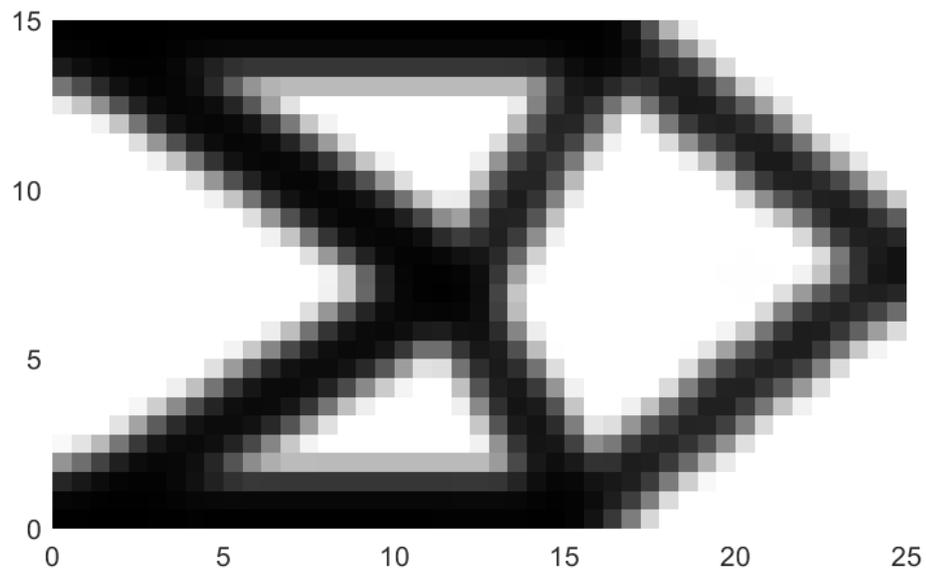


Figura 49: Resultado da distribuição de densidades (ρ).

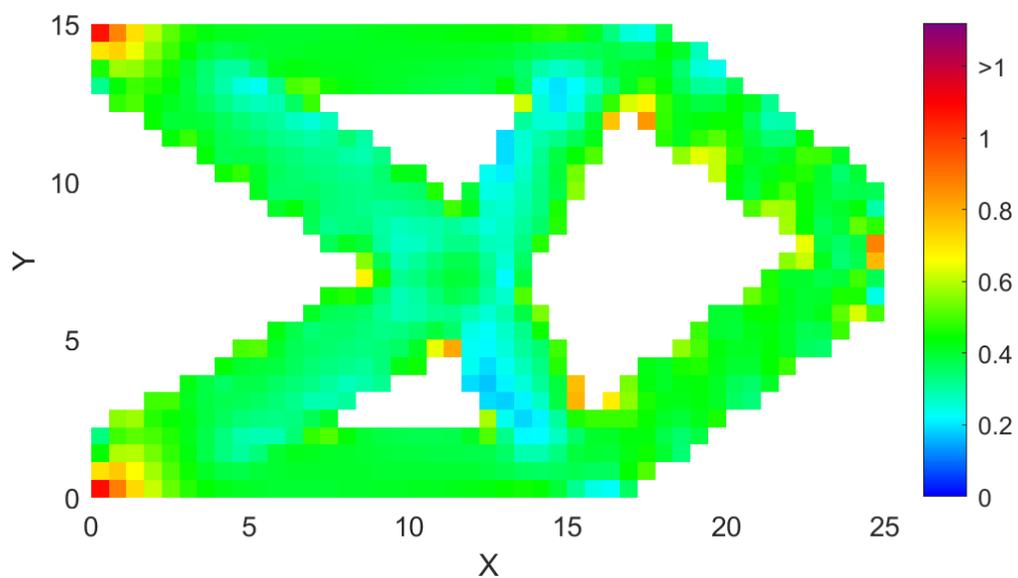


Figura 50: Resultado da distribuição de tensões (σ).

A minimização da função objetivo ao longo dos *loops* é apresentada na Figura 51 e detalhada na Tabela 22.

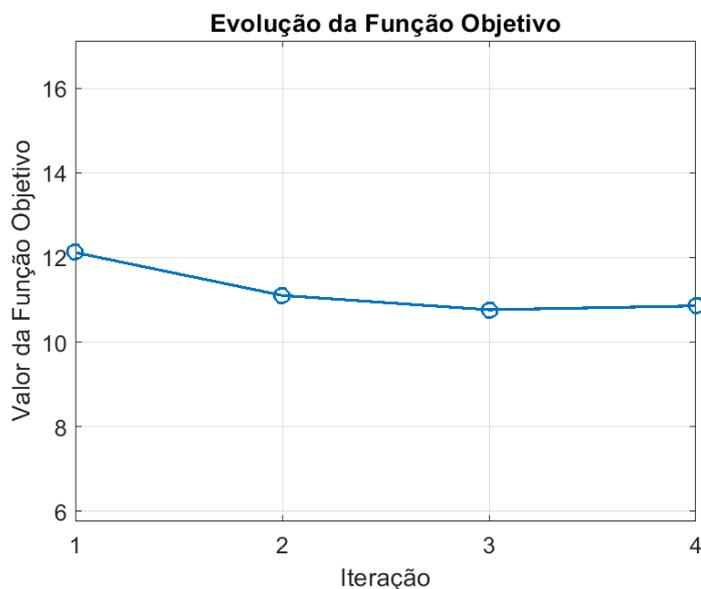


Figura 51: Evolução da função objetivo.

Tabela 22: Evolução dos valores da função objetivo

	Função Objetivo
<i>Loop 1</i>	12,116
<i>Loop 2</i>	11,103
<i>Loop 3</i>	10,764
<i>Loop 4</i>	10,857

Este problema, considerando as restrições de tensão, foi processado em um tempo aproximado de 19 horas. Esse resultado reflete a complexidade adicional decorrente do maior número de variáveis de projeto, mas também confirma a capacidade do código em lidar com problemas mais detalhados de forma eficiente.

Os resultados reforçam a confiabilidade do código desenvolvido, mostrando que ele é capaz de gerar soluções consistentes mesmo sob condições mais exigentes, como o uso de uma malha refinada.

5 Aplicabilidade da otimização de topologia em estruturas de submarinos

Com quase 100 metros de comprimento, 10 metros de diâmetro, 6.000 toneladas e transportando uma tripulação em torno de 70 pessoas, o SNCA, Figura 52, é constituído estruturalmente por milhares de estruturas e subestruturas. Essas subestruturas possuem diversos tamanhos e formas, e requerem atenção especial quanto às características, condições e requisitos específicos de projeto.

Devido aos mais diversos tipos de cargas e situações às quais estas estruturas são expostas, há a necessidade de alta resistência e durabilidade no ambiente em que a estrutura trabalha. Isto é crucial não só para atender os critérios de projeto e segurança, mas também para garantir a integridade do equipamento. Nesse contexto, o método dos elementos finitos (MEF) é considerado uma ferramenta essencial para a análise detalhada do comportamento estrutural de cada componente do submarino, aumentando a confiabilidade do projeto como um todo.

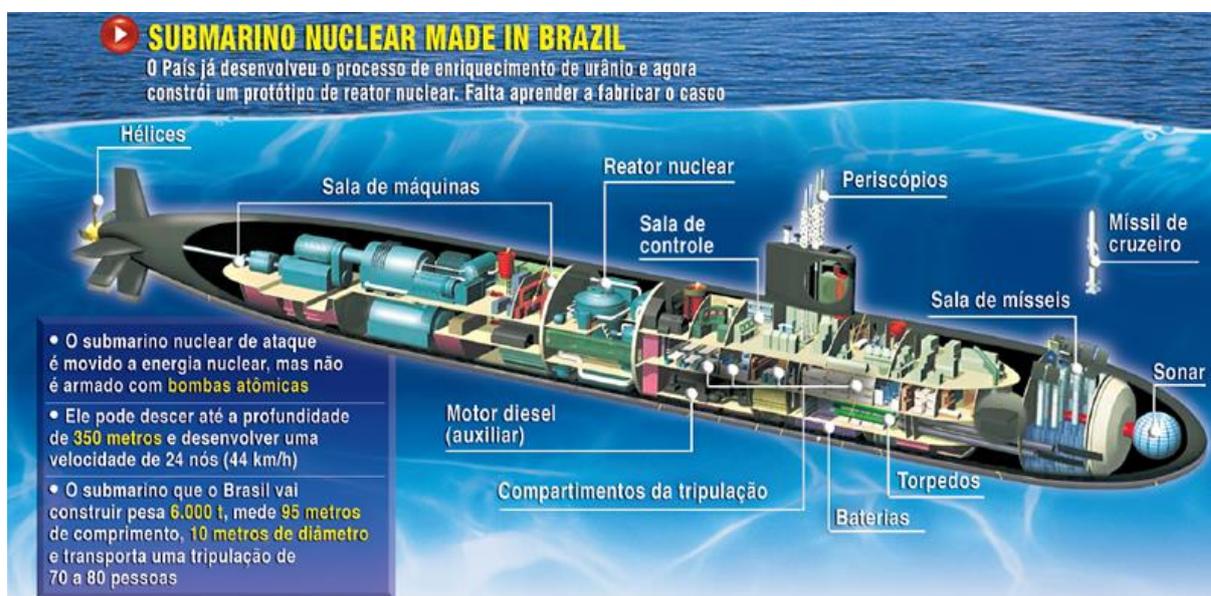


Figura 52: Ilustração do submarino nuclear brasileiro (Defesa Aérea & Naval, 2012).

Paralelamente, a otimização topológica tem se consolidado como uma técnica amplamente utilizada na engenharia estrutural para aprimorar projetos e reduzir o peso de componentes sem comprometer sua integridade. Para submarinos, essa abordagem é

extremamente importante, pois a eficiência estrutural e a redução de peso afetam diretamente o desempenho e a capacidade de carga.

A combinação da análise por elementos finitos e da otimização topológica possibilita a criação de estruturas submarinas mais eficientes, como bases de equipamentos e anteparas, que podem ser otimizadas para minimizar o peso sem sacrificar a integridade estrutural. Isto resulta em economia de material e recursos, além de aumentar a eficiência operacional do submarino. Ademais, antes de tudo isso, o aspecto mais importante é obter um projeto viável de submarino.

Em geral, componentes ou subestruturas que podem se beneficiar de otimização topológica são aqueles que podem se utilizar de alívios de material (regiões com remoção de material) sem prejuízo de desempenho. Estruturas que necessitam ser representadas por modelos tridimensionais, e que podem ter alívios de material, também podem se beneficiar em geral.

5.1 Principais partes do submarino

Nesta seção, será apresentada uma visão geral das principais partes que compõem um submarino, enfatizando as estruturas e sistemas essenciais para o funcionamento e desempenho subaquático. Submarinos são veículos complexos, projetados para operar em ambientes extremos, e sua construção envolve uma combinação de engenharia avançada e tecnologia de ponta.

Entre as estruturas fundamentais estão o casco resistente, responsável por suportar a pressão externa em altas profundidades; os tanques de lastro, responsáveis pela flutuabilidade e submersão controlada da embarcação; a vela, onde ficam os principais sensores e equipamentos de comunicação. Além das estruturas, o submarino abriga uma série de sistemas cruciais, como o sistema de propulsão, que pode ser nuclear ou diesel-elétrico, fornecendo energia para a movimentação subaquática e o suporte à tripulação. Outros sistemas vitais incluem os sonares, usados para navegação e detecção de alvos, e o sistema de combate, que inclui armamentos como torpedos e mísseis, conforme apresentado na Figura 53.

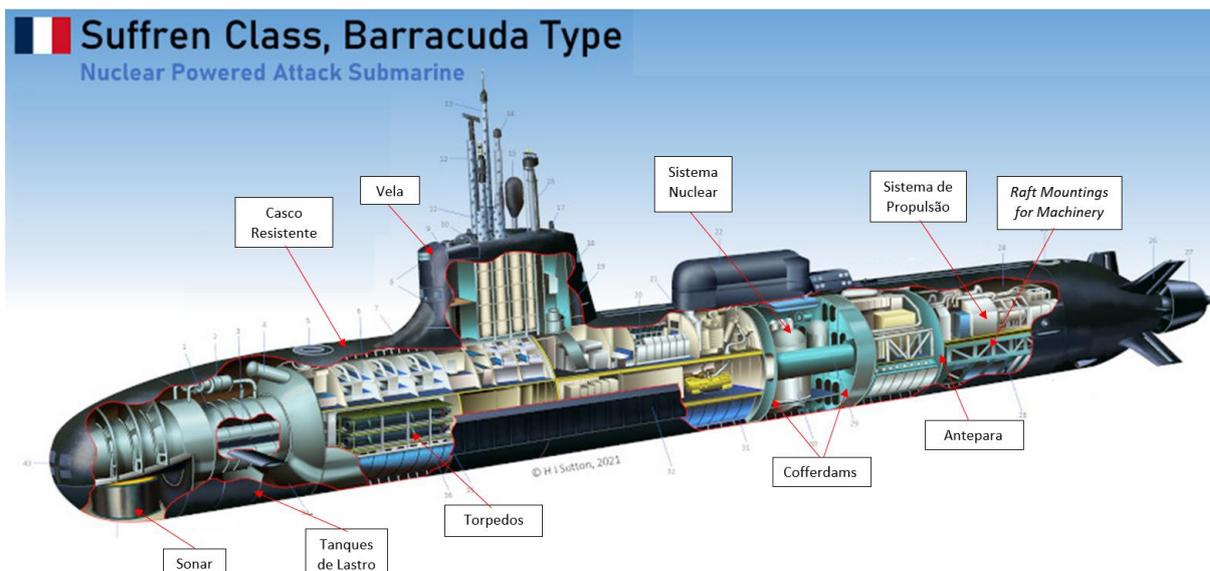


Figura 53: Principais estruturas e sistemas do Submarino Nuclear Barracuda (Classe Suffren).
Fonte: adaptado de Sutton (2021).

Abaixo, são detalhadas as principais estruturas de um submarino, com ênfase na sua função e importância para a integridade e funcionalidade do conjunto.

Casco resistente

O casco resistente é a estrutura mais crítica de um submarino, responsável por suportar as enormes pressões exercidas pelas águas profundas. Construído com chapas metálicas e reforçadas com perfis anelares (cavernas) ao longo o comprimento, é feito com ligas metálicas de alta resistência, como aço especial. O casco resistente mantém a integridade estrutural do submarino, permitindo que ele mergulhe em grandes profundidades sem comprometer a segurança da tripulação, além disso, todas as cargas e pesos dos equipamentos e materiais são suportados pelo casco resistente. Internamente, a pressão atmosférica é mantida constante, criando um ambiente habitável, independentemente da profundidade.

Vela

A vela é uma estrutura elevada localizada na parte superior do submarino, abrigando periscópios, mastros de comunicação, antenas de radar e *snorkel* (nos submarinos de propulsão convencional). Ela é responsável por oferecer visibilidade e controle da embarcação quando está próxima à superfície e desempenha um papel importante na navegação e nas operações de combate.

Tanques de lastro

Os tanques de lastro controlam a flutuabilidade do submarino, permitindo que ele submerja ou emerja. Ao serem preenchidos com água, o submarino ganha peso e afunda; quando esvaziados e preenchidos com ar comprimido, ele volta a flutuar.

Sistema de propulsão

O sistema de propulsão varia conforme o tipo de submarino. Nos submarinos nucleares, ele é baseado em um reator nuclear que gera energia para a movimentação do submarino e alimenta seus sistemas, enquanto nos submarinos de propulsão convencional, o sistema combina motores a diesel e baterias elétricas. O sistema de propulsão inclui a hélice e os eixos que transferem a força gerada para movimentar o submarino submerso ou em superfície.

Sistema de sonar

O sistema de sonar é fundamental para a navegação subaquática e as operações de guerra submarina. O sonar é utilizado para detectar obstáculos, submarinos inimigos e outras embarcações, além de mapear o fundo do mar. Estes sistemas, instalados no casco e em domos na proa, emitem ondas sonoras que, ao refletirem nos objetos ao redor, ajudam na identificação e monitoramento do ambiente.

Sistema de combate

O sistema de combate de um submarino é composto por um conjunto de sensores e armamentos que permitem ao submarino realizar missões ofensivas e defensivas. Esse sistema inclui torpedos e sensores de combate (sistemas de sonar avançados, radares, periscópios equipados com sensores ópticos).

Sistema nuclear

Nos submarinos nucleares, o sistema nuclear é a principal fonte de energia, oferecendo autonomia quase ilimitada. O reator nuclear gera calor, que é convertido em eletricidade para operar o submarino e seu sistema de propulsão, além de alimentar os sistemas elétricos e de combate. Este sistema permite que submarinos nucleares fiquem submersos por longos períodos, sem necessidade de reabastecimento.

Suportes de equipamentos

Os suportes de equipamentos são estruturas responsáveis por abrigar e organizar todos os sistemas essenciais do submarino, como sistemas de controle, armas, motores e outros equipamentos críticos. Estes suportes são projetados para garantir a integridade dos equipamentos e sistemas em situações adversas, mas também para garantir a segurança e acessibilidade para manutenção, além de reduzir os impactos de vibrações e movimentos causados pela operação do submarino.

Na Figura 53 é apresentado o *Raft Mountings of Equipment*, que é um suporte para abrigar diversos equipamentos em uma única estrutura. A Figura 54 mostra a estrutura em azul, que é a base de um motor elétrico, a qual suporta e transfere toda a carga para uma outra estrutura maior ou diretamente para o casco resistente.



Figura 54: A estrutura em azul é a estrutura base de um motor elétrico (Tecnologia & Defesa, 2019)

Cofferdams

Os *cofferdams* são compartimentos localizados entre duas anteparas estanques, funcionando como barreiras de segurança que evitam a propagação de inundações em caso de avarias em um compartimento. Eles não são habitáveis, mas atuam como zonas de proteção para aumentar a segurança interna do submarino em situações de emergência.

Anteparas

As anteparas são divisórias internas que compartimentam o submarino em várias seções estanques, garantindo que, em caso de danos ou inundações, apenas uma parte da embarcação seja afetada. Além de fornecer segurança adicional, as anteparas contribuem para a rigidez estrutural do submarino e ajudam a controlar o impacto da pressão em profundidades extremas. Estas estruturas são reforçadas com perfis metálicos e possuem muitas passagens de peças, tubulações e cabeamento.

5.2 Aplicação dos métodos dos elementos finitos e otimização topológica em subestruturas de suporte de equipamentos

As subestruturas de suporte de equipamentos dentro de um submarino sustentam sistemas críticos, como motores, geradores a diesel, bombas e válvulas, estando sujeitas a diferentes tipos de carregamento, mas também suportam peças menores é o caso dos painéis elétricos. O uso do MEF permite modelar o comportamento dessas estruturas sob diversas condições de operação, identificando pontos de falha potenciais e garantindo a integridade do projeto. Por meio da otimização topológica, é possível redistribuir o material de forma eficiente, reduzindo significativamente o peso da estrutura sem comprometer seu desempenho. A aplicação dessa técnica em grande parte destas estruturas pode resultar em uma redução significativa da massa total do submarino, promovendo uma maior economia de material e maior eficiência estrutural, assegurando assim a viabilidade do projeto dentro dos parâmetros de segurança estipulados.

5.3 Otimização de anteparas submarinas

Além das subestruturas de suporte de equipamentos, há também as anteparas submarinas, responsáveis pela compartimentação interna e a elevação da resistência do casco sujeito a pressão externa. Dada a complexidade das anteparas, que incluem diversos reforços estruturais e inúmeras aberturas para passagem de tubulações, cabos e outros equipamentos, a otimização topológica pode desempenhar um papel importante na redução de peso sem comprometer a resistência mecânica. A redistribuição de material de forma otimizada permite que as anteparas permaneçam dentro dos limites de tensão admissíveis, ao mesmo tempo em

que são reduzidos a quantidade de material. Esse tipo de otimização é especialmente importante em submarinos, onde o espaço é limitado e a eficiência estrutural é essencial para a operação segura. Aliado a isso, muitas destas anteparas têm a necessidade de isolamento acústico como requisito, o que pode ser contornado utilizando painéis sanduiche projetados utilizando otimização topológica.

5.4 Manufatura aditiva em estruturas otimizadas

Um campo promissor para aplicação de estruturas otimizadas é a manufatura aditiva, especialmente em componentes que possam ter ganhos de performance com geometrias complexas. A manufatura aditiva utilizando metais, como fusão em leito de pó (*powder bed fusion, PBF*) de ligas de titânio e alumínio, por exemplo, oferecem resistência mecânica comparável à obtida com processos de fabricação tradicionais. Também oferecem níveis de porosidade baixos, com preenchimento em geral maior que 99,5% (Brock, 2021; Bartolomeu, 2022). Este tipo de material é ideal para partes de submarinos que exigem rigidez e leveza em estruturas de topologia complexa, muitas vezes impossível de serem manufaturados por meios de fabricação convencional, utilizando soldagem.

Essas tecnologias proporcionam maior liberdade no projeto de estruturas, favorecendo a aplicação da otimização topológica, pois as formas fabricáveis não estão limitadas pelos métodos convencionais de fabricação. Os componentes produzidos por esses métodos podem possuir resistência mecânica comparável à de peças fundidas ou conformadas mecanicamente. Isto pode resultar em peças mais leves, duráveis e com desempenho superior, especialmente em ambientes adversos como o submarino.

6 Conclusão

Este trabalho teve como objetivo o desenvolvimento e aplicação de um código de otimização topológica para minimização de massa, com restrições de tensão, para aplicação em subestruturas submarinas, um tema importante devido aos desafios do projeto do primeiro Submarino Nuclear Convencionalmente Armado (SNCA) brasileiro. A combinação do método dos elementos finitos (MEF) e técnicas de otimização topológica provou ser eficaz, podendo efetivamente contribuir na criação de estruturas leves e resistentes para atender aos requisitos do projeto estrutural em ambientes submarinos.

As análises realizadas e apresentadas no Capítulo 4, evidenciam a validade do código desenvolvido quando aplicado na otimização topológica de modelos estruturais planos. Na Seção 4.1, a validação inicial do código revelou resultados consistentes com ferramentas comerciais, como o *software* ANSYS. A comparação com esse método mostrou que o código criado tem a capacidade de replicar com precisão a distribuição de tensões e deformações, atendendo aos padrões necessários para uso industrial e acadêmico.

Na Seção 4.2, foram apresentados resultados evidenciando a influência das técnicas utilizadas no código para otimização topológica com restrição de tensão. O uso do *fmincon*, do MATLAB, permitiu resolver problemas de otimização não linear de maneira eficiente, oferecendo boa precisão na busca pelo mínimo da função objetivo. A introdução de *loops* no processo de otimização aprimorou a flexibilidade do código, permitindo a execução iterativa e ajustando os parâmetros conforme necessário. A técnica de relaxação (ϵ), aplicada nas restrições de tensão, foi fundamental para superar limitações computacionais, facilitando a convergência do algoritmo em regiões degeneradas. Por fim, o fator de ponderação adaptativo (γ) contribuiu significativamente para a estabilização da otimização, ajustando a penalização de acordo com as tensões de von Mises em cada iteração, garantindo que as restrições de tensão fossem respeitadas sem comprometer a eficácia do processo de otimização. Essas melhorias garantiram um código mais robusto e eficaz, proporcionando soluções otimizadas para os problemas estruturais propostos.

A avaliação dos parâmetros na Seção 4.4 mostrou como o raio mínimo de influência, a intensidade das forças aplicadas e a penalização de densidades intermediárias impactam os resultados. O raio mínimo (r_{min}) regula a área de influência dos elementos, suavizando transições de densidade e evitando padrões indesejados, o que estabiliza o processo de otimização. A penalização de densidades elimina elementos intermediários, no entanto, valores

menores de β reduzem mais a massa, mas com menor rigidez, enquanto valores maiores aumentam a rigidez, mas com acréscimo de peso. Esses critérios são fundamentais para equilibrar leveza e resistência estrutural, evidenciando a eficácia da metodologia. No problema de duas barras, os resultados confirmaram a robustez do código, com distribuições de material que reduziram significativamente a massa, mantendo as tensões dentro do limite estipulado. As variações de parâmetros demonstraram a capacidade do código de ajustar-se conforme os requisitos específicos, validando a metodologia proposta ao manter a integridade estrutural enquanto minimiza o uso de material.

Nas Seções 4.5 e 4.6, foi realizado um comparativo entre os resultados obtidos para as configurações da viga MBB e da viga cantilever, utilizando o código desenvolvido e o código “99 lines” de Sigmund (2001). Enquanto o código “99 lines” adota uma metodologia de otimização topológica baseada na minimização da flexibilidade média, o código desenvolvido neste trabalho tem como objetivo a minimização de massa sob restrições de tensão. Apesar de diferenças nas metodologias, as configurações topológicas finais obtidas foram similares, apresentando massas finais próximas. No entanto, as estruturas geradas pelo código “99 lines” apresentaram maior rigidez, uma vez que o objetivo desse código é maximizar a rigidez estrutural, além disso, alguns elementos destas das vigas atingiram tensões superiores ao limite estipulado no código desenvolvido, pois o código “99 lines” não considera um limite admissível de tensão. Esses resultados demonstram que, apesar das diferenças nos métodos de otimização, o código produzido gerou soluções topológicas que são válidas e correspondentes às tradicionais, confirmando a eficácia do método de minimização de massa com restrições de tensão proposto no estudo. A congruência das configurações obtidas e a eficácia estrutural garantida validam a adequação da metodologia proposta para aplicações práticas em engenharia estrutural.

Conclui-se que a metodologia de otimização topológica com restrições de tensão é eficiente na criação de subestruturas submarinas e também será uma importante contribuição para o progresso da engenharia estrutural em projetos complexos, como o SNCA. Utilizar esta metodologia em projetos de estruturas subaquáticas trará benefícios, permitindo a construção de estruturas mais leves e eficientes, atendendo aos requisitos rigorosos de segurança e funcionalidade.

Com base nos resultados obtidos, sugere-se o aprofundamento do estudo, abrindo oportunidades para futuras investigações, como a aplicação de técnicas de otimização topológica em diversas áreas do submarino. A metodologia desenvolvida pode ser aplicada, por exemplo, em elementos como as anteparas, que também demandam uma distribuição eficiente

de material, ou em estruturas mais complexas. Além disso, a combinação da otimização topológica com métodos de manufatura aditiva, conforme discutido na Seção 5.4, pode viabilizar a fabricação de peças complexas e leves, utilizando ligas de alta resistência. A integração dessas técnicas com novos materiais tem o potencial de promover avanços significativos na redução de peso e na melhoria da resistência estrutural, contribuindo, assim, para a viabilidade e eficiência do submarino.

Referências

- ANDREANI, R.; BIRGIN, E. G.; MARTÍNEZ, J. M.; SCHUVERDT, M. L. On augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints. **SIAM Journal on optimization**, v. 18, n. 4, 1286-1309, 2008.
- BARTOLOMEU, F.; GASIK, M.; SILVA, F. S.; MIRANDA, G. Mechanical properties of Ti6Al4V fabricated by laser powder bed fusion: a review focused on the processing and microstructural parameters influence on the final properties. **Metals**, v. 12, n. 6, p. 986, 2022.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. 2. ed. Watertown: Klaus-Jurgen Bathe, 2014. 1043 p. ISBN 978-09-790-0495-7.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural optimization**, v. 1, n. 4, p. 193-202, 1989.
- BENDSØE, M. P.; BEN-TAL, A.; ZOWE, J. Optimization methods for truss geometry and topology design. **Structural optimization**, v. 7, n. 3, p. 141–159, 1994.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 71, n. 2, p. 197-224, 1988.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: theory, methods and applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003.
- BERTSEKAS, D. P. **Constrained optimization and Lagrange multiplier methods**. Belmont: Athena Scientific, 1996. 410 p. ISBN 978-18-865-2904-5.
- BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear programming**. 3. Ed. Belmont: Athena Scientific, 2016. 861 p. ISBN 978-18-865-2905-2.
- BROCK, L.; OGUNSANYA, I.; ASGARI, H.; PATEL, S.; VLASEA, M. Relative performance of additively manufactured and cast aluminum alloys. **Journal of Materials Engineering and Performance**, v. 30, n. 1, p. 760-782, 2021.
- BRUNS, T. E.; TORTORELLI, D. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 190, p. 3443-3459, 2001.
- CHENG, G.; GUO, X. ϵ -relaxed approach in structural topology optimization. **Structural optimization**, v. 13, n. 4, p. 258-266, 1997.
- COOL, V.; SIGMUND, O.; AAGE, N.; NAETS, F.; DECKERS, E. Vibroacoustic topology optimization for sound transmission minimization through sandwich structures. **Journal of sound and vibration**, v. 568, 117959, 2024.

DEFESA AÉREA E NAVAL. Marinha do Brasil inicia projeto do submarino de propulsão nuclear. 2012. Disponível em: <https://www.defesaaereanaval.com.br/ciencia-e-tecnologia/marinha-do-brasil-inicia-projeto-do-submarino-de-propulsao-nuclear>. Acesso em: 10 ago. 2024.

DIAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization. **Structural optimization**, v. 10, p. 40-45, 1995.

DUYSINX P.; BENDSØE M. P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 43, n. 8, p. 1453–1478, 1998.

DUYSINX, P.; SIGMUND, O. New developments in handling stress constraints in optimal material distributions. *In: AIAA/USAF/NASA/ISSMO SYMPOSIUM ON MULTIDISCIPLINARY DESIGN OPTIMIZATION*, 7., 1998, St. Louis. **Proceedings** [...]. New York: AIAA, 1998. p. 4906.

FERREIRA, R. J.; GRANDE, A. M.; GUEDES, J. M.; DEUS, A. M.; SALA, G. Combination of topology and shape optimization with finite element modeling in the case of an aerospace component produced by laser based additive manufacturing. **Journal of Laser Applications**, v. 35, n. 2, 022031, 2023.

GORDON, S. **Complexity of engineering structures**. [S. l.]: Electric Boat Division: General Dynamics, 2009.

GRIVA, I.; NASH, S. G.; SOFER, A. **Linear and nonlinear optimization**. 2 ed. Fairfax: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009. 764 p. ISBN 978-08-987-1661-0.

GUEDES, J. M.; KIKUCHI, N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 83, n. 2, p. 143-198, 1990.

GUEST, J. K.; PRÉVOST, J. H.; BELYTSCHKO, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 61, n. 2, p. 238-254, 2004.

HASSANI, B.; HINTON, E. A review of homogenization and topology optimization III: topology optimization using optimality criteria. **Computers and Structures**, v. 69, p. 739-756, 1998.

HAYES, A. C.; TRÄFF, E. A.; SØRENSEN, C. V.; WILLEMS, S. V.; AAGE, N.; SIGMUND, O.; WHITING, G. L. Topology optimization for structural mass reduction of direct drive electric machines. **Sustainable energy technologies and assessments**, v. 57, 103254, 2023.

HUGHES, T. J. R. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. Mineola: Dover, 2000. 704 p. ISBN 978-04-864-1181-1.

JORGE, A. B.; ANFLOR, C.T. M.; GOMES, G. F.; CARNEIRO, S. H. S. (eds.). **Fundamental Concepts and Models for the Direct Problem**. Brasília, DF: UnB, 2022. ISBN 978-65-86503-83-8. <https://doi.editoracubo.com.br/10.4322/978-65-86503-83-8.pdf>.

KENNEDY, G. J.; HICKEN, J. E. Improved constraint-aggregation methods. **Computational methods in applied mechanics and engineering**, v. 289, p. 332-354, 2015.

LE, C.; NORATO, J.; BRUNS, T.; HA, C.; TORTORELLI, D. Stress-based topology optimization for continua. **Structural and multidisciplinary optimization**, v. 41, n. 4, p. 605-620, 2010.

LEE, E.; JAMES, K. A.; MARTINS, J. R. R. A. Stress-constrained topology optimization with design-dependent loading. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 46, n. 5, p. 647-661, 2012.

LIU, K.; TOVAR, A. An efficient 3D topology optimization code written in MATLAB. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 50, n. 6, p. 1175-1196, 2014.

LUCENA NETO, E. **Fundamentos da mecânica das estruturas**. Florianópolis: Orsa Maggiore, 2021. 523 p. ISBN 978-65-993-6812-7.

MORGAN, E.; BURTON, K. W.; NICKLESS, G. Optimization using the modified simplex method. **Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems**, v. 7, n. 3, p. 209-222, 1990.

NAVARRINA, F.; MUIÑOS, I.; COLOMINAS, I.; CASTELEIRO, M. Topology optimization of structures: a minimum weight approach with stress constraints. **Advanced Engineering Software**, v. 36, n. 9, p. 599-606, 2005.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. 2. ed. New York: Springer, 2006. 686 p. ISBN 978-03-8-3-0303-1.

PARIS, J.; NAVARRINA, F.; COLOMINAS, I.; CASTELEIRO, M. Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 39, n. 4, p. 419-437, 2009.

PEREIRA, J. T.; FANCELLO, E. A.; BARCELLOS, C. S. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, n. 1-2, p. 50-66, 2004.

PETERSSON, J. On continuity of the design-to-state mappings for trusses with variable topology. **International Journal of Engineering Science**, v. 39, n. 10, p. 1119-1141, 2001.

REDDY, J. N. **Introduction to the finite element method**. 4. ed. Texas: McGraw-Hill Education, 2019. 1151 p. ISBN 978-12-598-6190-1.

SENHORA, F. V.; GIRALDO-LONDOÑO, O.; MENEZES, I. F. M.; PAULINO, G. H. Topology optimization with local stress constraints: a stress aggregation-free approach. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 62, n. 5, p. 1639-1668, 2020.

SHAMES, I. H.; DYM, C. L. **Energy and finite element methods in structural mechanics**. 1. ed. New York: Taylor & Francis, 2003. 776 p. ISBN 978-08-911-6942-0.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, n. 2, p. 120-127, 2001.

SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 33, n. 4, p. 401-424, 2007.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 16, n. 1, p. 68-75, 1998.

SIMONETTI, H. L.; NEVES, F. D. A. DAS; ALMEIDA, V. S. Multiobjective topology optimization with stress and strain energy criteria using the SESO method and a multicriteria tournament decision. **Structures**, v. 30, p. 188–197, 2021.

STOLPE, M.; SVANBERG, K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 22, n. 2, p. 116-124, 2001.

SUTTON, H. I. French navy suffren class (Barracuda) submarine. 2021. Disponível em: <http://www.hisutton.com/Suffren-Barracuda-Class-Submarine.html>. Acesso em: 20 set. 2024.

SUZUKI, K.; KIKUCHI, N. A homogenization method for shape and topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.93, p. 291-318, 1991.

TECNOLOGIA E DEFESA. **Projeto detalhado do submarino nuclear Álvaro Alberto: a próxima fase**. 2019. Disponível em: <https://tecnodefesa.com.br/amazul-e-marinha-do-brasil-projeto-detalhado-do-submarino-nuclear-alvaro-alberto-a-proxima-fase/>. Acesso em: 21 set. 2024.

VENKAYYA, V. Optimality criteria: a basis for multidisciplinary design optimization. **Computational Mechanics**, v. 5, n. 1, p. 1-21, 1989.

VERBART, A.; LANGELAAR, M.; VAN KEULEN, F. A unified aggregation and relaxation approach for stress-constrained topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 55, n. 2, p. 663-679, 2016.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method: Volume 1 – The basis**. 5. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 689 p. ISBN 978-07-506-5049-6.

YANG, X. **Bi-directional evolutionary method for stiffness and displacement optimisation**. 1999. Tese (Doutorado) - Victoria University of Technology, 1999.

Apêndice A –Matriz \mathbf{K}_e do elemento utilizado

Realizando a integração analítica da Eq. (14), obtêm-se as Eqs. (43) para cálculo de cada posição da matriz local de rigidez simétrica 8x8 \mathbf{K}_e .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_e(1,1) &= \frac{1}{6} \left(\frac{2bA_{11}}{a} + 3A_{13} + \frac{2aA_{33}}{b} \right), \\
 \mathbf{K}_e(1,2) &= \frac{1}{12} \left(3A_{12} + \frac{4bA_{13}}{a} + \frac{4aA_{23}}{b} + 3A_{33} \right), \\
 \mathbf{K}_e(1,3) &= \left(-\frac{bA_{11}}{3a} + \frac{aA_{33}}{6b} \right), \\
 \mathbf{K}_e(1,4) &= \frac{1}{12} \left(3A_{12} - \frac{4bA_{13}}{a} + \frac{2aA_{23}}{b} - 3A_{33} \right), \\
 \mathbf{K}_e(1,5) &= -\frac{1}{6} \left(\frac{bA_{11}}{a} + 3A_{13} + \frac{aA_{33}}{b} \right), \\
 \mathbf{K}_e(1,6) &= -\frac{1}{12} \left(3A_{12} + \frac{2bA_{13}}{a} + \frac{2aA_{23}}{b} + 3A_{33} \right), \\
 \mathbf{K}_e(1,7) &= \left(+\frac{bA_{11}}{6a} - \frac{aA_{33}}{3b} \right), \\
 \mathbf{K}_e(1,8) &= \frac{1}{12} \left(-3A_{12} + \frac{2bA_{13}}{a} - \frac{4aA_{23}}{b} + 3A_{33} \right), \\
 \mathbf{K}_e(2,2) &= \frac{1}{6} \left(\frac{2aA_{22}}{b} + 3A_{23} + \frac{2bA_{33}}{a} \right), \\
 \mathbf{K}_e(2,3) &= \frac{1}{12} \left(-3A_{12} - \frac{4bA_{13}}{a} + \frac{2aA_{23}}{b} + 3A_{33} \right), \\
 \mathbf{K}_e(2,4) &= \left(\frac{aA_{22}}{6b} - \frac{bA_{33}}{3a} \right), \\
 \mathbf{K}_e(2,5) &= -\frac{1}{12} \left(3A_{12} + \frac{2bA_{13}}{a} + \frac{2aA_{23}}{b} + 3A_{33} \right), \\
 \mathbf{K}_e(2,6) &= -\frac{1}{6} \left(\frac{aA_{22}}{b} + 3A_{23} + \frac{bA_{33}}{a} \right), \\
 \mathbf{K}_e(2,7) &= \frac{1}{12} \left(3A_{12} + \frac{2bA_{13}}{a} - \frac{4aA_{23}}{b} - 3A_{33} \right), \\
 \mathbf{K}_e(2,8) &= \left(-\frac{aA_{22}}{3b} + \frac{bA_{33}}{6a} \right), \\
 \mathbf{K}_e(3,3) &= \frac{1}{6} \left(\frac{2bA_{11}}{a} - 3A_{13} + \frac{2aA_{33}}{b} \right), \\
 \mathbf{K}_e(3,4) &= \frac{1}{12} \left(-3A_{12} + \frac{4bA_{13}}{a} + \frac{4aA_{23}}{b} - 3A_{33} \right), \\
 \mathbf{K}_e(3,5) &= \left(\frac{bA_{11}}{6a} - \frac{aA_{33}}{3b} \right), \\
 \mathbf{K}_e(3,6) &= \frac{1}{12} \left(3A_{12} + \frac{2bA_{13}}{a} - \frac{4aA_{23}}{b} - 3A_{33} \right), \\
 \mathbf{K}_e(3,7) &= \frac{1}{6} \left(-\frac{bA_{11}}{a} + 3A_{13} - \frac{aA_{33}}{b} \right),
 \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_e(3,8) &= \frac{1}{12} \left(3A_{12} - \frac{2bA_{13}}{a} - \frac{2aA_{23}}{b} + 3A_{33} \right), \\
\mathbf{K}_e(4,4) &= \frac{1}{6} \left(\frac{2aA_{22}}{b} - 3A_{23} + \frac{2bA_{33}}{a} \right), \\
\mathbf{K}_e(4,5) &= \frac{1}{12} \left(-3A_{12} + \frac{2bA_{13}}{a} - \frac{4aA_{23}}{b} + 3A_{33} \right), \\
\mathbf{K}_e(4,6) &= \left(-\frac{aA_{22}}{3b} + \frac{bA_{33}}{6a} \right), \\
\mathbf{K}_e(4,7) &= \frac{1}{12} \left(3A_{12} - \frac{2bA_{13}}{a} - \frac{2aA_{23}}{b} + 3A_{33} \right), \\
\mathbf{K}_e(4,8) &= \frac{1}{6} \left(-\frac{aA_{22}}{b} + 3A_{23} - \frac{bA_{33}}{a} \right), \\
\mathbf{K}_e(5,5) &= \frac{1}{6} \left(\frac{2bA_{11}}{a} + 3A_{13} + \frac{2aA_{33}}{b} \right), \\
\mathbf{K}_e(5,6) &= \frac{1}{12} \left(3A_{12} + \frac{4bA_{13}}{a} + \frac{4aA_{23}}{b} + 3A_{33} \right), \\
\mathbf{K}_e(5,7) &= \left(-\frac{bA_{11}}{3a} + \frac{aA_{33}}{6b} \right), \\
\mathbf{K}_e(5,8) &= \frac{1}{12} \left(3A_{12} - \frac{4bA_{13}}{a} + \frac{2aA_{23}}{b} - 3A_{33} \right), \\
\mathbf{K}_e(6,6) &= \frac{1}{6} \left(\frac{2aA_{22}}{b} + 3A_{23} + \frac{2bA_{33}}{a} \right), \\
\mathbf{K}_e(6,7) &= \frac{1}{12} \left(-3A_{12} - \frac{4bA_{13}}{a} + \frac{2aA_{23}}{b} + 3A_{33} \right), \\
\mathbf{K}_e(6,8) &= \left(\frac{aA_{22}}{6b} - \frac{bA_{33}}{3a} \right), \\
\mathbf{K}_e(7,7) &= \frac{1}{6} \left(\frac{2bA_{11}}{a} - 3A_{13} + \frac{2aA_{33}}{b} \right), \\
\mathbf{K}_e(7,8) &= \frac{1}{12} \left(-3A_{12} + \frac{4bA_{13}}{a} + \frac{4aA_{23}}{b} - 3A_{33} \right), \\
\mathbf{K}_e(8,8) &= \frac{1}{6} \left(\frac{2aA_{22}}{b} - 3A_{23} + \frac{2bA_{33}}{a} \right).
\end{aligned} \tag{43}$$

cont.

Apêndice B – Implementação da análise estrutural por elementos finitos

A seguir será detalhado o código desenvolvido para o cálculo de elementos finitos em um modelo retangular (4x2 elementos) composto por oito elementos quadrados de quatro nós. A implementação utiliza a linguagem de programação MATLAB e abrange desde a definição das propriedades do material até o cálculo das tensões de von Mises. Cada trecho do código será detalhado.

Definição das propriedades do material e coordenadas dos nós

```
t = 1;  
E = 1;  
nu = 0.3;  
Tlimite = 1;
```

- $t = 1$; - Espessura do elemento;
- $E = 1$; - Módulo de elasticidade do material;
- $\nu = 0.3$; - Coeficiente de Poisson do material; e
- $T_{limite} = 1$ - Limite de tensão permitido.

Essas propriedades são fundamentais para a definição do comportamento do material e a geometria do modelo. A escolha dos parâmetros E e ν (ν) é baseada nas propriedades mecânicas do material em estudo.

Geração da malha de nós

```
num_elems_x = 4;  
num_elems_y = 2;  
Lx = 4;  
Ly = 2;  
% Gerar a malha de nós  
dx = Lx / num_elems_x;  
dy = Ly / num_elems_y;  
nodes = [];
```

```

for j = 0:num_elems_y
    for i = 0:num_elems_x
        nodes = [nodes; i*dx, j*dy];
    end
end
end

```

- num_elems_x = 4; - Número de elementos na direção x;
- num_elems_y = 2; - Número de elementos na direção y;
- Lx = 4; - Comprimento total na direção x; e
- Ly = 2; - Comprimento total na direção y.

Este trecho de código gera a malha de nós para o modelo retangular, distribuindo os nós uniformemente ao longo das dimensões especificadas.

Conectividade dos elementos

```

% Função para obter a conectividade dos elementos
connectivity = [];
for j = 1:num_elems_y
    for i = 1:num_elems_x
        n1 = (num_elems_x + 1) * (j - 1) + i;
        n2 = n1 + 1;
        n3 = n1 + num_elems_x + 1 + 1;
        n4 = n1 + num_elems_x + 1;
        connectivity = [connectivity; n1, n2, n3, n4];
    end
end
end

```

- connectivity - Matriz de conectividade que define os nós que compõem cada elemento, assim como a sequência dos nós.

A conectividade dos elementos é essencial para determinar como os nós se conectam para formar os elementos no modelo (Zienkiewicz; Taylor, 2000).

Definição das funções de forma e derivadas

```
% Funções de forma para o elemento de 4 nós
```

```
N1 = (1/4)*(1-ksi)*(1-eta);
```

```
N2 = (1/4)*(1+ksi)*(1-eta);
```

```
N3 = (1/4)*(1+ksi)*(1+eta);
```

```
N4 = (1/4)*(1-ksi)*(1+eta);
```

- N1, N2, N3, N4 - Funções de forma para os quatro nós do elemento quadrado.

As funções de forma N_i são derivadas da interpolação de Lagrange, amplamente utilizada na formulação dos elementos finitos (Zienkiewicz; Taylor, 2000).

Cálculo das derivadas das funções de forma e matriz jacobiana

```
% Derivada das funções de forma
```

```
M = [diff(N1,ksi) diff(N2,ksi) diff(N3,ksi) diff(N4,ksi);
```

```
diff(N1,eta) diff(N2,eta) diff(N3,eta) diff(N4,eta)];
```

- **M** - Matriz das derivadas das funções de forma em relação às coordenadas naturais ξ e η .

A matriz **M** contém as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas naturais e é utilizada para calcular a matriz Jacobiana, que é fundamental para a transformação das coordenadas do elemento do sistema de coordenadas naturais para o sistema de coordenadas globais.

Matriz de propriedades elásticas do material

```
% Matriz de rigidez do material
```

```
D = (E / (1 - nu^2)) * [1 nu 0; nu 1 0; 0 0 (1 - nu) / 2];
```

- **D** - Matriz de propriedades do material, que relaciona tensões com deformações no elemento.

Montagem da matriz de rigidez global

```

elem_coords = [0 0; 1 0; 1 1; 0 1];
J = M * elem_coords;
B = inv(J) * M;
B = [B(1,1) 0 B(1,2) 0 B(1,3) 0 B(1,4) 0;
     0 B(2,1) 0 B(2,2) 0 B(2,3) 0 B(2,4);
     B(2,1) B(1,1) B(2,2) B(1,2) B(2,3) B(1,3) B(2,4) B(1,4)];
Ke = double(int(int(B' * D * B * t * det(J), ksi, [-1 1]), eta, [-1 1]));

```

- **J** - Jacobiano do elemento, calculado multiplicando-se a matriz das derivadas das funções de forma **M** pelas coordenadas dos nós do elemento;
- **B** - Matriz que relaciona os deslocamentos nodais com as deformações no elemento; e
- **Ke** - Matriz de rigidez de um elemento individual.

O Jacobiano é crucial para transformar integrais sobre o elemento em integrais sobre o espaço natural, facilitando a análise e solução dos problemas de elementos finitos. O cálculo do Jacobiano (**J**) e a construção da matriz **B** são passos cruciais na formulação de elementos finitos, conforme discutido por Zienkiewicz e Taylor (2000).

A matriz **B** combina as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas naturais, permitindo o cálculo das deformações em função dos deslocamentos nodais. Este é um passo fundamental na análise de elementos finitos, pois relaciona diretamente os deslocamentos com as deformações internas no elemento.

A matriz de rigidez é fundamental para a análise estrutural e é obtida através da integração de produtos envolvendo as matrizes **B** e **D**.

Definição das condições de contorno

```

fixed_nodes = find(nodes(:,2) == 0);
F_global = zeros(2*(num_elems_x+1)*(num_elems_y+1), 1);
F_global(2*13-1) = 1;

```

- **fixed_nodes** - Nós com deslocamento restrito (fixos); e
- **F_global** - Vetor de forças nodais aplicadas no sistema.

A definição das forças e deslocamentos é baseada nas condições de contorno e cargas aplicadas ao sistema.

Ajuste das condições de contorno

```
% Ajustar a matriz de rigidez global e o vetor de forças para as condições de contorno
for i = 1:length(fixed_nodes)
    node = fixed_nodes(i);
    dof = [2*node-1, 2*node];
    K_global(dof, :) = 0;
    K_global(:, dof) = 0;
    K_global(dof, dof) = eye(length(dof));
    F_global(dof) = 0;
end
```

Este trecho de código ajusta a matriz de rigidez global e o vetor de forças para levar em conta as condições de contorno, fixando os nós na base.

Resolução do sistema de equações

```
u_global = K_global \ F_global;
```

- u_{global} - Vetor de deslocamentos nodais.

A resolução do sistema de equações lineares é realizada utilizando métodos numéricos eficientes. No MATLAB, o operador “\” é chamado de `mldivide`.

Cálculo das deformações e tensões

```
Tvm_all = calcularTensaoVonMises(nodes, connectivity, fixed_nodes, F_global, Ke, t, E, nu, M, D, ksi, eta, rho);
```

Apêndice C – Implementação do método de otimização com fmincon

A seguir, será apresentado o detalhamento do código desenvolvido para a aplicação do método de otimização. Inicialmente, será explicado como o fmincon foi configurado e utilizado no processo, seguido pela descrição da implementação da otimização topológica.

C.1 Implementação do fmincon

1. **Definição da Função Objetivo:** A função objetivo é definida para calcular a massa total da estrutura, incluindo os termos de penalização para as restrições de tensão:

```
function L = objectiveFunction(rho, elem_areas, t, lambdas, mu, Tlimite, Tvm_all)
    hs = zeros(size(rho));
    for i = 1:length(rho)
        hs(i) = max((Tvm_all(i) / Tlimite - 1), - lambdas(i) / mu);
    end
    L = sum(rho .* elem_areas) * t + (1/NoE)*(sum(lambdas .* hs) + sum(mu .* hs.^2 / 2));
end
```

2. **Configurações da Otimização:** O otimizador fmincon é configurado para utilizar o algoritmo SQP, que é adequado para problemas de otimização com restrições não lineares. As opções de configuração são definidas para ajustar o algoritmo de otimização e a saída de informações durante a execução:

```
options = optimoptions('fmincon', 'Algorithm', 'sqp', 'Display', 'iter');
```

- **Algorithm:** Define o algoritmo a ser utilizado pelo fmincon. Neste caso, 'sqp' indica que será utilizado o algoritmo de Programação Quadrática Sequencial;
- **Display:** Configura o nível de detalhes das informações exibidas durante a execução. 'iter' indica que informações detalhadas sobre cada iteração serão exibidas, permitindo monitorar o progresso da otimização; e

3. **Execução da Otimização:** O `fmincon` é chamado para minimizar a função objetivo com as restrições e opções configuradas. A função objetivo e as restrições são passadas como argumentos, juntamente com os limitantes inferiores e superiores das variáveis de densidade. As densidades iniciais são passadas como ρ :

```
[rho_opt, fval] = fmincon(fun, rho, [], [], [], e^2*ones(NoE, 1), ones(NoE, 1), [], options);
```

- **fun:** A função objetivo a ser minimizada, que calcula a massa total da estrutura;
- **rho:** Vetor de densidades iniciais dos elementos;
- **[]):** Espaços reservados para restrições lineares de desigualdade e igualdade, que não são utilizadas neste problema;
- **e^2*ones(NoE, 1):** Limitante inferior das variáveis de densidade, definido como e^2 para garantir que as densidades não sejam reduzidas a zero;
- **ones(NoE, 1):** Limitante superior das variáveis de densidade, definido como 1 para garantir que as densidades não ultrapassem 1; e
- **options:** Estrutura de opções configurada anteriormente para ajustar o algoritmo de otimização e a saída de informações.

Nas soluções apresentadas, é utilizado o algoritmo SQP, que é uma técnica utilizada para resolver problemas de otimização não linear com restrições. Este método é eficaz na busca de soluções ótimas para problemas complexos, onde tanto a função objetivo quanto as restrições podem ser não lineares. O SQP é conhecido por sua robustez e eficiência.

C.2 Otimização topológica

Aqui será descrita a implementação computacional do algoritmo utilizado para otimização topológica considerado neste trabalho, utilizando MATLAB, aplicando o MEF e o algoritmo de otimização `fmincon` com o critério de tensão de von Mises.

Definição da função objetivo e restrições

```
lambdas = ones(NoE, 1);  
mu = 10;
```

```

gamma = 0.1 * ones(NoE,1);
beta = 0;
options = optimoptions('fmincon', 'Algorithm', 'sqp', 'Display', 'iter');
initial_rho = ones(NoE, 1);
elem_areas = calcElementAreas(nodes, connectivity);
initial_mass = sum(initial_rho .* elem_areas * t);
max_iters = 4;
e = 0.3;

```

- rho - Densidades iniciais dos elementos;
- lambdas - Multiplicadores de Lagrange;
- mu - Parâmetro de penalização;
- gamma – Fator de ponderação adaptativo;
- beta - Parâmetro de suavização;
- options - Configurações do algoritmo fmincon;
- elem_areas - Áreas dos elementos;
- initial_mass - Massa inicial da estrutura;
- max_iters - Número máximo de iterações; e
- e – Fator de relaxação.

Execução da otimização

```

for iter = 1:max_iters
    e = max(0.001,e);
    if iter > 2
        beta = 3;
    end
    fun = @(rho) objectiveFunction(rho, nodes, connectivity, t, lambdas, mu, Tlimite, fixed_nodes, F_global, Ke, E,
nu, M, D, ksi, eta, e, gamma, beta, NoE);
    [rho_opt, fval] = fmincon(fun, rho, [], [], [], [], e^2*ones(NoE, 1), ones(NoE, 1), [], options);
    rho = rho_opt;
    Tvm_all = calcularTensaoVonMises(nodes, connectivity, fixed_nodes, F_global, Ke, t, E, nu, M, D, ksi, eta, rho);
    for i = 1:NoE
        h = max((Tvm_all(i) / Tlimite - 1 - e / rho(i)), - lambdas(i) / mu);
        lambdas(i) = lambdas(i) + mu * h;
    end
end

```

```
mu = mu * 1.05;
e = e - 0.1;
end
```

- rho_opt - Densidades otimizadas dos elementos;

Resultados da otimização

```
final_mass = sum(rho .* elem_areas * t);
weight_reduction_percentage = ((initial_mass - final_mass) / initial_mass) * 100;
```

- final_mass - Massa final da estrutura; e
- weight_reduction_percentage - Redução percentual de peso.

Funções auxiliares

```
function [L, gamma] = objectiveFunction(rho, nodes, connectivity, t, lambdas, mu, Tlimite, fixed_nodes, F_global,
Ke, E, nu, M, D, ksi, eta, e, gamma, beta, NoE)
    elem_areas = calcElementAreas(nodes, connectivity);
    rho = 1 - exp(-beta * rho) + rho * exp(-beta);
    Tvm_all = calcularTensaoVonMises(nodes, connectivity, fixed_nodes, F_global, Ke, t, E, nu, M, D, ksi, eta, rho);
    hs = zeros(size(rho));
    for i = 1:length(rho)
        hs(i) = max((Tvm_all(i) / Tlimite - 1 - e / rho(i)), - lambdas(i) / mu);
    end
    L = sum(gamma .* rho .* elem_areas) * t + (1/NoE) * sum(lambdas .* hs + mu .* hs.^2 / 2);
    for i = 1:length(rho)
        if Tvm_all(i) > Tlimite
            gamma(i) = max(0.7 * gamma(i) - 0.1, 0);
        else
            gamma(i) = min(2.5 * gamma(i) + 0.5, 4);
        end
    end
end
end
function Tvm_all = calcularTensaoVonMises(nodes, connectivity, fixed_nodes, F_global, Ke, t, E, nu, M, D, ksi,
eta, rho)
```

```

K_global = zeros(2*size(nodes,1));
eps = 1e-6;
for e = 1:size(connectivity, 1)
    elem_nodes = connectivity(e, :);
    elem_dof = [2*elem_nodes(1)-1 2*elem_nodes(1) 2*elem_nodes(2)-1 2*elem_nodes(2) ...
                2*elem_nodes(3)-1 2*elem_nodes(3) 2*elem_nodes(4)-1 2*elem_nodes(4)];
    K_global(elem_dof, elem_dof) = K_global(elem_dof, elem_dof) + (eps + (1 - eps) * rho(e)^3) * Ke * rho(e);
end
for i = 1:length(fixed_nodes)
    node = fixed_nodes(i);
    dof = [2*node-1, 2*node];
    K_global(dof, :) = 0;
    K_global(:, dof) = 0;
    K_global(dof, dof) = eye(length(dof));
    F_global(dof) = 0;
end
u_global = K_global \ F_global;
Tvm_all = [];
for e = 1:size(connectivity, 1)
    elem_nodes = connectivity(e, :);
    elem_dof = [2*elem_nodes(1)-1 2*elem_nodes(1) 2*elem_nodes(2)-1 2*elem_nodes(2) ...
                2*elem_nodes(3)-1 2*elem_nodes(3) 2*elem_nodes(4)-1 2*elem_nodes(4)];
    u_elem = u_global(elem_dof);
    elem_coords = nodes(elem_nodes, :);
    J = M * elem_coords;
    B = inv(J) * M;
    B = [B(1,1) 0 B(1,2) 0 B(1,3) 0 B(1,4) 0;
         0 B(2,1) 0 B(2,2) 0 B(2,3) 0 B(2,4);
         B(2,1) B(1,1) B(2,2) B(1,2) B(2,3) B(1,3) B(2,4) B(1,4)];
    B = subs(B, {ksi, eta}, {0, 0});
    EPS = B * u_elem;
    T = D * EPS;
% Extração das tensões
    sigma_x = double(T(1)); % Tensão normal na direção x
    sigma_y = double(T(2)); % Tensão normal na direção y
    tau_xy = double(T(3)); % Tensão de cisalhamento no plano xy
% Cálculo das tensões principais
    sigma_avg = (sigma_x + sigma_y) / 2;

```

```
R = sqrt(((sigma_x - sigma_y) / 2)^2 + tau_xy^2);  
% Tensões principais  
sigma_1 = sigma_avg + R; % Tensão principal máxima  
sigma_2 = sigma_avg - R; % Tensão principal mínima  
% Armazenar as tensões principais em uma lista (opcional)  
Tp = [sigma_1, sigma_2, 0];  
% Cálculo das tensões de von Mises  
Tvm = sqrt(0.5*((T(1)-T(2))^2 + (T(2)-T(3))^2 + (T(3)-T(1))^2));  
Tvm_all = [Tvm_all; double(Tvm)];  
end  
end
```

Estas funções são responsáveis por calcular a função objetivo (L) e as tensões de von Mises (Tvm) dos elementos.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 07 de janeiro de 2025	3. REGISTRO N DCTA/ITA/DM-110/2024	4. N DE PÁGINAS 128
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Otimização de topologia sob restrição de tensão para aplicação em subestruturas de submarino			
6. AUTOR(ES): Ivan Issamu Nakamura			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: 1.Otimização Topológica 2. Método dos Elementos Finitos 3. Lagrangiano Aumentado 4. Restrição de Tensão 5. Projeto Estrutural			
9.PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: 1.Otimização 2. Topologia 3. Método de elementos finitos 4. Análise estrutural 5. Subestruturas 6. Engenharia estrutural 7. Engenharia mecânica			
10. APRESENTAÇÃO: <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeronáutica e Mecânica. Área de Projeto Aeronáutico, Estruturas e Sistemas Aeroespaciais. Orientador: Prof. Dr. Rafael Thiago Luiz Ferreira. Defesa em 04/12/2024. Publicada em 2024.			
11. RESUMO: Devido à evolução no desenvolvimento do projeto do primeiro Submarino Nuclear Convencionalmente Armado (SNCA) brasileiro, a demanda de conhecimento de áreas específicas e cada vez mais críticas tem aumentado, como é o caso do projeto de estruturas submarinas. Nesse contexto, a otimização topológica sob restrições de tensão com aplicações em subestruturas destaca-se pela relevância e pela natureza desafiadora dos problemas de projeto associados. A finalidade deste trabalho foi desenvolver um código computacional para análise por elementos finitos e otimização topológica visando a redução de massa estrutural, sem comprometer a resistência avaliada por limites máximos de tensão do material. A metodologia desenvolvida é baseada em minimizações de função objetivo de massa com a incorporação de restrições de tensão de von Mises em todos os elementos finitos que representam uma estrutura, por meio do método numérico de Lagrangiano Aumentado. As soluções foram obtidas por meio das rotinas de otimização do pacote fmincon do MATLAB. Estratégias de relaxação de restrições de tensão são aplicadas para permitir alcançar soluções em regiões degeneradas do domínio de projeto. Os resultados alcançados indicam uma minimização de massa, respeitando adequadamente as restrições de tensão estabelecidas. Além disso, os resultados demonstraram sensibilidade às magnitudes de carga aplicada e aos limites de tensão do material. Comparações entre topologias otimizadas considerando restrições de tensão e aquelas voltadas para flexibilidade média em problemas clássicos também foram realizadas, confirmando que a metodologia desenvolvida respeita os limites de tensão estabelecidos. Desta maneira, concluiu-se que a aplicação conjunta do método dos elementos finitos com a otimização topológica tem pleno potencial para o bom desenvolvimento de estruturas mais leves e eficientes, contribuindo para a viabilidade e competitividade do projeto do submarino no cenário global.			
12. GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			